TD L1 AES (Groupe 2) – 26/11/25

Correction du contrôle continu (du 11/11/25)

1 Pourcentages (5 points)

Temps maximum recommandé : 20 minutes.

On s'intéresse au coût de production et au chiffre d'affaire d'une entreprise. Soit C_t^i le coût de l'input i à la date t, C_t le coût total de production à la date t, CA_t le chiffre d'affaire à la date t et x_t le taux de croissance du chiffre d'affaire entre les dates $t-1$ et t. Répondez aux questions à l'aide du Tableau 1. *Soignez votre rédaction en posant les termes du problème et en donnant les formules avant de passer aux applications numériques.*

Tableau 1 – Coût de production et chiffre d'affaire

		2023	2024
Coûts de production hors TVA	Matières premières		
	Coût de l'input A (C^A)	2,5	2,875
	Coût de l'input B (C^B)	7,5	8,625
	Total du coût des matières premières ($C^{MP} = C^A + C^B$)	10	11,5
	Infrastructure		
	Total des frais d'infrastructure (C^I)	?	10,5
	Total du coût de production ($C = C^{MP} + C^I$)	?	22
Chiffre d'affaire TVA comprise	Chiffre d'affaire (CA)	30	33

Note : Montants en dizaines de milliers d'euros. Valeurs HT pour les coûts et TTC pour le chiffre d'affaire.
Lecture : en 2023 le coût de l'input A était de 25 000 euros.

1. Montrez que l'input A représente 25% du total du coût des matières premières en 2023.
2. Sachant que les matières premières représentent 50% du coût de production total,
   (a) retrouvez la valeur du coût total de production de 2023 qui a été effacée du tableau ;
   (b) calculez la part que représente l'input A dans le coût de production total en 2023.
3. Comment a-t-on calculé que le chiffre d'affaire a augmenté de 10% entre 2023 et 2024 ?
4. Le comptable a appliqué à tort la TVA sur le chiffre d'affaire dans le tableau. L'entreprise a en effet un chiffre d'affaire suffisamment faible pour être exonéré du paiement de la TVA. Quel est le chiffre d'affaire hors taxe qui aurait dû être renseigné pour 2023 (à la place de la valeur 30), sachant que l'entreprise est soumise à un taux de TVA de 20% ?

1. Pourcentage cherché = $P_{C,A}$

$$P_{C,A} = \frac{C^A}{C^{MP}} = \frac{2,5}{10} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\ \%$$

2. (a) $50\ \%\ C = C^{MP}$

coût total

$$C = \frac{C^{MP}}{50\%} = \frac{C^{MP}}{\frac{50}{100}} = \frac{10}{\frac{50}{100}} = \frac{10}{1/2} = 2 \cdot 10 = 20.$$

(b) part représentée par l'input A dans $C = P_{A,C_{TOT}}$

$$P_{A,C_{TOT}} = \frac{C^A}{C} = \frac{2,5}{20} = \frac{25}{200} = \frac{1}{2} \cdot 0,25 = 0,125.$$

$$= 12,5\%$$

3. On est passé de 30 à 33.

Taux de variation

$$30 + x \cdot 30 = 33$$

$$x = \frac{33-30}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%.$$

4. $$CA_{2023}^{\text{Hors TVA}} + \underbrace{\tau_{TVA}}_{20\%} CA_{2023}^{\text{Hors TVA}} = CA_{2023}$$

$$CA_{2023}^{\text{Hors TVA}} (1 + \tau_{TVA}) = CA_{2023}$$

$$CA_{2023}^{\text{Hors TVA}} = \frac{CA_{2023}}{1+\tau_{TVA}} = \frac{30}{1+20\%} = \frac{30}{1+\frac{20}{100}}$$

$$= \frac{30}{1+\frac{2}{10}}$$

$$= \frac{30}{1+\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{5 \cdot 30}{5+1} = \frac{5 \cdot 30}{6} = 5 \cdot 5 = 25.$$

2 Choix des fournisseurs et ensembles (5 points)

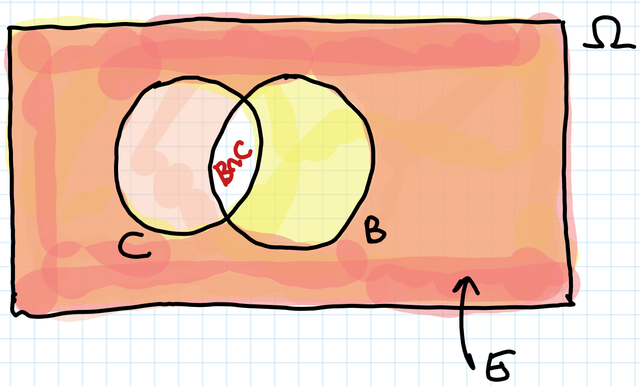
Temps maximum recommandé : 25 minutes.

On s'intéresse à l'univers Ω des exploitations laitières localisées en Normandie. Parmi ces exploitations, on s'intéresse en particulier au sous-ensemble C des exploitations situées dans le Calvados et au sous-ensemble B des exploitations en agriculture biologique. Parmi les 6000 exploitations de l'univers Ω,

— 1000 sont localisées dans le Calvados ; $\leadsto$ $\mathrm{Card}(C) = 1000$
— 2500 sont en agriculture biologique ; $\leadsto$ $\mathrm{Card}(B) = 2500$
— 500 sont à la fois en agriculture biologique et localisées dans le Calvados. $\leadsto$ $\mathrm{Card}(B \cap C) = 500$

1. On s'intéresse d'abord à l'ensemble E constitué des exploitations laitières normandes en agriculture non biologique localisées dans un autre département que le Calvados.
   (a) Représentez cet ensemble sur un diagramme de Venn. *N'oubliez pas de donner une légende à votre diagramme.*
   (b) Utilisez les symboles $\cup$ ou $\cap$ pour exprimer E en fonction de B et de C.
   (c) Quel est le nombre d'exploitations qui appartiennent à l'ensemble E ?
2. On s'intéresse maintenant à l'ensemble $F = B \cap C$.
   (a) A quel type d'exploitation correspond concrètement cet ensemble F ?
   (b) Quelle est la proportion d'exploitations de B qui appartiennent à F ? *Vous pouvez laisser le résultat sous forme de fraction.*

1. (a)



non bio

non Calvados

E : $\cap$ =

(b) $E = \Omega \setminus (B \cup C) = \overline{B \cup C}$

(également $= \overline{B} \cap \overline{C}$)

(c) $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(\overline{B \cup C}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(B \cup C)$

$= \mathrm{Card}(\Omega) - \left(\mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(B \cap C)\right)$

$= \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(B \cap C)$

$= 6000 - 2500 - 1000 + 500$

$= 3000.$

2. (a) ok

(b) $\text{PROPORTION} = \dfrac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(B)} = \dfrac{500}{2500} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$

$= 20\%$

3 Représentation graphique des ensembles (4 points)

Temps maximum recommandé : 20 minutes.

Soit une entreprise qui produit un bien à partir de 2 types d'input, X et Y. On note x la quantité d'input X utilisée et y la quantité d'input Y utilisée, avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. L'entreprise a une technologie qui fait que si elle utilise x unités d'input X et y unités d'input Y, elle peut produire au maximum $Q = 2x + 5y$ unités de bien. On cherche à déterminer l'ensemble des combinaisons d'inputs (x, y) que l'entreprise peut utiliser pour produire 100 unités de bien. On pose donc $Q = 100$ dans la suite de cet exercice.

1. La combinaison $(x, y) = (0, 20)$ permet de produire 100 unités de bien. Donnez deux autres exemples de combinaisons que l'entreprise peut utiliser pour produire 100 unités de biens.
2. Montrez que toutes les combinaisons d'inputs (x, y) qui permettent de produire 100 unités de bien vérifient l'équation $y = 20 - \frac{2}{5}x$.
3. Donnez, à l'aide de la notation des ensembles, l'expression de l'ensemble des combinaisons d'inputs (x, y) que l'entreprise peut utiliser pour produire 100 unités de biens. On appelle cet ensemble F. Autrement dit, indiquez ce qu'il faut écrire entre accolades dans $F = \{\}$.

1. $2x + 5y = 100$

Par exemple : $y = 0 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50$

$(50, 0)$

$y = 2 \Rightarrow 2x = 100 - 5y = 100 - 10 = 90$

$\Rightarrow x = \dfrac{90}{2} = 45$

$(45, 2)$

2. On veut montrer que $2x + 5y = 100 \iff y = 20 - \frac{2}{5}x$

$$2x + 5y = 100 \iff 5y = 100 - 2x$$

$$\iff y = \frac{100 - 2x}{5} = \frac{100}{5} - \frac{2}{5}x = 20 - \frac{2}{5}x.$$

3. $F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 2x + 5y = 100 \}$

$x \geq 0$
$y \geq 0$

ou également

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y = 20 - \frac{2}{5}x \}$

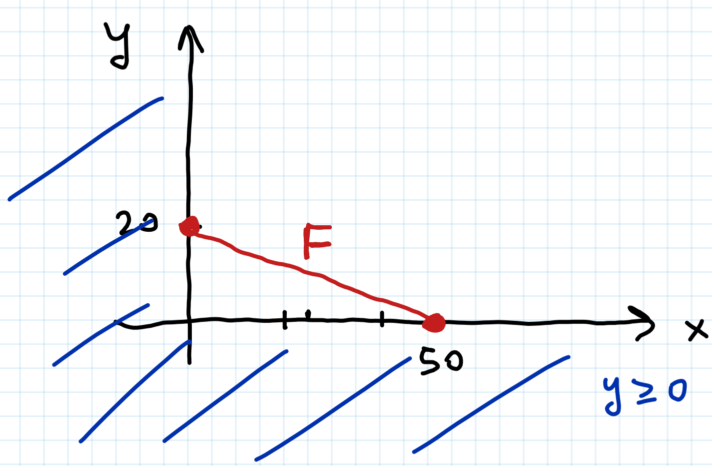
4. Représentez l'ensemble F dans le plan (x, y).

BONUS Donnez l'expression de l'ensemble des combinaisons d'inputs (x, y) qui permettent de produire strictement moins que 100 unités de biens et représentez cet ensemble sur le graphique tracé à la question précédente.

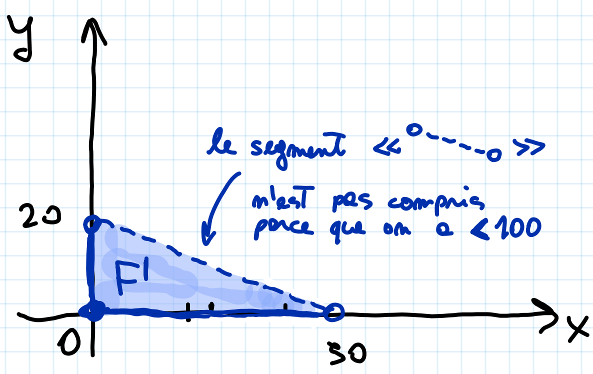
4. $2x + 5y = 100$ représente une droite sur le plan (x, y).

Il suffit d'avoir deux points pour le dessiner.

On a déjà deux points (trois) : $(0, 20)$, $(50, 0)$



BONUS : $F' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 2x + 5y < 100 \}$



Point test :

• $(0,0) \in F'$

parce que $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 < 100$

4 Manipulation d'expressions à une inconnue (4 points)

Temps maximum recommandé : 20 minutes.

1. Développez l'expression $(3x-2)^2$.
2. Manipulez les expressions suivantes pour obtenir des expressions de la forme "x=...". *Veillez à soigner la rédaction.*
   (a) $2x - 3 = 6x + 3$ *(laissez le résultat sous forme de fraction).*
   (b) $\dfrac{3(x+1)(2x-1)}{2x} = 3(x-1)$ avec $x \neq 0$.

1. Rappel : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2$$
$$= 3^2 \cdot x^2 - 12x + 4$$
$$= 9x^2 - 12x + 4$$

2. (a)

$$2x - 3 = 6x + 3 \iff -3 = 6x - 2x + 3$$
$$\iff -3 - 3 = 6x - 2x$$
$$\iff -6 = 4x$$
$$\iff x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

(b) $\dfrac{3(x+1)(2x-1)}{2x} = 3(x-1)$ avec $x \neq 0$

Multiplier par $2x$ $\Updownarrow x \neq 0$

$$3(x+1)(2x-1) = 2x \cdot 3(x-1)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & 3(\underline{2x^2-x}+\underline{2x-1}) = 6x(x-1)\\
\Leftrightarrow\ & 3(2x^2+x-1) = 6(x^2-x)\\
\Leftrightarrow\ & \cancel{6x^2}+3x-3 = \cancel{6x^2}-6x\\
\Leftrightarrow\ & 6x+3x-3 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 9x-3 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 9x = 3\\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

5 Questions de cours de cours sur les fonctions (2 points)

Temps maximum recommandé : 5 minutes.

1. Soit une fonction f continue et deux fois dérivable sur son ensemble de définition E. Comment détermine-t-on si f est croissante sur E ?

2. Quelles sont les caractéristiques de la fonction exponentielle ?

1. Puisque f est dérivable (au moins une fois), il suffit de vérifier que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

2. $f(x) = \exp(x)$ est
- POSITIVE
- CROISSANTE
- CONVEXE
- $f'(x) = f(x)$ [et elle est la seule t.q. $f(1) = e$].
- INJECTIVE
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors NON SURJ. (Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, alors SURJECTIVE.)