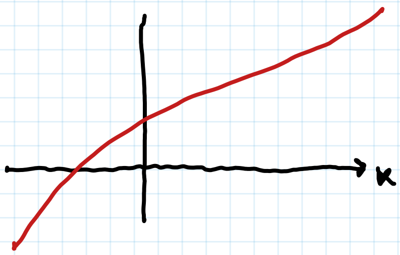
TD L1 AES (Groupe 3) – 25/11/25

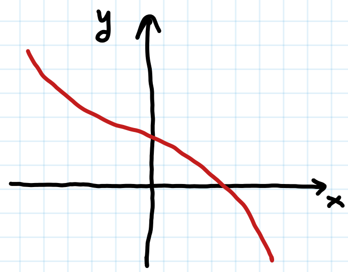
Prochaine fois : QCM (Vendredi 28/11 à 15h)

• Rappels théoriques (informels)

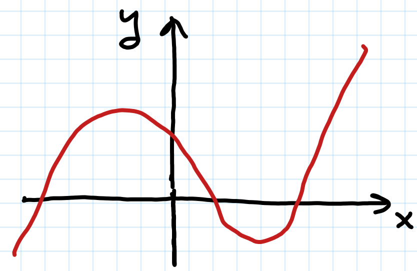
Rappel : " MONOTONE = CROISSANTE OU DÉCROISSANTE "



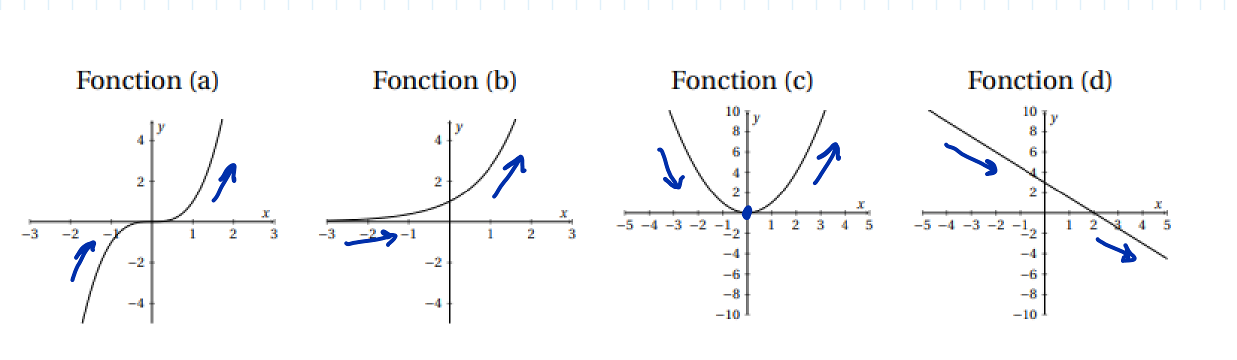
Croiss. => MONOTONE



Décroiss. => MONOTONE



PAS MONOTONE



MONOTONE (Croissante)

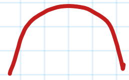
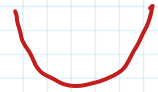
MONOTONE (Croissante)

PAS MONOTONE
Croissante en $[0,+\infty[$
Décroissante en $]-\infty,0]$

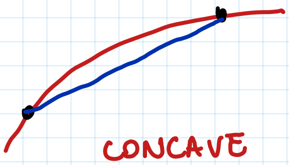
MONOTONE (Décroissante)

Avec la dérivée : f CROISSANTE* si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ Domaine
(si f dérivable) f DÉCROISSANTE* si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in$ Domaine

* Toujours (sur le Domaine)

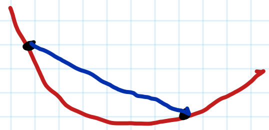
Rappel: " CONCAVE =  " , " CONVEXE =  "

Plus précisément (mais quand-même, pas trop ...)



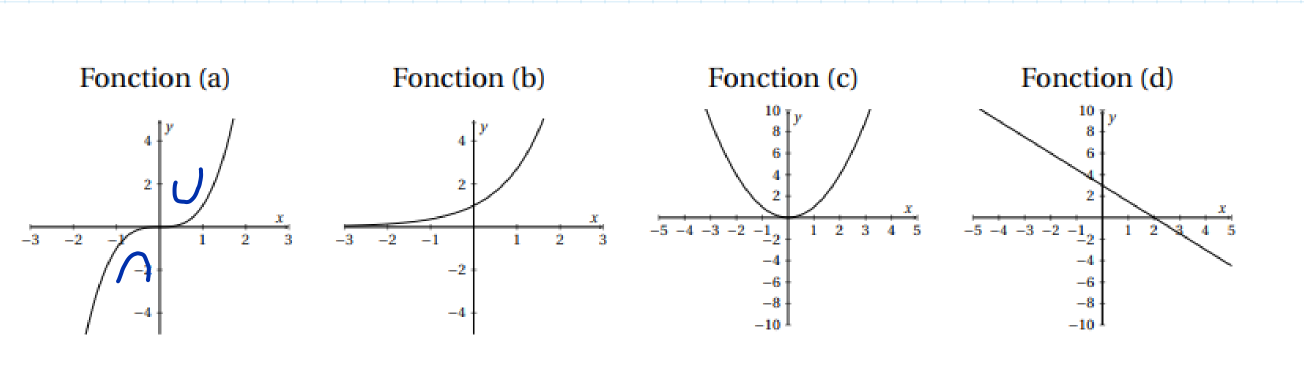
CONCAVE

La ligne bleue se situe SOUS le graphe de la fonc.



CONVEXE

La ligne bleue se situe AU-DESSUS du graphe de la fonc.



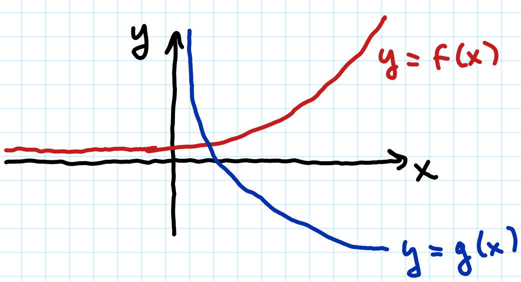
CONCAVE sur $]-\infty, 0[$ — CONVEXE — CONVEXE — LINÉAIRE

CONVEXE sur $]0, +\infty[$

f dérivable deux fois $\Rightarrow$ f CONCAVE si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in$ Domaine(f)

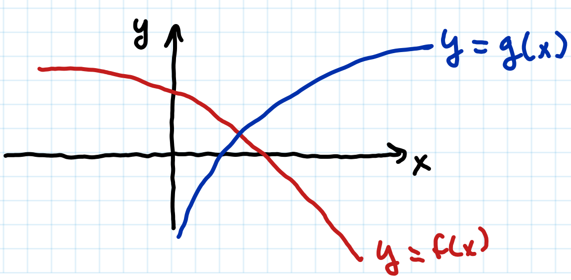
f CONVEXE si $f''(x) \geq 0$ " " " " "

Note. La concavité n'a rien à voir avec la monotonie :



f est CONVEXE CROISSANTE

g est CONVEXE DÉCROISSANTE



f est CONCAVE DÉCROISSANTE

g est CONCAVE CROISSANTE

1.2 Fonction de demande et fonction de demande inverse

On s'intéresse à la demande pour un bien. On note p le prix du bien et Q la quantité demandée. On suppose que la demande pour le bien ne dépend que du prix p du bien et on se donne la fonction de demande $f(p) = 4 - \frac{1}{2}p$. Cette fonction exprime la demande en fonction du prix.

1. Quel est le type de la fonction de demande et quels peuvent être le domaine de définition et le co-domaine de la fonction (compte tenu des variables économiques considérées) ? Quelles sont les propriétés de cette fonction (compte tenu de son type) ?

$f(p) = 4 - \frac{1}{2}p$ Type : affine du type $y = ax + b$ avec $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 4$

p prix du bien $\Rightarrow p \geq 0$

$Q = f(p)$ quantité demandée $\Rightarrow Q = f(p) \geq 0$

$$4 - \frac{1}{2}p \geq 0 \iff 4 \geq \frac{1}{2}p \iff p \leq 8$$

1er cond. 2ème condition

Domaine de f : $[0, 8]$ parce que $0 \leq p \leq 8$

Co-domaine de f : $[0, 4]$ parce que ≥ 0 ok parce que $Q \geq 0$

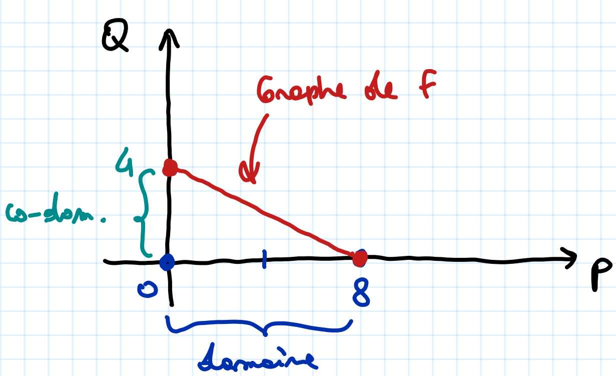
≤ 4 parce que

$$Q = 4 - \underbrace{\frac{1}{2}p}_{\geq 0} \leq 4$$

La fonction f est décroissante $\rightarrow$ $f(p) = 4 - \frac{1}{2}p$

si p augmente, $f(p)$ descend

2. Tracez la fonction dans le plan approprié.



$Q = f(p) = 4 - \frac{1}{2}p$

$p = 0 \Rightarrow Q = f(0) = 4$

$p = 8 \Rightarrow Q = f(8) = 4 - \frac{8}{2} = 4 - 4 = 0$

3. En économie on s'intéresse aussi à la fonction de demande inverse qui exprime le prix en fonction de la demande. Il s'agit de la fonction inverse (réciproque) de la fonction de demande. Montrez que la fonction de demande inverse associée à la fonction de demande de l'énoncé est la fonction $g(Q) = 8 - 2Q$.

$$Q = 4 - \frac{1}{2}p \iff Q - 4 = -\frac{1}{2}p$$

$$\overset{\cdot(-2)}{\iff} -2(Q-4) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)p$$

$$\iff -2Q + 8 = p$$

Donc $p = 8 - 2Q = g(Q)$.

Exo (Devoir Maison) Si $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ et $g(x) = 8 - 2x$

Montrer que $(f \circ g)(x) = x$

et $(g \circ f)(x) = x$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4 - \frac{1}{2}g(x) = 4 - \frac{1}{2}(8-2x)$$

$$= 4 - 4 + \frac{1}{2} \cdot 2x$$

$$= x.$$

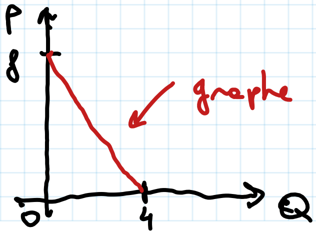
4. Quel est le type de la fonction de demande inverse et quels sont le domaine de définition et le co-domaine de la fonction? Quelles sont les propriétés de cette fonction de demande inverse (compte tenu de son type)? Dans quel plan convient-il de tracer la fonction de demande inverse?

$g(Q) = 8 - 2Q$ affine du type $y = ax + b$

avec $a = -2$ et $b = 8$

Domaine : $[0, 4]$ (on a déjà vu que $Q \in [0,4]$)

Codom. : $[0, 8]$ (" " " " $p = g(Q) \in [0,8]$)



graphe de g [PAS NÉCESSAIRE pour la question]

Plan $(0, Q, p)$.

1.3 la prochaine fois (peut-être...)

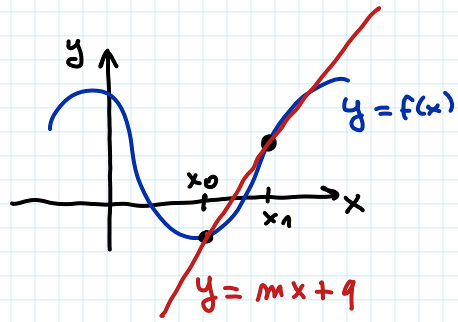
2 Sens de variation d'une fonction

2.1 Questions de cours

1. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Rappelez la définition du taux d'accroissement moyen de f entre x_0 et x_1, où x_0 et x_1 sont deux éléments de $\mathbb{R}$. Quel est le lien entre ce taux d'accroissement moyen entre x_0 et x_1 et la dérivée de f calculée en x_0 ?

Taux d'accroissement moyen de f entre x_0 et x_1 est

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

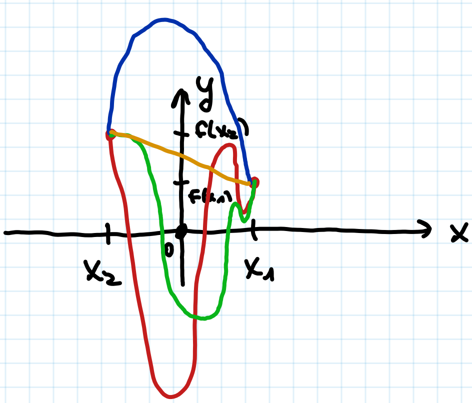


$$m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

- Signification géométrique de la dérivée : voir le fichier du Groupe 4 du 18/11/25.

2. Soit une fonction f définie sur un ensemble E. Il existe deux valeurs de E, x_1 et x_2, telles que $x_1 > x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. A partir de cette information, pouvez-vous conclure que la fonction f est positive sur E, négative sur E, croissante sur E, décroissante sur E ou n'avez-vous pas assez d'information pour conclure sur le signe et/ou le sens de variation de f sur E ?



On peut rien conclure sur le signe et/ou le sens de variation de f sur E.

Au maximum, on peut dire que f n'est pas croissante...

$f(x_2)$ • ? • $f(x_1)$

3. Soit une fonction f définie sur un ensemble E telle que $y = f(x)$. Comment fait-on pour déterminer si la fonction f est croissante sur son ensemble de définition ?

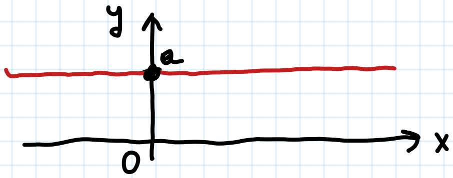
Si la fonction est dérivable sur E, alors il suffit de vérifier si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Si f n'est pas dérivable … il faut vérifier "à la main" que
$\forall x_1, x_2 \in E \,, \; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

4. Quelle est le type de fonction pour lequel on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Une fonction constante : $f(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$a \in \mathbb{R}$ constante fixée

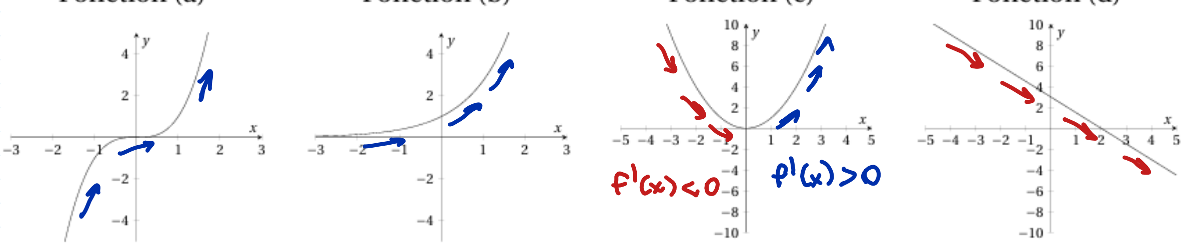


5. Les graphes de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont représentés ci-dessous.

(a) Quelle(s) fonction(s) est(sont) croissante(s) pour tout $x \in \mathbb{R}$? a), b)

(b) Quelle(s) fonction(s) est(sont) telle(s) que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? d) $\Leftrightarrow$ strictement décroissante(s) sur $\mathbb{R}$

Fonction (a) — Fonction (b) — Fonction (c) — Fonction (d)



CROISS. $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

CROISS. $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

DÉCR pour $x < 0$
CROISS pour $x > 0$

DÉCR. $f'(x) \leq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

2.2 Calculs de dérivées et analyse des sens et ampleurs de variation

On s'intéresse à une variable y qui dépend d'une variable x. On veut savoir comment évolue y pour de petites variations de x. Pour chacune des fonctions suivantes, identifiez le type fonction (constante, affine, puissance, polynôme, composée de fonctions,...), calculez la dérivée première et enfin commentez comment évolue $f(x)$ avec x. NB : vous pouvez vous appuyer sur le formulaire fourni en fin d'énoncé.

3.5 Formulaire des dérivées

Soit f une fonction dérivable au point x.

Fonction f	Domaine de définition de f	Dérivable sur	Dérivée f'
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$f(x) = x^a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ax^{a-1}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$[0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$

Si f est dérivable au point x et g est dérivable au point $f(x)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x et vaut :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Soit f et g deux fonctions dérivables au point x définies respectivement sur E_f et E_g.

Opération	Dérivée		
somme	$(f \pm g)'$	$=$	$f' \pm g'$
produit scalaire	$(af)'$	$=$	af' pour $a \in \mathbb{R}$
produit	$(f.g)'$	$=$	$f'.g + g'.f$
fraction	$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$=$	$\frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
	$\left(\frac{1}{g}\right)'$	$=$	$-\frac{g'}{g^2}$
puissance	$(f^a)'$	$=$	$af^{a-1}f'$
	$(\sqrt{f})'$	$=$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
ln	$(\ln(f))'$	$=$	$\frac{f'}{f}$
exp	$(\exp(f))'$	$=$	$f'\exp(f)$

→ même avec le signe "$-$" parce que $(f-g)' = (f+(-g))'$
$= f' + ((-1)\cdot g)'$
$= f' - g'$

$a = -1$

Note : Pour les exercices suivantes, je vais noter

« ↗ » pour « CROISSANTE »

« ↘ » pour « DÉCROISSANTE »

(a) $f(x) = x$

Type : affine (linéaire)
avec $a=1$ et $b=0$

$f'(x) = 1$

$f(x) = ax+b \Rightarrow f'(x) = a$
(ou $= x^a$) (ou $= a x^{a-1}$)

$f'(x) = 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ est $\nearrow$

(b) $f(x) = 2 - 10x$

Type : affine (...)

$(ax+b)' = a$

$\Rightarrow f'(x) = -10.$

$f'(x) = -10 < 0 \Rightarrow f(x)$ est $\searrow$

(c) $f(x) = 4 + 5x$

Type : affine

$f'(x) = 5 > 0 \Rightarrow f$ est $\nearrow$

(d) $f(x) = x^2$

Type : puissance (polynôme)

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$

$f'(x) = 2x$: > 0 pour $x > 0 \Rightarrow f \nearrow$ pour $x>0$; < 0 pour $x < 0 \Rightarrow f \searrow$ pour $x<0$

(e) $f(x) = 2x^2$

Type : puissance

$(a \cdot g)' = a \cdot g'$, $a \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (2x^2)' = 2(x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x$

Monotonie : comme (d).

(f) $f(x) = 1 - x^2$

Type : polynôme

$f'(x) = (1-x^2)' = (1)' - (x^2)' = 0 - 2x$
$= -2x \longrightarrow \begin{cases} >0 & \text{pour } x<0 \\ <0 & \text{pour } x>0 \end{cases}$

Monotonie : $f \nearrow$ pour $x<0$ et $f \searrow$ pour $x>0$

(g) $f(x) = 3x^3 + 5x - 4$

Type : polynôme

$f'(x) = (3x^3+5x-4)' = (3x^3)' + (5x)' - (4)'$
$= 3(x^3)' + 5(x)' - 0$
$= 3 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 = \underbrace{9}_{>0}\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{5}_{>0} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

(h) $f(x) = x^3 - 27x^2 + 144x$

Devoir Maison

(i) $f(x) = 5x^3 - 9x^2 + 1$

Devoir Maison

(j) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Type : fraction

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ ici on a $g(x) = 1+x$

$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{(1+x)'}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$

Donc $f(x) \searrow$ pour tout $x \neq -1$.

(k) $f(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}$

Devoir Maison [voir fichier Groupe 4, 25/11/25]

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$\left(\frac{2x}{(1+x)^2}\right)' = \frac{(2x)' \cdot (1+x)^2 - ((1+x)^2)' \cdot 2x}{((1+x)^2)^2}$

Devoir Maison, mais en utilisant que $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

$\Rightarrow ((1+x)^2)' = (1+2x+x^2)'$
$= 2 + 2x$.

(l) $f(x) = \exp(x^2)$

Type : composition (de exponent. et puissance)

$(\exp(f))' = f' \cdot \exp(f)$

Donc

$f'(x) = (\exp(x^2))' = (x^2)' \cdot \exp(x^2)$
$= 2x \cdot \underbrace{\exp(x^2)}_{>0}$

$f'(x)$ >0 si $x>0$; <0 si $x<0$ $\Rightarrow f$ est $\nearrow$ pour $x>0$; $\searrow$ pour $x<0$

(m) $f(x) = \exp(3x+2)$

Type : composition (exp ∘ affine)

$f'(x) = (3x+2)' \exp(3x+2)$
$= 3 \underbrace{\exp(3x+2)}_{>0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$
$\Rightarrow f$ est $\nearrow$.

(n) $f(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$

Voir la Table ... $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f(x)$ est $\nearrow$.

$x > 0$ est dans la définition de la fonction $f(x) = \ln(x)$

(o) $f(x) = \ln(3x-2)$ pour $x > \frac{2}{3}$

Type : compos. (log ∘ affine)

$$(\ln(g))' = \frac{g'}{g}$$

$$f'(x) = (\ln(3x-2))' = \frac{(3x-2)'}{3x-2} = \frac{3}{3x-2}$$

Puisque $x > \frac{2}{3}$ ($\iff 3x-2>0$), on a $f'(x)$ toujours >0, donc f est ↗.

(q) $f(x) = (x^2+3x+1)^2$

Devoir Maison [voir le fichier Graupe 4, 25/11]

(r) $f(x) = \frac{1}{\exp(1+x)}$

Type : fraction + composition

(fract ∘ exp ∘ affine)

Méthode rapide :

$$f(x) = \exp(-(1+x))$$

$$f'(x) = (\exp(-1-x))' = (-1-x)' \exp(-1-x)$$
$$= (-1)\exp(-1-x)$$
$$= -\frac{1}{\exp(1+x)}.$$

Puisque $\exp(1+x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$, donc f est ↘.

(p) $f(x) = (1+2x)^2$

Type : compos. ("x^2 ∘ $1+2x$")
(mais aussi polynôme)

→ Deux Manières pour calculer $f'(x)$:

1) $f(x) = (1+2x)^2 = 1 + 2\cdot 2x + (2x)^2$
$= 1 + 4x + 2^2 \cdot x^2$
$= 1 + 4x + 4x^2$

$$f'(x) = (1+4x+4x^2)'$$
$$= (1)' + 4(x)' + 4(x^2)'$$
$$= 0 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2x$$
$$= 4 + 8x$$

2) Formule puissance $(g^a)' = a\, g^{a-1} \cdot g'$

$$f'(x) = ((1+2x)^2)' = 2\cdot(1+2x)^1 \cdot (1+2x)'$$
$$= 2\cdot(1+2x)\cdot 2$$
$$= 4(1+2x)$$
$$= 4 + 8x$$

$a = 2$
$g = 1+2x$

Signe de f' [POST TD]

$f'(x) > 0 \iff 4 + 8x > 0$
$\iff 8x > -4$
$\iff x > -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$

Donc

f est ↗ pour $x > -\frac{1}{2}$.
f est ↘ pour $x < -\frac{1}{2}$.