TD L1 BST (Groupe 5) – 24/11/25

• PARTIE 1 : Quelques Remarques

1.1) Intégrales définies par parties : « laisser les extrema »

Rappel : Pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$, il suffit de calculer $F(x) = \int f(x)\,dx$ et après

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[MÉTHODE STANDARD]

Ex. $\int_0^1 x\, e^x\, dx$

→ Méthode standard

$$F(x) = \int \underbrace{x}_{g}\, \underbrace{e^x}_{f'}\, dx = \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}\, dx = e^x x - e^x$$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$g'(x) = 1$

Donc
$$\int_0^1 x\, e^x\, dx = [F(x)]_0^1 = [e^x x - e^x]_0^1$$
$$= e^1 \cdot 1 - e^1 - (e^0 \cdot 0 - e^0)$$
$$= e - e - (-1)$$
$$= 1.$$

→ Méthode 2 (équivalente) : « laisser les extrema »

il faut mettre

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{g}\, \underbrace{e^x}_{f'}\, dx = \left[\underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}\, dx$$

$$= e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - \int_0^1 e^x\, dx$$
$$= e - [e^x]_0^1$$
$$= e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

1.2) Intégrals indéfinies « remarquables » → pour les fractions rationelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ constante. Alors

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \int \frac{1}{p}\,dp = \ln|p| = \ln|x-\alpha|.$$

Chang. de variable

$p = x-\alpha$
$p'(x) = 1$
$dp = p'(x)\,dx = dx$

1.3) • $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

• $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = 5^2 - 4\cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ ⟨ $6/2 = 3$; $4/2 = 2$

Rappel : en général, si on a

$ax^2 + bx + c$, avec $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$,

alors, si $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, on a

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

• $x^2 - \alpha^2 = (x-\alpha)(x+\alpha)$

• PARTIE 2 : Intégration des Fractions Rationelles

Ex. 1 On suppose de vouloir calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

Idée :

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

Donc :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Alors

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$z = x+1$
bla bla bla ...

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

déjà vu (1.2)
$y = x-1$
$dy = dx$
bla bla bla....

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

pas nécessaire

On s'est réduit aux intégrales des ÉLÉMENTS (plus) SIMPLES.

Ex. 2 Calculer $\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$.

On a vu que $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$.

L'idée est de se réduire au cas d'un intégral des élément simples : on veut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ constantes telles que

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \cdot$$

Comment trouver a et b ?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2}$$

Donc il faut poser :

$$\frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

ms $(a+b)x - 2a - b = 1$

Rappel : a et b sont CONSTANTES, c'est-à-dire, ils ne dependent pas de x

Si on pose $\underbrace{a+b=0}_{\text{on a "tué" le } x \text{ à gauche}}$, il reste $-2a-b=1$

et on a donc trouvé un système linéaire en a et b :

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ -2a-b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ -2(-b) - b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ 2b - b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Donc $a = -1$ et $b = 1$, d'où

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

alors

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$$

comme avant

$$= -\ln|x-1| + \ln|x-2|$$

$$= \ln\frac{|x-2|}{|x-1|} = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|.$$

pas nécessaire

Ex. 3 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+5x+4}\,dx$

1) On détermine $a, b \in \mathbb{R}$ CONSTANTES telles que

$$\frac{x+2}{x^2+5x+4} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4}$$

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4} = \frac{a(x+4) + b(x+1)}{(x+1)(x+4)}$$

$$= \frac{ax + 4a + bx + b}{(x+1)(x+4)}$$

$$= \frac{(a+b)x + 4a + b}{x^2+5x+4} = \frac{x+2}{x^2+5x+4}$$

doit être égal à

Donc on a $\quad (a+b)x + 4a+b = 1 \cdot x + 2$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ 4a+b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1-a \\ 4a + 1 - a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1-a \\ 3a = 2-1 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 1-a = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ a = 1/3 \end{cases}$$

Donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$. Alors

$$\frac{x+2}{x^2+5x+4} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{2/3}{x+4}$$

et donc

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x+4}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+4}\,dx$$

comme avant...

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x+4| .$$

Ex. 4 Détermine $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes telles que

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1},$$

puis calculer

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx.$$

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1} = \frac{a + bx}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

$$= \frac{(a+bx)(x-1) + cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{ax - a + bx^2 - bx + cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{(b+c)x^2 + (a-b)x - a}{x^2(x-1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{doit être} \\ \text{égal à}}}{=} \frac{1}{x^2(x-1)}$$

Donc

$$(b+c)x^2 + (a-b)x - a = 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$$

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a - b = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -b = 1 \\ b = a = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Alors on a trouvé : $\frac{1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

et donc

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + \ln|x-1| = \frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1|.$$

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour $\alpha = -2$

Enfin :
$$\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx = \left[\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1|\right]_2^3$$

$$= \underset{\text{DEVOIR MAISON}}{\dots} = -\frac{1}{6} + 2\ln 2 - \ln 3 \underset{\text{pas nécessaire}}{=} \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}.$$

POST TD : de façon équivalente (en laissant les extrema dans l'intégral)

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= -\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{x} + \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^3 - \left[\ln|x|\right]_2^3 + \left[\ln|x-1|\right]_2^3 \quad ⊛$$

$$= \dots = -\frac{1}{6} - \ln 3 + 2\ln 2.$$

⊛ Ou, en laissant les extrema dans le changement de variable :

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = \left[\ln|y|\right]_1^2.$$

$y = x-1$
$dy = dx$

$x=2 \Rightarrow y=1$
$x=3 \Rightarrow y=2$

Exercice 1. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1},$$

puis calculer

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{2x+5}{x^2+5x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+5},$$

puis calculer

$$\int_1^2 \frac{2x+5}{x^2+5x}\, \mathrm{d}x.$$

Solutions : voir le fichier du Groupe 3 (ou 1) du 20/11/25.