TD L1 BST (Groupe 6) – 17/11/25

CHANGEMENT DE VARIABLE dans les INTÉGRALS

Rappels.

- $\int e^y \, dy = e^y$
- $\int \text{🏠}^{\alpha} \, d\text{🏠} = \dfrac{\text{🏠}^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{\text{🚶}} \, d\text{🚶} = \ln(|\text{🚶}|)$.

Intro.

$$\int e^{x+1} \, dx = \int e^x \cdot \underbrace{e^1}_{\text{const.}} dx = e \int e^x \, dx = e \cdot e^x = e^{x+1}$$

c'est "comme si on a remplacé $x+1$ par y, et on a calculé

$$\int e^y \, dy = e^y \text{ "}$$

Déf. Si $f(x)$ est une fonction dérivable, on appelle « ÉLÉMENT DIFFERENTIEL (de f) » (ou "la différentielle de f")

$$df = f'(x) \, dx$$

Ex. Si $y = x^2 + 2$, alors $y'(x) = 2x$ et donc

$$dy = 2x \, dx$$

Si $y = x+1$, alors $y' = 1$ et donc

$$dy = 1 \cdot dx = dx$$

Règle (changement de variable)

Si $y = y(x)$ est une fonction (dérivable), alors

$$\int f(y)\, dy = \int f(y(x))\, y'(x)\, dx$$

Ex. 0 $\int e^{x+1}\, dx$

$y = x+1 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow dy = 1 \cdot dx = dx$

$$\int e^{x+1}\, dx = \int e^{y}\, dy = e^{y} = e^{x+1}$$

Ex. 1 $\int (2x+3)^{10}\, dx$

$y = 2x+3 \,,\quad y' = 2$

$dy = y'(x)\, dx = 2\, dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}\, dy$

$$\int (2x+3)^{10}\, dx = \int y^{10}\, \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}\int y^{10}\, dy = \frac{1}{2}\, \frac{y^{11}}{11} = \frac{(2x+3)^{11}}{22}.$$

"Rappel" avec

🏠 $= y$

$\alpha = 10$

Ex. 2 $\int \frac{1}{7x+2}\, dx$

$u = 7x+2$

$u' = 7$

$du = u'(x)\, dx = 7\, dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{7}\, du$

$$\int \frac{1}{7x+2}\, dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{7}\, du = \frac{1}{7}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{7} \ln|u| = \frac{1}{7} \ln|7x+2|.$$

Ex. 3 $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$y = x^2+1$

$y' = 2x \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\,dy$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{y}\,\frac{1}{2\cancel{x}}\,dy = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\ln|y|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|$$

$$\left(= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)$$

$x^2 \geq 0$

$\Downarrow$

$x^2+1 \geq 1 > 0$

Ex. 4 $\int x\,e^{-2x^2}\,dx$

$z = -2x^2$

$z' = -4x \Rightarrow dz = -4x\,dx$

$\Rightarrow dx = -\frac{1}{4x}\,dz$

$$\int x\,e^{-2x^2}\,dx = \int \cancel{x}\,e^{z}\left(-\frac{1}{4\cancel{x}}\right)dz = -\frac{1}{4}\int e^{z}\,dz$$

$$= -\frac{1}{4}e^{z}$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2x^2}.$$

Ex. 5 $\int (\cos(x))^7 \sin(x)\,dx$

$y = \cos(x)$

$y' = -\sin(x)$

$dy = -\sin(x)\,dx$

$$\int \underbrace{(\overbrace{\cos(x)}^{y})^7}\ \underbrace{\sin(x)\,dx}_{-dy} = \int y^7\,(-dy) = -\int y^7\,dy = -\frac{y^8}{8} = -\frac{(\cos(x))^8}{8}.$$

- **Changement de variable dans les intégrals DÉFINIS.**

Rappel que, si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Règle pour le chang. de variable

$$\int_a^b f(y(x))\,y'(x)\,dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y)\,dy$$

Ex.

$$\int_0^1 (2x+3)^{13}\,dx \underset{\substack{y=2x+3\\ dy=2\,dx}}{=} \int_3^5 y^{13}\,\frac{1}{2}\,dy$$

si $x=0$, alors $\overset{y(0)}{y} = 2\cdot 0 + 3 = 3$

si $x=1$, alors $y(1) = 2\cdot 1 + 3 = 5$

$$= \frac{1}{2}\int_3^5 y^{13}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{14}}{14}\right]_3^5 = \frac{1}{2}\left(\frac{5^{14}}{14} - \frac{3^{14}}{14}\right).$$

Ex. 6 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}}\,dx$

$u = x^2+2$

$du = (x^2+2)'\,dx = 2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}\,x\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

⌂ $= u$, $\alpha = -\frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{4}\,u^{2/3}$$

$$= \frac{3}{4}\left(x^2+2\right)^{2/3}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2)^2}.$$

Exercice 33. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les primitives suivantes, en précisant les intervalles où ce calcul est valable :

a. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{2x+3}dx$ c. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ e. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ g. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ i. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$

b. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1}dx$ d. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos(x)}}dx$ f. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ h. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1+\sin x)^4}dx$ j. $\displaystyle\int \tan(x)dx$

Ind. Pour f. poser $y = \ln(x)$

Pour j. rappel $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Sol. Voir le fichier du Groupe 1 du 06/11/25.