TD L1 AES (Groupe 4) – 18/11/25

1.2 Fonction de demande et fonction de demande inverse

On s'intéresse à la demande pour un bien. On note p le prix du bien et Q la quantité demandée. On suppose que la demande pour le bien ne dépend que du prix p du bien et on se donne la fonction de demande $f(p) = 4 - \frac{1}{2}p$. Cette fonction exprime la demande en fonction du prix.

1. Quel est le type de la fonction de demande et quels peuvent être le domaine de définition et le co-domaine de la fonction (compte tenu des variables économiques considérées) ? Quelles sont les propriétés de cette fonction (compte tenu de son type) ?
2. Tracez la fonction dans le plan approprié.
3. En économie on s'intéresse aussi à la fonction de demande inverse qui exprime le prix en fonction de la demande. Il s'agit de la fonction inverse (réciproque) de la fonction de demande. Montrez que la fonction de demande inverse associée à la fonction de demande de l'énoncé est la fonction $g(Q) = 8 - 2Q$.
4. Quel est le type de la fonction de demande inverse et quels sont le domaine de définition et le co-domaine de la fonction? Quelles sont les propriétés de cette fonction de demande inverse (compte tenu de son type) ? Dans quel plan convient-il de tracer la fonction de demande inverse ?

Déjà faits (04/11/25)

3. $Q(p) = 4 - \frac{1}{2}p$

$$Q : [0, 8] \longrightarrow [0, 4]$$
$$p \longmapsto 4 - \frac{1}{2}p$$

Si on connaît Q, comment retrouver p ?

Si $Q = 2$, qu'est-ce que c'est p ?

$$4 - \frac{1}{2}p = 2 \iff -\frac{1}{2}p = 2 - 4 = -2$$
$$\iff p = (-2)\cdot(-2) = 4$$

$$Q = 4 - \frac{1}{2}p \iff -\frac{1}{2}p = Q - 4$$
$$\iff p = -2(Q-4) = 8 - 2Q$$

Exo. (DM) Montrer que, si $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ et $g(x) = 8 - 2x$, alors $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

4. $g(Q) = 8 - 2Q$ Type : AFFINE

On a déjà vu que $0 \leq p \leq 8$ et $0 \leq Q \leq 4$

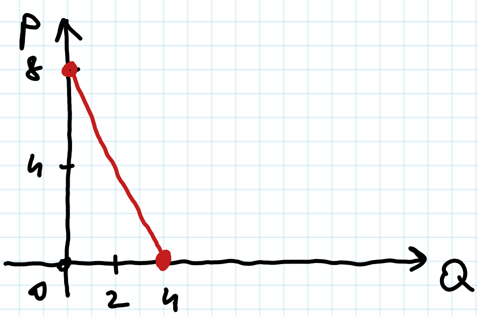
domaine → image (codomaine)

donc
$$g : [0,4] \longrightarrow [0,8]$$
$$Q \longmapsto 8 - 2Q$$

Propriétés : strictement décroissante

$$Q_1 > Q_2 \iff -2Q_1 < -2Q_2$$
$$\iff 8 - 2Q_1 < 8 - 2Q_2$$
$$\iff g(Q_1) < g(Q_2)$$

[Ou, après..., $g'(Q) = -2 < 0 \Rightarrow g$ décroissante]

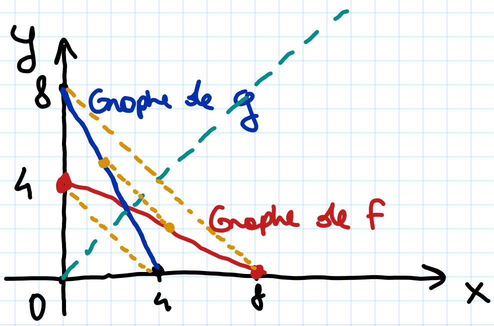


$g(Q) = 8 - 2Q$

$Q = 0 \Rightarrow g(Q) = 8 - 2 \cdot 0 = 8$

$Q = 4 \Rightarrow g(4) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$

Rmq. On a tracé (dernière fois pour le graphe de f)



$f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$

$g(x) = 8 - 2x$

→ Ex. 1.3 (et, peut-être, 1.4) la prochaine fois !

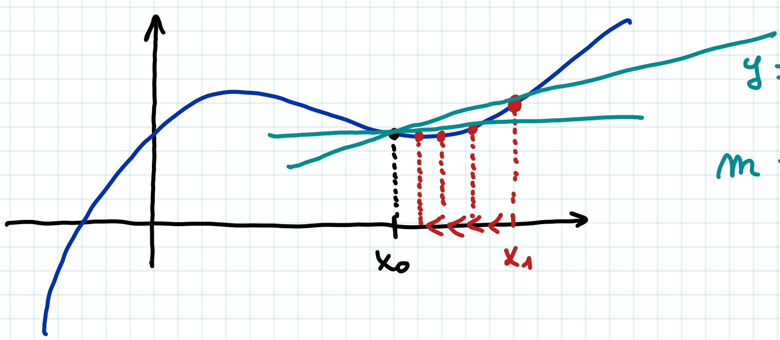
2 Sens de variation d'une fonction

2.1 Questions de cours

1. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Rappelez la définition du taux d'accroissement moyen de f entre x_0 et x_1, où x_0 et x_1 sont deux éléments de $\mathbb{R}$. Quel est le lien entre ce taux d'accroissement moyen entre x_0 et x_1 et la dérivée de f calculée en x_0 ?

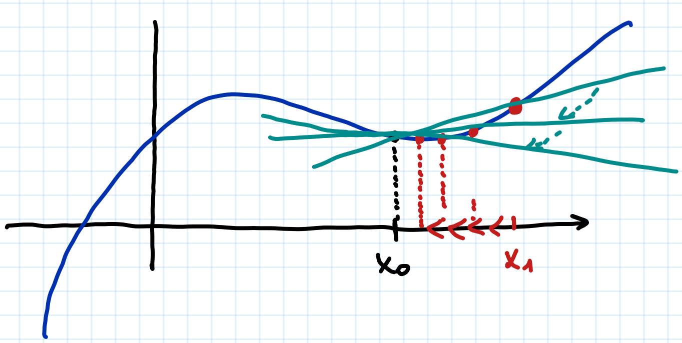
2. Soit une fonction f définie sur un ensemble E. Il existe deux valeurs de E, x_1 et x_2, telles que $x_1 > x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. A partir de cette information, pouvez-vous conclure que la fonction f est positive sur E, négative sur E, croissante sur E, décroissante sur E ou n'avez-vous pas assez d'information pour conclure sur le signe et/ou le sens de variation de f sur E ?

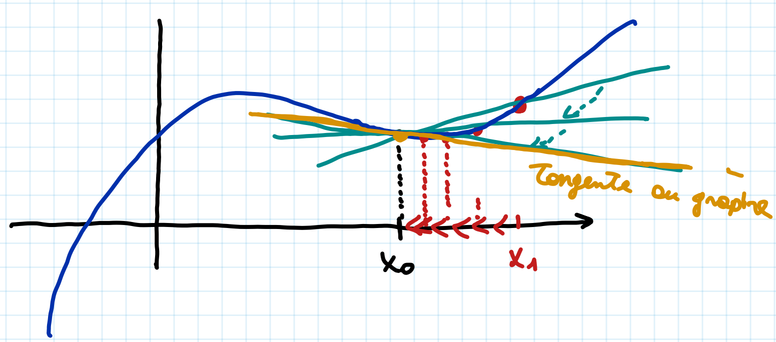
$$\underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\text{Taux d'accroissement moyen entre } x_0 \text{ et } x_1} \qquad f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$



$y = mx + q$

$$m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$



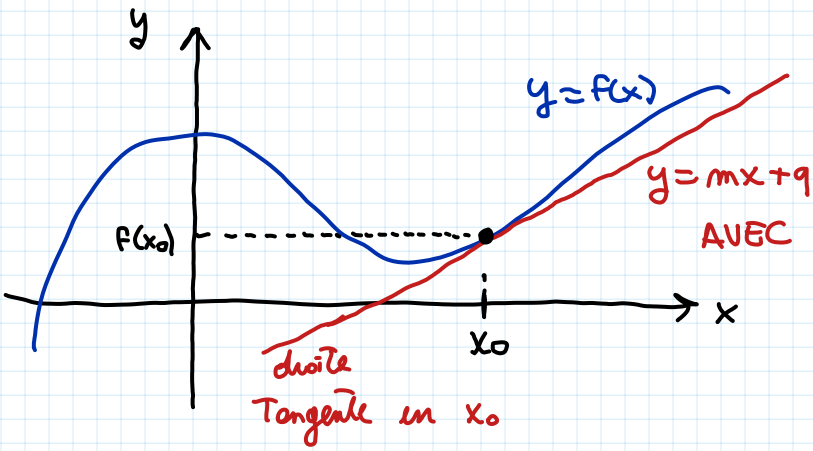


la limite $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ existe pour tout x_0

On a vu que si $f(x)$ est une fonction derivable, alors

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

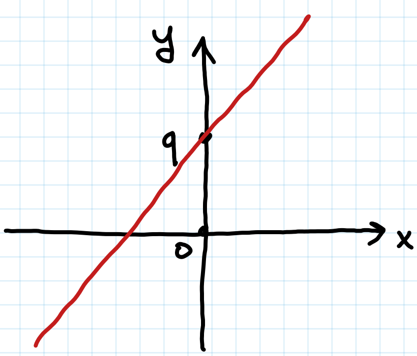
est le coefficient directeur de la DROITE TANGENTE au graphe de f en x_0



AVEC $m = f'(x_0)$

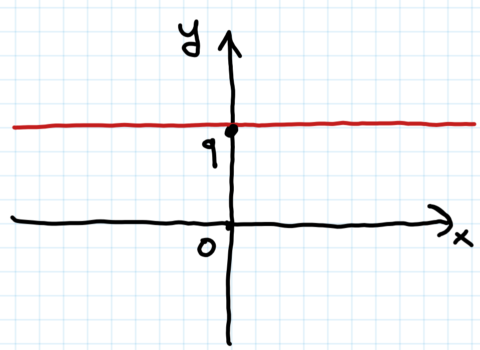
Rappel $\quad y = m x + q$

m ↳ coefficient directeur



$m > 0$

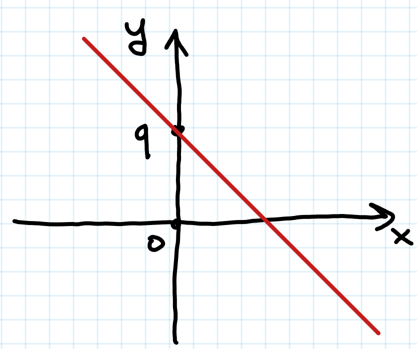
croissante ↗



$m = 0$

(horizontale . $y = q$)

constante



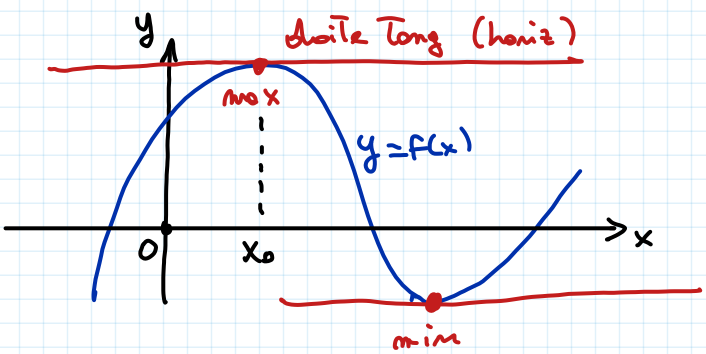
$m < 0$

décroissante ↘

Soit encore $f(x)$ une fonction dérivable.

- MAX/MIN

On note que si x_0 est un point de max/min,



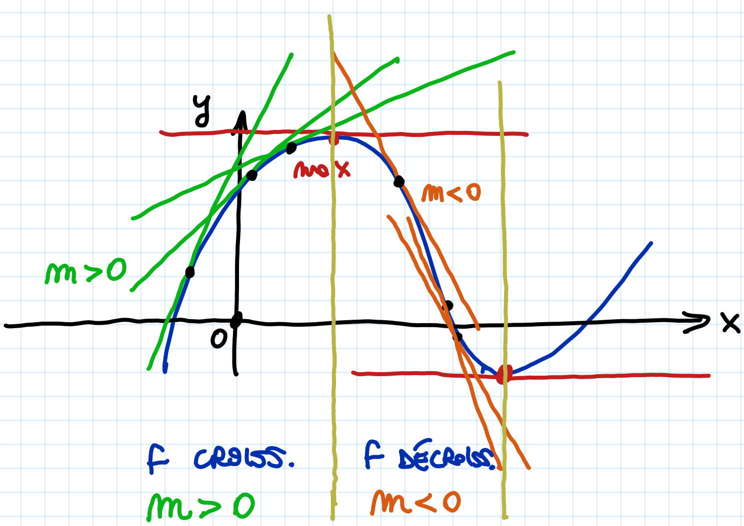
alors la droite tangente au graphe de $f(x)$ en x_0 est HORIZONTALE

$\rightsquigarrow$ coeff. direct. $= 0$

$$x_0 \text{ pt. de max/min} \implies f'(x_0) = 0$$

Donc, pour trouver les points de max/min d'une fonction (dérivable), on peut trouver les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

- MONOTONIE



" f STRICTEMENT CROISSANTE "

$\implies f'(x) > 0$

" f STRICTEMENT DÉCROISSANTE "

$\implies f'(x) < 0$