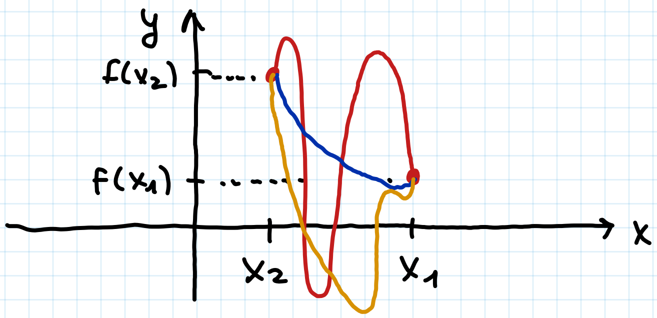
TD L1 AES (Groupe 4) - 25/11/25

PROCHAINE FOIS : QCM (Vendredi 28/11 à 17h)

## 2 Sens de variation d'une fonction

### 2.1 Questions de cours

2. Soit une fonction $f$ définie sur un ensemble $E$. Il existe deux valeurs de $E$, $x_1$ et $x_2$, telles que $x_1 > x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. A partir de cette information, pouvez-vous conclure que la fonction $f$ est positive sur $E$, négative sur $E$, croissante sur $E$, décroissante sur $E$ ou n'avez-vous pas assez d'information pour conclure sur le signe et/ou le sens de variation de $f$ sur $E$?




On peut rien conclure sur le signe et/ou sur le sens de variation.

Au plus on peut dire que f n'est pas (toujours) croissante sur E.

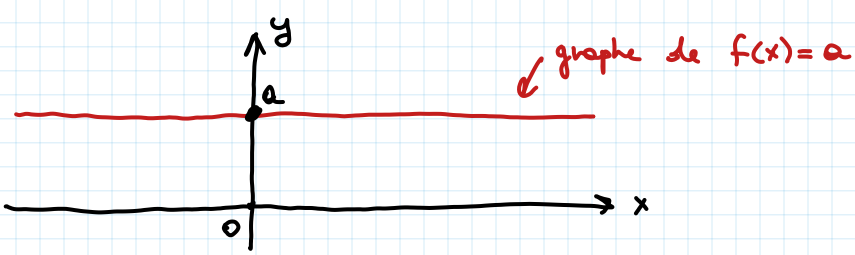
3. Soit une fonction $f$ définie sur un ensemble $E$ telle que $y = f(x)$. Comment fait-on pour déterminer si la fonction $f$ est croissante sur son ensemble de définition?

Si f est dérivable, alors il suffit de vérifier si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

[ Si f n'est pas dérivable, il faut procéder « à la main » en vérifiant que $\forall x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ]

4. Quelle est le type de fonction pour lequel on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Les fonctions constantes $f(x) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ constante fixée

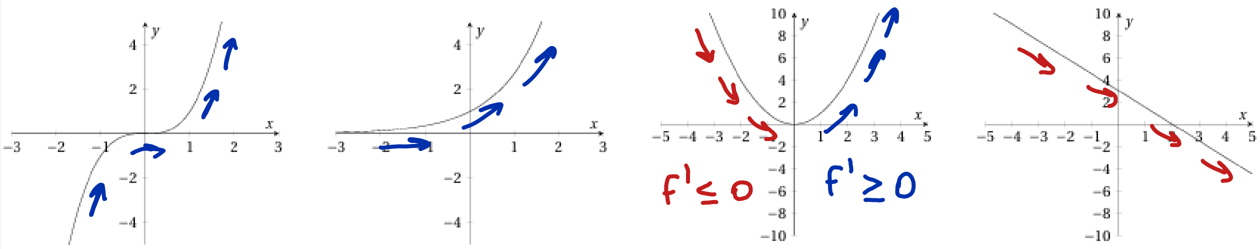


5. Les graphes de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont représentés ci-dessous.

   (a) Quelle(s) fonction(s) est(sont) croissante(s) pour tout $x \in \mathbb{R}$ ? a) et b)

   (b) Quelle(s) fonction(s) est(sont) telle(s) que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ? d) $\Leftrightarrow$ f est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$

Fonction (a) — Fonction (b) — Fonction (c) — Fonction (d)




CROISS. $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

CROISS. $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

CROISS : $x > 0$
DÉCROISS : $x < 0$

DÉCROISS $f'(x) \leq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

### 2.2 Calculs de dérivées et analyse des sens et ampleurs de variation

On s'intéresse à une variable $y$ qui dépend d'une variable $x$. On veut savoir comment évolue $y$ pour de petites variations de $x$. Pour chacune des fonctions suivantes, identifiez le type fonction (constante, affine, puissance, polynôme, composée de fonctions,...), calculez la dérivée première et enfin commentez comment évolue $f(x)$ avec $x$. NB : vous pouvez vous appuyer sur le formulaire fourni en fin d'énoncé.

### 3.5 Formulaire des dérivées

Soit $f$ une fonction dérivable au point $x$.

| Fonction $f$ | Domaine de définition de $f$ | Dérivable sur | Dérivée $f'$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = a$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $f(x) = ax + b$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $a$ |
| $f(x) = x^a$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $ax^{a-1}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $[0;+\infty[$ | $[0;+\infty[$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\ln(x)$ | $]0;+\infty[$ | $]0;+\infty[$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\exp(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\exp(x)$ |

Si $f$ est dérivable au point $x$ et $g$ est dérivable au point $f(x)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en $x$ et vaut :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables au point $x$ définies respectivement sur $E_f$ et $E_g$.

| Opération | Dérivée | | |
|---|---|---|---|
| somme | $(f+g)'$ | = | $f' + g'$ |
| produit scalaire | $(af)'$ | = | $af'$ pour $a \in \mathbb{R}$ |
| produit | $(f.g)'$ | = | $f'.g + g'.f$ |
| fraction | $\left(\frac{f}{g}\right)'$ | = | $\frac{f'.g - f.g'}{g^2}$ |
| | $\left(\frac{1}{g}\right)'$ | = | $-\frac{g'}{g^2}$ |
| puissance | $(f^a)'$ | = | $af^{a-1}f'$ |
| | $(\sqrt{f})'$ | = | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ |
| ln | $(\ln(f))'$ | = | $\frac{f'}{f}$ |
| exp | $(\exp(f))'$ | = | $f'\exp(f)$ |

(a) $f(x) = x$

Type : affine $y = ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 0$

$f'(x) = 1$

$1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est $\underbrace{\text{croissante}}$

Je vais le noter « $\nearrow$ »

(b) $f(x) = 2 - 10x$

Type : affine

$f'(x) = -10$

$-10 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est $\underbrace{\text{décroissante}}$

Je vais le noter « $\searrow$ »

(c) $f(x) = 4 + 5x$

Devoir Maison

(d) $f(x) = x^2$

Type : puissance $\quad \left[ x^{2} - 1 \right]$

$f'(x) = 2\,x^{2-1} = 2x$

$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f \nearrow \text{ si } x > 0 \\ f \searrow \text{ si } x < 0 \end{array}$

(e) $f(x) = 2x^2$

Type : puissance

Produit scalaire

$f'(x) = (2x^2)' = 2\,(x^2)'$
$= 2 \cdot 2x = 4x$

Signe de $f'$ (et monotonie de $f$) : comme d)

(f) $f(x) = 1 - x^2$

Type : polynôme

somme / différence : $(f \pm g)' = f' \pm g'$

$f'(x) = (1 - x^2)' = (1)' - (x^2)' = 0 - 2x = -2x$

$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{pour } x < 0 \\ < 0 & \text{pour } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ est } \begin{cases} \nearrow & \text{pour } x < 0 \\ \searrow & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = 3x^3 + 5x - 4$

Type : Polynôme

$f'(x) = (3x^3 + 5x - 4)' = 3(x^3)' + 5(x)' - (4)'$
$= 3 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 - 0$
$= 9x^2 + 5$

$f'(x) = \underbrace{9}_{>0}\,\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{5}_{>0} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

(h) $f(x) = x^3 - 27x^2 + 144x$

Devoir Maison

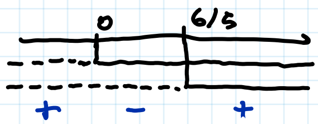
(i) $f(x) = 5x^3 - 9x^2 + 1$

Type : polynôme

$$f'(x) = 5(x^3)' - 9(x^2)' + (1)'$$
$$= 5\cdot 3x^2 - 9\cdot 2x + 0$$
$$= 15x^2 - 18x$$

$$f'(x) = 3x(5x-6) > 0$$

$\iff$



$\iff$ $x<0 \quad \vee \quad x > 6/5$

$f(x)$ est $\nearrow$ si $x<0 \vee x>6/5$

$f(x)$ est $\searrow$ si $0<x<\frac{6}{5}$

(j) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Type : fraction

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{(1+x)'}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Signe de $f'$ : $(1+x)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\Rightarrow f(x)$ est $\searrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$

(k) $f(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}$

Type : fraction

$$\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h'g - hg'}{g^2}$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+2x+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)'\cdot(1+2x+x^2) - (2x)(1+2x+x^2)'}{(1+2x+x^2)^2}$$
$$= \frac{2(1+x)^2 - 2x(2+2x)}{((1+x)^2)^2}$$
$$= \frac{2(1+x)^2 - 4x(1+x)}{(1+x)^4}$$
$$= \frac{\cancel{(1+x)}(2\cdot(1+x) - 4x)}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}}$$
$$= \frac{2(1+x) - 4x}{(1+x)^3} = \frac{2-2x}{(1+x)^3}.$$

continuation

(l) $f(x) = \exp(x^2)$

Type : composition (exp ∘ puissance)

$$(\exp(g))' = g'\cdot\exp(g)$$

$$f'(x) = (\exp(x^2))' = (x^2)'\cdot\exp(x^2)$$
$$= 2x \cdot \underbrace{\exp(x^2)}_{>0}$$

$f'(x) > 0 \iff 2x > 0 \iff x > 0$

$f'(x) < 0 \iff x < 0$

Donc $f \nearrow$ pour $x>0$

$f \searrow$ pour $x<0$

(m) $f(x) = \exp(3x+2)$

Devoir Maison

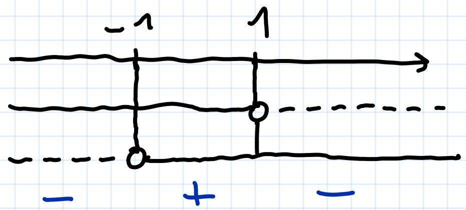
continuation



Signe $f'(x) = \dfrac{2-2x}{(1+x)^3}$

Num : $2-2x > 0 \iff x < 1$

Denom : $(1+x)^3 > 0 \iff x > -1$




$f'(x)$ $> 0$ pour $-1 < x < 1$

$f'(x)$ $< 0$ pour $x < -1 \vee x > 1$

Donc

$f$ " ↗ " pour $-1 < x < 1$

$f$ " ↘ " pour $x < -1 \vee x > 1$

(n) $f(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$

Voir le formulaire ...

(o) $f(x) = \ln(3x-2)$ pour $x > \frac{2}{3}$

Type : compos. ( log ∘ affine )

$$(\ln(g))' = \frac{g'}{g}$$

$$f'(x) = (\ln(3x-2))' = \frac{(3x-2)'}{3x-2} = \frac{3}{3x-2}$$

Puisque $x > \frac{2}{3} \iff 3x-2 > 0$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x > 2/3$

$\Rightarrow f$ est ↗ sur $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

(p) $f(x) = (1+2x)^2$ Devoir Maison (voir (q))

(q) $f(x) = (x^2+3x+1)^2$ Type : compos. ( puiss ∘ poly ) mais aussi polynôme

$(g^a)' = a\,g^{a-1} \cdot g'$

$a = 2$

$g = x^2+3x+1$

$$f'(x) = ((x^2+3x+1)^2)' = 2\,(x^2+3x+1)^1 \cdot (x^2+3x+1)' = 2\,(x^2+3x+1)\cdot(2x+3).$$

Signe de $f$ [POST TD] : il faut étudier le signe de $x^2+3x+1$ et $2x+3$

continuation

continuation



Rappel: $x^2+3x+1=0 \iff x = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ ← racines du polynôme

- $x^2+3x+1 > 0 \iff x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ (plus petite) $\vee$ $x > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ (plus grande)
- $2x+3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$

Noter que
$$\frac{-3-\sqrt{5}}{2} = -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} < -\frac{3}{2}$$

| $\mathbb{R}$ | | $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+3x+1>0$ | ——— | o | - - - | - - - | - - - | o | ——— |
| $2x+3>0$ | - - - | - - - | - - - | o | ——— | ——— | ——— |
| | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| Signe de $f'$: | $f'<0$ | | $f'>0$ | | $f'<0$ | | $f'>0$ |
| Sense de vitesse de $f$: | $f \searrow$ | | $f \nearrow$ | | $f \searrow$ | | $f \nearrow$ |

---

(r) $f(x) = \frac{1}{\exp(1+x)}$ Type : composition (fraction, exp, affine)

Manière plus rapide pour calculer $f'(x)$ : plutôt que utiliser la formule
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2},$$
on peut utiliser les propriétés de exp :
$$f(x) = \frac{1}{\exp(1+x)} = \exp(-(1+x)) = \exp(-1-x)$$

et maintenant : $(\exp(g))' = g' \cdot \exp(g)$

$$f'(x) = (\exp(-1-x))' = \underbrace{(-1-x)'}_{-1} \cdot \exp(-1-x) = -\exp(-1-x) = -\frac{1}{\exp(1+x)}.$$

Signe : $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, car $\exp(x+1) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x)$ est $\searrow$ sur $\mathbb{R}$.

### 2.3 Evolution de la fonction de coûts

Soit une entreprise qui produit un bien. Elle souhaite connaître comment évolue son coût moyen de production en fonction de son volume de production $Q$. On a $Q > 0$ et la fonction de coût total de l'entreprise est $C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 10Q^2 + 100Q$.

1. On rappelle que la fonction de coût moyen, notée $C_M(.)$ est par définition $C_M(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$. Donnez l'expression de la fonction de coût moyen de l'entreprise.
2. Quel est le type de la fonction de coût moyen ?
3. Comment évolue la fonction de coût moyen en fonction du volume de production $Q$ ? Pour répondre à cette question, suivez les étapes suivantes :
   (a) Calculez la dérivée de la fonction de coûts moyen par rapport aux quantités $Q$. Commentez.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $Q$ la dérivée est-elle positive, négatives et nulle ?
   (c) Concluez.

1. $C_M(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{1/3\, Q^3 - 10\,Q^2 + 100\,Q}{Q} = \frac{1}{3}Q^2 - 10\,Q + 100$

2. Fonction polynôme

3. (a) $C'_M(Q) = \frac{1}{3}\cdot 2Q - 10\cdot 1 + 0 = \frac{2}{3}Q - 10$ .

(b) $C'_M(Q) \geq 0 \iff \frac{2}{3}Q - 10 \geq 0 \iff \frac{2}{3}Q \geq 10$

$\iff Q \geq \frac{3}{2}\cdot 10 = 15$

Donc $C_M(Q)$ est
- CROISSANTE pour $Q > 15$
- DÉCROISSANTE pour $0 < Q < 15$

$C'_M(Q) = 0 \iff Q = 15$ (déjà vu : $\frac{2}{3}Q - 10 = 0 \iff Q = 15$)

| $Q$ : | 0 | | 15 | | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'_M$ : | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $C_M$ : | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

Si le volume de production est compris entre 0 et 15, le coût moyen diminue.
Si $Q > 15$, alors le coût moyen augmente.