TD L1 BST (Groupe 6) - 24/11/25

Intégration des Fractions Rationnelles

1) Remarques

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ constante. Alors

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx \underset{\substack{y = x-\alpha \\ y' = 1 \\ dy = dx}}{=} \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| = \ln|x-\alpha| .$$

- $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$x^2 - 5x + 6$

Rappel. $ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)}$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 6/2 = 3 \\ 4/2 = 2 \end{cases}$$

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

- $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et en général :
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2) DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

On note que $\displaystyle \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{\cancel{x}+1 - (\cancel{x}-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

Donc $\displaystyle \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$ et donc

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$y = x-1$
$dy = dx$
bla bla bla

$y = x+1$
$dy = dx$
bla bla bla

pas nécessaire

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| .$$

Ex. 2 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ CONSTANTES telles que

a, b ne dependent pas de x

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

Comment trouver a et b ?

$$\underbrace{\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}}_{\text{doit être égal à}} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{x}{x^2-3x+2} \quad = \quad \frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2}$$

Il suffit de poser $x = (a+b)x - 2a - b$

$$x = 1 \cdot x + 0$$

donc il faut poser $\begin{cases} a+b = 1 \\ -2a-b = 0 \end{cases}$ $\quad -2a-b=0 \to b = -2a$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b=-2a \end{cases} \iff \begin{cases} a+(-2a)=1 \\ b=-2a \end{cases} \iff \begin{cases} -a=1 \\ b=-2a \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

Donc $a = -1$ et $b = 2$, c'est-à-dire

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

et alors

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| .$$

$y = x-1$ bla bla $\qquad$ $y = x-2$ bla bla

Ex. 3 Déterminer des réels a, b (CONSTANTS !) tels que

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3},$$

puis calculer $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,dx$

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)+b(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{ax-3a+bx-2b}{x^2-5x+6}$$

$$= \frac{(a+b)x-3a-2b}{x^2-5x+6} \overset{\text{doit être}}{=} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

$\leadsto$ $(a+b)x - 3a - 2b = x+1 = 1\cdot x + 1$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ -3a-2b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1-a \\ -3a-2(1-a) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 1-a \\ -3a-2+2a = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 1-a \\ -a = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1-a = 1+3 = 4 \\ a = -3 \end{cases}$$

Donc $a=-3$ et $b=4$. Alors

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3}$$

d'où $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,dx = -3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx$

$$= -3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| .$$

comme avant

Ex. 4 Déterminer des réels $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} ,$$

puis calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1} = \frac{ax+b}{x^2}+\frac{c}{x-1}$$

$$= \frac{(ax+b)(x-1)+cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{ax^2+bx-ax-b+cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

Donc $(a+c)x^2+(b-a)x-b = 1 = 0\cdot x^2+0\cdot x+1$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-a=0 \\ -b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-a=1 \\ a=b=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Alors $a=b=-1$ et $c=1$ et donc

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}$$

Donc
$$\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\ln|x| - \int x^{-2}\,dx + \ln|x-1|$$

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour $\alpha = -2$

$$= -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x-1|$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1|.$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx = \left[-\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1|\right]_2^3 = \ldots$$ devoir maison

Exercice 1. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1},$$

puis calculer

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{2x+5}{x^2+5x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+5},$$

puis calculer

$$\int_1^2 \frac{2x+5}{x^2+5x}\,\mathrm{d}x.$$

<u>Solutions</u> : voir le fichier du Groupe 1 (ou 3) du 20/11/25.

Remarque : « Laisser les extrema » en intégrant par parties

il faut mettre

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

→ Pour des exemple d'applications, voir les fichiers suivants :

- GROUPE 5 – 24/11/25
- GROUPE 1 ou 3 – 20/11/25 ["Solutions"]

Mais quand même :

Note. Méthode "pas nécessaire", parce que, comme d'habitude, on peut calculer une primitive

$$H(x) = \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Primitive / Intégral Indéfini

et après $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \big[H(x)\big]_a^b$.

Théorème fondamental du calcul intégral