TD L1 AES (Groupe 3) – 18/11/25

Rappels sur les propriétés des fonctions

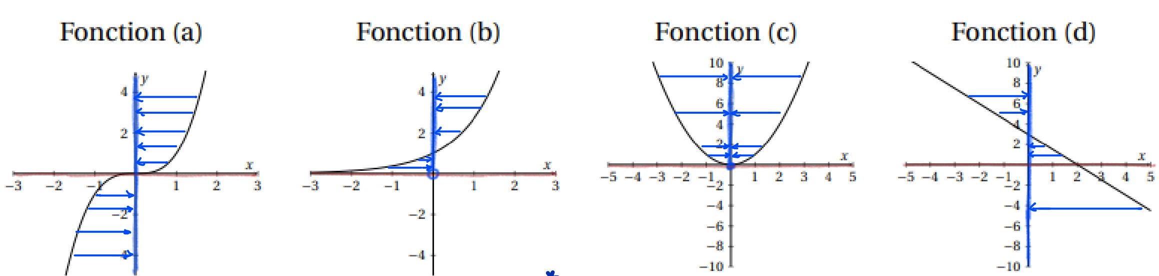
Note. Ce fichier est un extrait du fichier relatif au TD du Groupe 4 du 04/11/25.

TD 4 | Les fonctions - partie 2

1.1 Question de cours

1. Les graphes de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont représentés ci-dessous. Pour chacune des fonctions
   - (a) identifiez le type de fonction
   - (b) identifiez le domaine et le codomaine → en général c'est toujours $\mathbb{R}$, mais ici nous considérons l'IMAGE (valeurs y atteintes)
   - (c) dites si la fonction est injective, surjective ou bijective (en précisant les domaines d'arrivée).
   - (d) dites si a fonction est monotone ou non monotone et sur quel(s) intervalle(s) elle est croissante,
   - (e) dites sur quel(s) intervalle(s) la fonction est linéaire, concave et convexe.

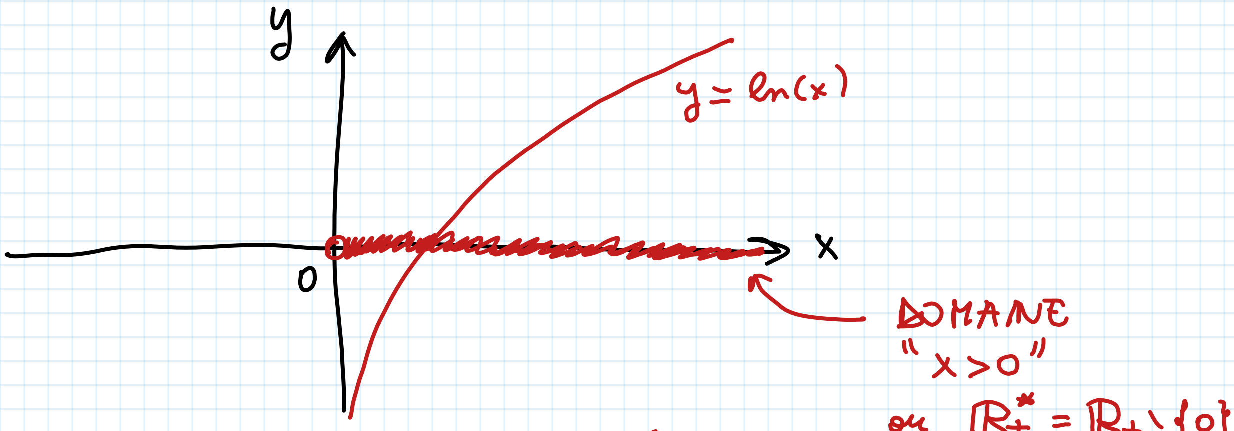
Image $\ni y$
Domaine $\ni x$

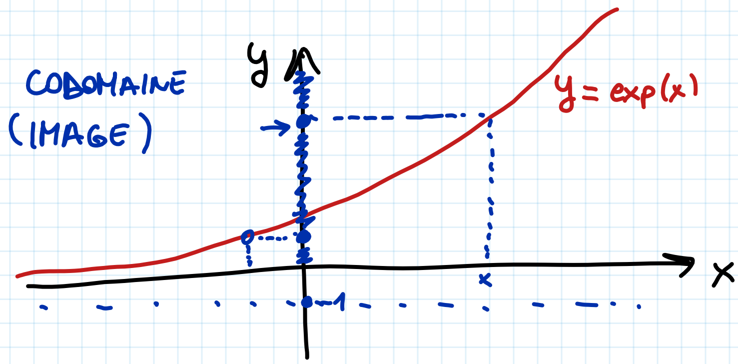


	(a)	(b)	(c)	(d)
	Dom = $\mathbb{R}$ Im: $\mathbb{R}$	Dom = $\mathbb{R}$ Im: $\mathbb{R}_+^*$	Dom = $\mathbb{R}$ Im = $\mathbb{R}_+$	Dom = $\mathbb{R}$ Im = $\mathbb{R}$
Type:	POUISSANCE	EXP.	POUISSANCE	AFFINE

$$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, +\infty[$$
$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

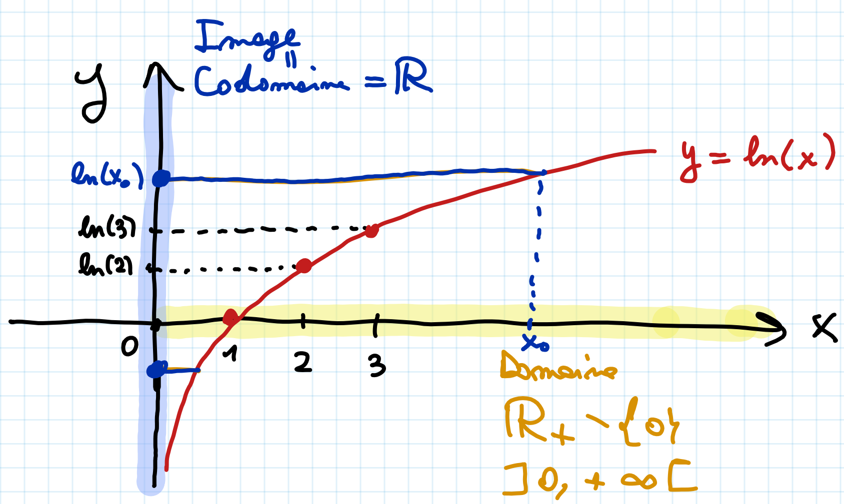
RAPPELS THÉORIQUES





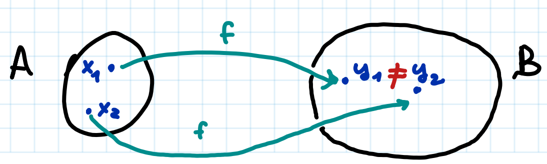
$\nexists x \in \mathbb{R}$ tq $e^x = -1$

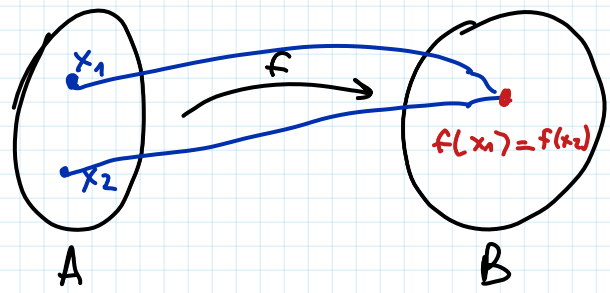
$-1 \notin$ Image de $\exp$



Déf. $f : A \to B$ fonction est <u>INJECTIVE</u> si

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$





PAS INJECTIVE !

Ex. 1 f : étu Groupe 4 AES $\longrightarrow$ Noms français

$f(\text{étu}) = \text{Nom étu}$

f est injective parce que dans le GROUPE 4 il n'y a pas deux étu avec le même nom !

$\to$ $\text{étu}_1 \neq \text{étu}_2 \Rightarrow \text{nom}_1 \neq \text{nom}_2$

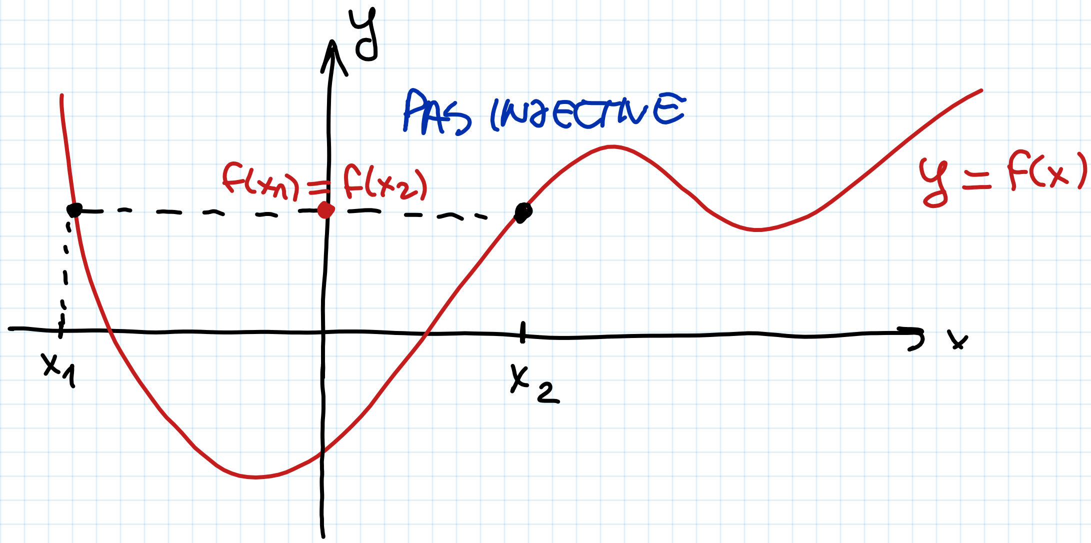
Ex. 2 f : étu Groupe 4 AES $\longrightarrow \mathbb{R}$

$f(\text{étu}) = \text{Âge étu}$

f N'EST PAS INJECTIVE car dans le groupe 4 il y a sûrement deux étu avec le même âge.

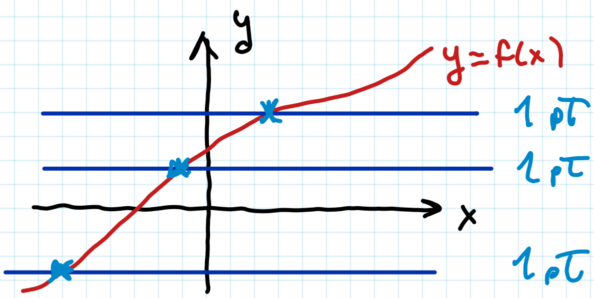
$\text{étu}_1 \neq \text{étu}_2$ mais $\text{âge}(\text{étu}_1) = 18$
$\text{âge}(\text{étu}_2) = 18$

Pour les fonctions réels $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou f : intervl $\to \mathbb{R}$), on a une méthode graphique pour tester l'injectivité.

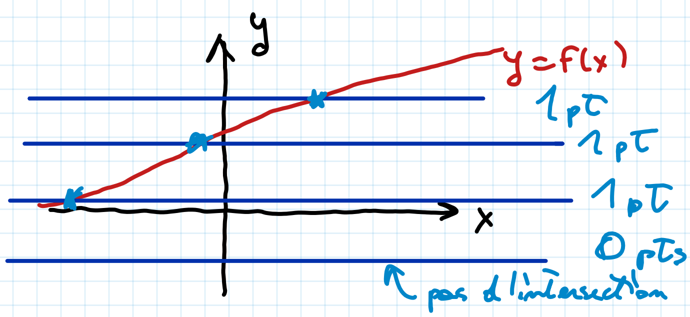


f injective <=> Chaque droite horizontale rencontre le graphe de f en AU PLUS un point.

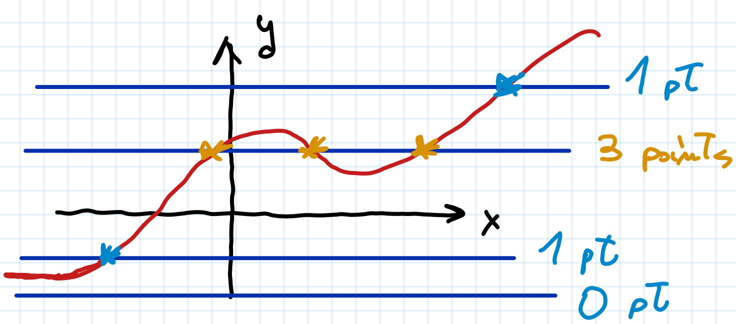
Card(droite horiz. ∩ graphe) ≤ 1



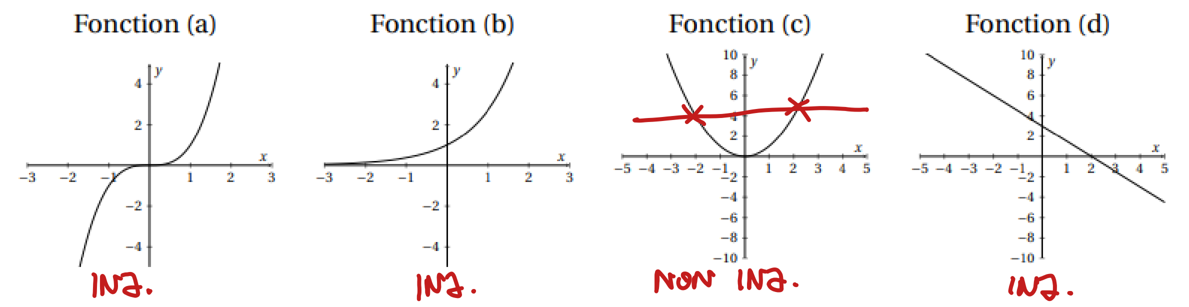
INJECTIVE



INJECTIVE



PAS INJECTIVE !

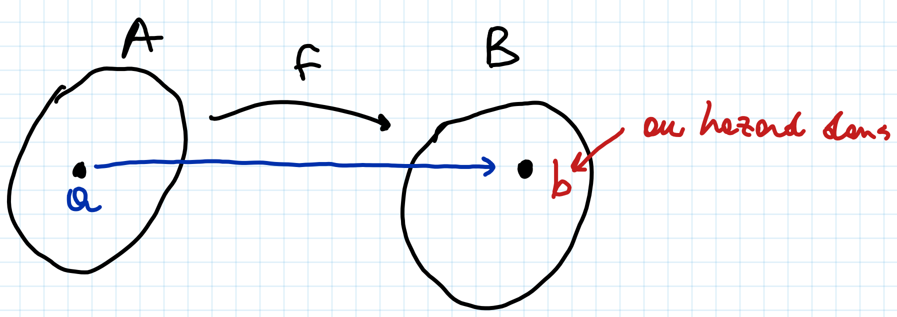


Déf. $f : A \to B$ est SURJECTIVE si

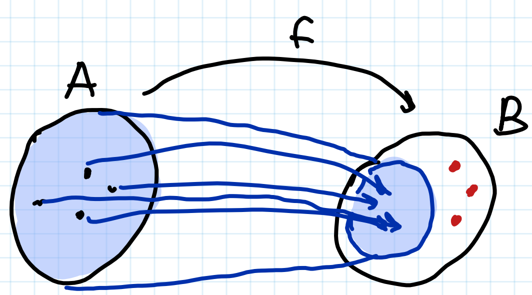
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{t.q.} \quad f(a) = b$$

c'est-à-dire : chaque élément de B est atteint via f par (au moins) un élément de A

f surj $\Rightarrow$ si $b \in B$ (au hasard), il exist toujours $a \in A$ t.q. $f(a) = b$



- Non-exemple



f n'est pas surjective, car les élém. "pts rouges" ne sont pas atteints.

Ex. 1 $\quad f : \text{Villes françaises} \longrightarrow \text{Régions françaises}$

$$\text{ville} \longmapsto \text{région de la ville}$$

$$f(\text{Caen}) = \text{Normandie}$$

f est surjective : pour chaque région il existe toujours une ville appartenant à la région

Par contre, f n'est pas injective :
$f(\text{Caen}) = f(\text{Rouen}) = \text{Normandie}$ mais $\text{Caen} \neq \text{Rouen}$

Ex. 2 $\quad f : \text{étu Groupe 4 AES} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(\text{étu}) = \text{Âge étu}$$

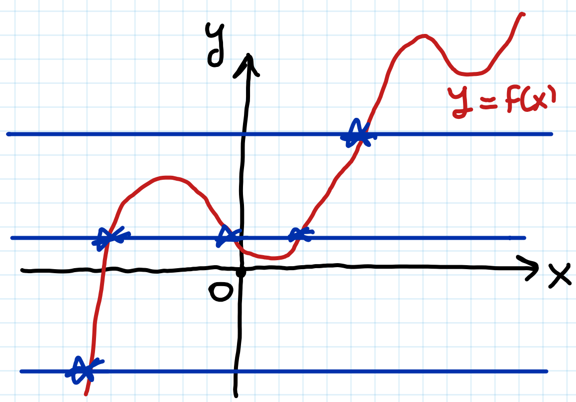
$100 \in \mathbb{R}$
$-2 \in \mathbb{R}$

f n'est pas surjective : il n'y a pas d'étu de 100 ans (ou "-2" ans) dans le groupe 4.

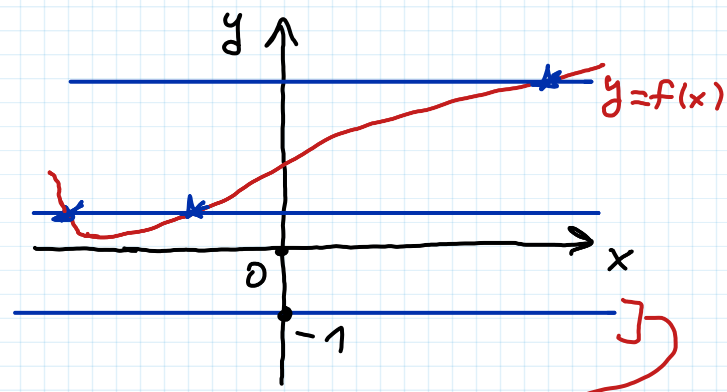
Pour les fonctions réels $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou f : interval $\to$ interval), on a une méthode graphique pour tester la surjectivité.

Il faut toujours spécifier le $\underbrace{\text{domaine d'arrivée}}_{\text{codomaine}}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



SURJECTIVE

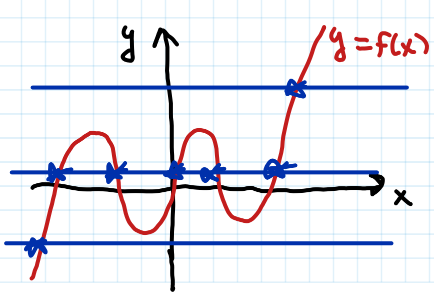


PAS SURJECTIVE

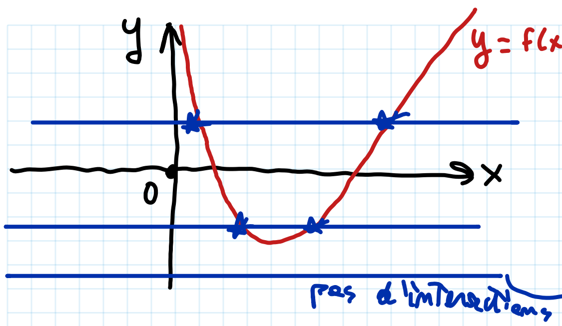
(y = -1 n'est pas atteint)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective $\iff$ Chaque droite horizontale rencontre le graphe de f en <u>AU MOINS</u> un point.

$\mathrm{Card}(\text{droite horiz.} \cap \text{graphe}) \geq 1$

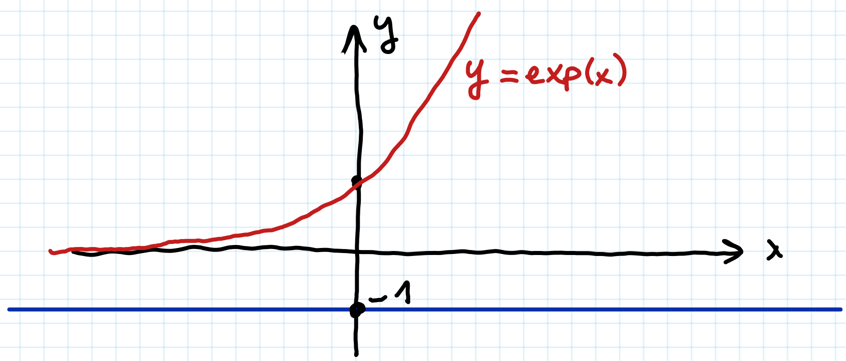


f(x) est SURJECTIVE



PAS SURJECTIVE si le codomaine est $\mathbb{R}$

La surjectivité dépends du CODOMAINE :

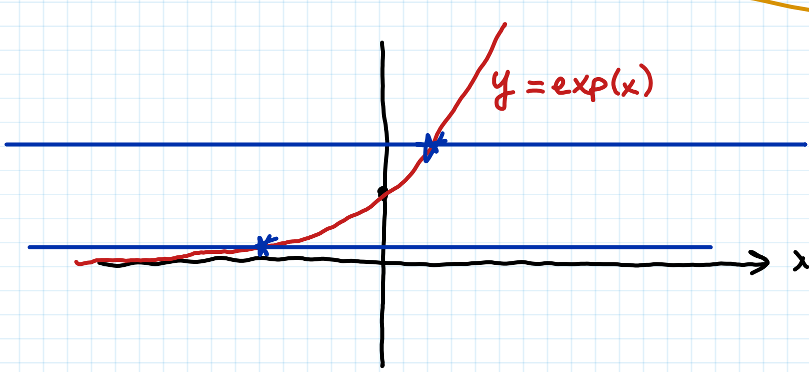


$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ N'EST PAS SURJECTIVE

$-1 \in \mathbb{R}$ et $\nexists x \in \mathbb{R}$ tq $\exp(x) = -1$

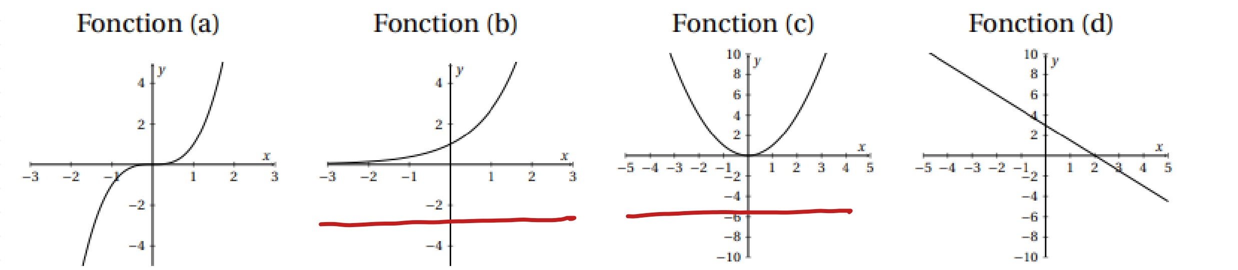
Mais $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ EST SURJECTIVE

$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$



Maintenant je considère uniquement les droites horizontales de hauteur > 0

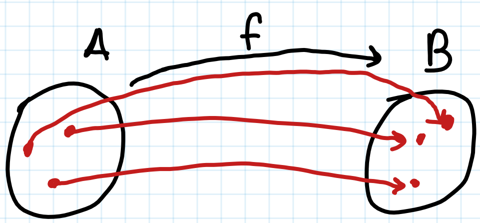
Donc, il faut vraiment préciser le codomain (domaine d'arrivé).



Fonction (a)	Fonction (b)	Fonction (c)	Fonction (d)
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
SURJ.	PAS SURJ.	PAS SURJ.	SURJ.
	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$	
	SURJ	SURJ	

Déf. Une fonction $f : A \to B$ est BIJECTIVE si elle est

INJECTIVE + SURJECTIVE



Pour chaque $b \in B$ $\overbrace{\text{il existe}}^{\text{SURJ}}$ $\overbrace{\text{un UNIQUE}}^{\text{INJ.}}$ $a \in A$

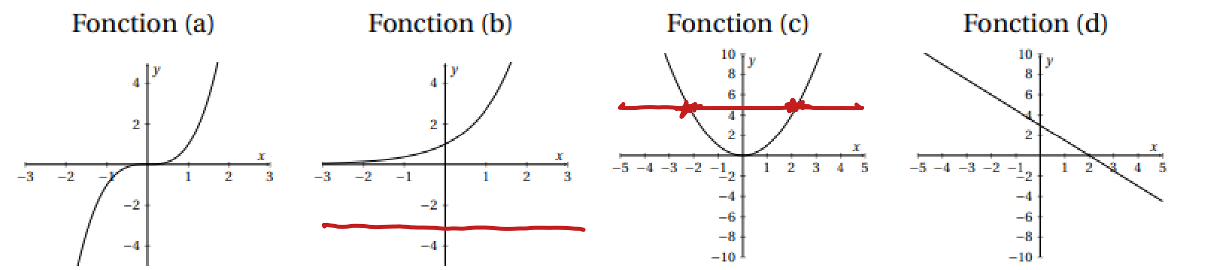
t.q. $f(a) = b$

Graphiquement (pour les fonctions réels)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est BIJECTIVE $\iff$ Chaque droite horizontale rencontre le graphe de f en EXACTEMENT un point.

$$\text{Card}(\text{droite horiz.} \cap \text{graphe}) = 1$$

SURJ: ≥ 1, INJ: ≤ 1 $\Rightarrow$ SURJ et INJ: $= 1$



(a) BIJ.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PAS BIJ.

(PAS SURJ.)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

BIJ

(c) PAS BIJ.

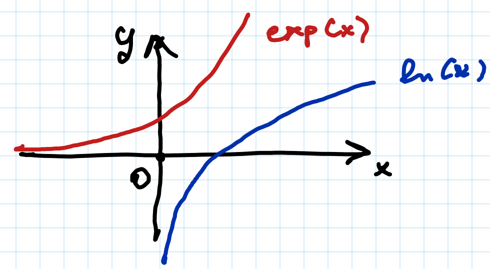
(PAS INJ.)

(d) BIJ.

<u>Ex.</u>

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ BIJECTIVE

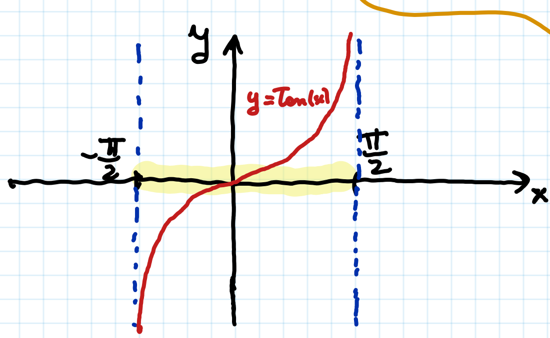
$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ BIJECTIVE



<u>Ex.</u> $f(x) = \mathrm{Tan}(x)$

$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

Domaine



BIJECTIVE !