TD L1 AES (Groupe 3) – 28/11/25

2.3 Evolution de la fonction de coûts

Soit une entreprise qui produit un bien. Elle souhaite connaître comment évolue son coût moyen de production en fonction de son volume de production Q. On a $Q > 0$ et la fonction de coût total de l'entreprise est $C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 10Q^2 + 100Q$.

(*)

1. On rappelle que la fonction de coût moyen, notée $C_M(.)$ est par définition $C_M(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$. Donnez l'expression de la fonction de coût moyen de l'entreprise.
2. Quel est le type de la fonction de coût moyen ?
3. Comment évolue la fonction de coût moyen en fonction du volume de production Q ? Pour répondre à cette question, suivez les étapes suivantes :
   (a) Calculez la dérivée de la fonction de coûts moyen par rapport aux quantités Q. Commentez.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de Q la dérivée est-elle positive, négatives et nulle ?
   (c) Concluez.

(*) Note. N'oubliez pas de prendre en compte cette condition lors de la résolution du problème !

1. $$C_M(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{\frac{1}{3}Q^3 - 10Q^2 + 100Q}{Q}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}Q^3}{Q} - \frac{10Q^2}{Q} + \frac{100Q}{Q}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\cancel{Q^3}^{\,2}}{\cancel{Q}} - 10\frac{\cancel{Q^2}}{\cancel{Q}} + 100\frac{\cancel{Q}}{\cancel{Q}}$$

$$= \frac{1}{3}Q^2 - 10Q + 100.$$

2. Polynôme (de degré 2)

3. (a) $C_M'(Q) = \frac{2}{3}Q - 10 + 0$ → Rappel: $(aX^n)' = n \cdot a\, X^{n-1}$

$= \frac{2}{3}Q - 10.$

(b) Signe de $C_M'(Q)$.

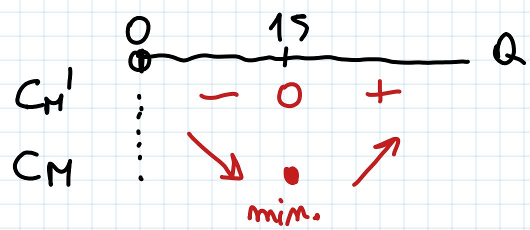
$C_M'(Q) \geq 0 \iff \frac{2}{3}Q - 10 \geq 0 \iff \frac{2}{3}Q \geq 10 \iff Q \geq \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$

$\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$

Donc $C_M'(Q)$ est $\begin{cases} > 0, & \text{si } Q > 15 \\ = 0, & \text{si } Q = 15 \\ < 0, & \text{si } \overset{(*)}{0 <} Q < 15 \end{cases}$

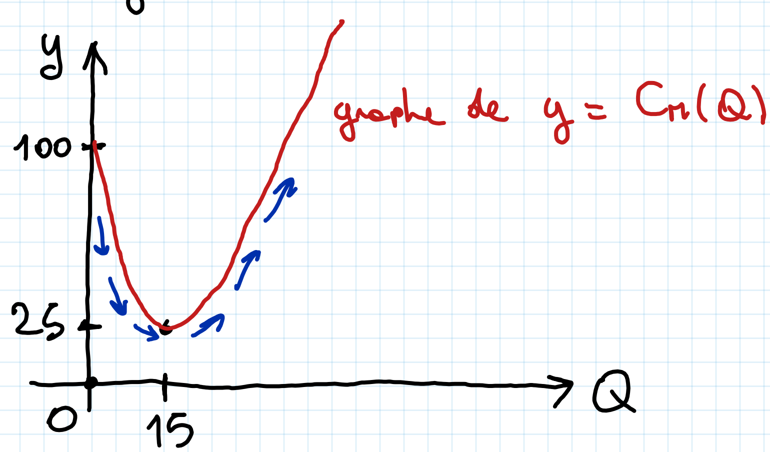
Donc $C_M(Q)$ est CROISSANTE pour $Q \geq 15$
DÉCROISSANTE pour $0 < Q \leq 15$

en $Q = 15$, $C_M(Q)$ a un minimum. ↳ déduit du signe de C_M' : (↘ . ↗)



Pas nécessaire

En effet, le graphe de $C_M(Q)$ est :



3 Vitesse de variation et extrema

3.1 Questions de cours

1. Soit une fonction f définie sur un ensemble E telle que $y = f(x)$. Comment fait-on pour déterminer si la fonction f est concave sur son ensemble de définition ?

Si la fonction est dérivable deux fois sur E, donc il faut vérifier que $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$.

Rappel.
CONCAVE : $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$;
CONVEXE : $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$;
LINÉAIRE : "CONC + CONV" $f''(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

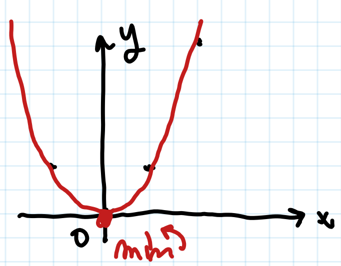
2. Soit une fonction f définie sur un ensemble E. Comment fait-on pour déterminer sur la fonction f admet un minimum en un point $x_0 \in E$?

Si f est dérivable deux fois, alors il faut vérifier que

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 & \text{possibilité max / min} \\ f''(x_0) > 0 & \text{min} \end{cases}$$

→ Comment se rappeler si $f''(x_0) > 0$ min ou max ?

Exo. $f(x) = x^2$



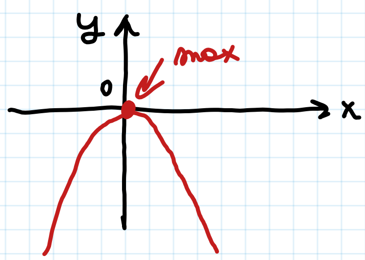
$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0$

$x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 \\ f''(x_0) = f''(0) = 2 > 0. \end{cases}$

si $f'(x_0) = 0$, alors
« $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min »

$f(x) = -x^2$



$f'(x) = -2x$

$f''(x) = -2$

Pour $x_0 = 0$ on a

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = -2 < 0 \end{cases}$$

si $f'(x_0) = 0$, alors
« $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max »

3.3 Evolution de la fonction de coûts

Reprenez la fonction de coût étudiées dans l'exercice 2.3. Pour quel volume de production le coût moyen est-il minimal ?

Dans l'exercice 2.3, on a trouvé $C_M'(Q) = \frac{2}{3}Q - 10$.

Donc

$$C_M''(Q) = \frac{2}{3} \quad \text{constante } (>0)$$

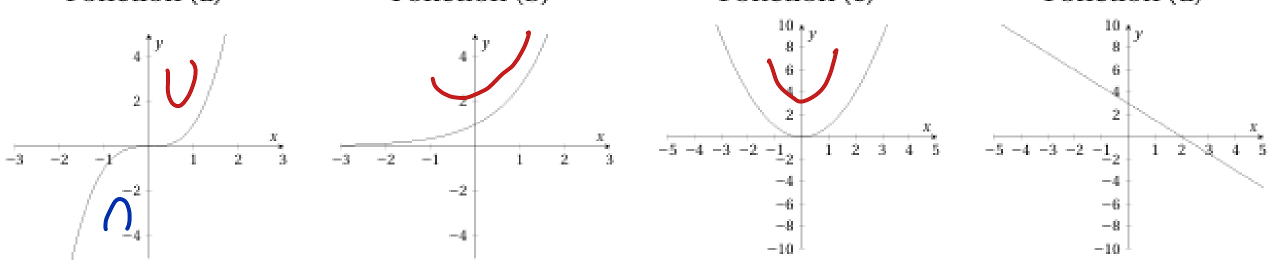
Donc pour $Q = 15$, on a $\begin{cases} C_M'(15) = 0 \\ C_M''(15) = \frac{2}{3} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $Q = 15$ est un point de MINIMUM.

déduit sans étudier le signe de $C_M'(Q)$.

3. Les graphes de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont représentés ci-dessous. Répondez aux questions suivantes :
   (a) Quelle(s) est (ou sont) la (ou les) fonction(s) convexe(s) pour tout $x \in \mathbb{R}$? b), c)
   (b) Quelle(s) est (ou sont) la (ou les) fonction(s) telle(s) que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? (strictement) $\Leftrightarrow$ CONVEXE b), c)
   (c) Quelle(s) est (ou sont) la (ou les) fonction(s) telle(s) que $f''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\Leftrightarrow$ LINÉAIRE d)

Fonction (a) Fonction (b) Fonction (c) Fonction (d)



CONVEXE pour $x \geq 0$ CONCAVE pour $x \leq 0$	CONVEXE $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$	CONVEXE $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$	LINÉAIRE $f''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) \begin{cases} \geq 0, & x \geq 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$$

3.2 Calculs de dérivées secondes et analyse des vitesses de variation

Reprenez les fonctions de l'exercice 2.2. Dérivez une seconde fois les fonctions pour calculer les dérivées secondes des fonctions. Commentez comment évolue $y = f(x)$ avec x.

(a) $f(x) = x$; $f'(x) = 1$

$f''(x) = (1)' = 0$

$\rightsquigarrow$ $f(x)$ linéaire (affine)

(b) $f(x) = 2 - 10x$; $f'(x) = -10$

$f''(x) = (-10)' = 0$

$\rightarrow$ $f(x)$ linéaire (affine)

(c) $f(x) = 4 + 5x$; $f'(x) = 5$

$f''(x) = (5)' = 0$

$\rightsquigarrow$ $f(x)$ linéaire (affine)

(d) $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$

$f''(x) = (2x)' = 2.$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ $\rightsquigarrow$ f convexe.

De (e) à (r) : exercices pour vous !

[Pour les solutions, voir « RESSOURCES SUPPLÉMENTAIRES », à venir sur ma page personnelle.]

CONSEIL : Voir aussi le fichier du Groupe 4 du même jour (28/11/25) dans la partie concernant les POINTS D'INFLEXION (et même l'interprétation géométrique de la dérivée seconde).

2.4 Evolution de la fonction de profit

Soit une entreprise qui fabrique un produit donné. On note Q la quantité produite exprimée en milliers d'unités. On suppose que la technologie de l'entreprise ne lui permet que de produire au maximum 10 000 unités (donc $Q_{max} = 10$). Le coût total de production est $C(Q) = Q^3 - 16Q^2 + 20Q$. La fonction de prix à laquelle l'entreprise est confrontée est $P(Q) = 20 - 10Q$. L'entreprise veut connaître le niveau de production qui maximise son profit. Pour cela il nous faut déterminer comment évolue le profit de l'entreprise en fonction de ses quantités vendues.

1. On rappelle que le profit est la différence entre la recette totale et le coût total, c'est-à-dire que $\Pi(Q) = P(Q) \times Q - C(Q)$. Montrez que la fonction de profit $\Pi(Q)$ s'écrit $\Pi(Q) = -Q^3 + 6Q^2$.
2. Calculez la dérivée de la fonction de profit par rapport à Q. On note $\Pi'(Q)$ cette dérivée.
3. Pour quelle valeur de Q a-t-on $\Pi'(Q) = 0$?
4. Pour quelles valeurs de Q le profit est-il croissant et pour quelles valeurs de Q le profit est-il décroissant?
5. Complétez le tableau de variation de la fonction de profit Π :

1.
$$\Pi(Q) = P(Q) \cdot Q - C(Q)$$
$$= (20 - 10Q) \cdot Q - (Q^3 - 16Q^2 + 20Q)$$
$$= \cancel{20Q} - 10Q^2 - Q^3 + 16Q^2 - \cancel{20Q}$$
$$= -Q^3 + 6Q^2.$$

2.
$$\Pi'(Q) = -3Q^2 + 6 \cdot 2Q = -3Q^2 + 12Q.$$

3.
$$\Pi'(Q) = 0 \iff -3Q^2 + 12Q = 0$$
$$\iff Q(-3Q + 12) = 0$$
$$\iff Q = 0 \quad \text{ou} \quad -3Q + 12 = 0$$
$$3Q = 12$$
$$\iff \underbrace{Q = 0}_{} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{12}{3} = 4.$$

pas important pour le problème concret

parce que Q est la quantité...

4. Sens de variation de $\Pi(Q)$.

$$\pi'(Q) = -3Q^2 + 12Q = Q(-3Q+12)$$

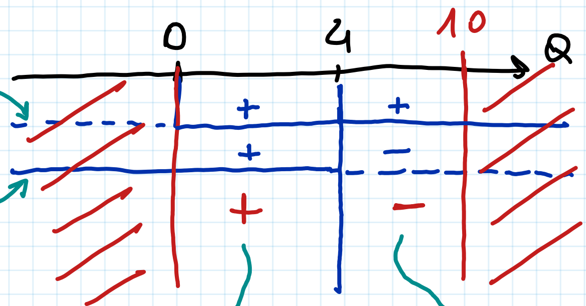
Signe de $\pi'(Q)$: étude du signe des facteurs Q et $-3Q+12$.

Rappel : si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a \cdot b > 0 \iff$ ou $a>0$ et $b>0$ / $a<0$ et $b<0$

$Q > 0$

$\underbrace{-3Q+12>0}$

$\iff Q < \frac{12}{3} = 4$



Rappel : $Q_{max} = 10$.

Rappel : $\underbrace{Q \geq 0}$

Q quantité produite...

$\pi'(Q) = Q(-3Q+12) \geq 0$ $\pi'(Q) = Q(-3Q+12) \leq 0$

Donc $\pi(Q)$ est $\begin{cases} \text{CROISSANTE, pour } 0 \leq Q \leq 4 \\ \text{DÉCROISSANTE, pour } 4 \leq Q \leq 10 \end{cases}$

limites données par le problème concret !

Tableau de variations :

Q	0		4		10
$\pi'(Q)$		+	0	−	
$\pi(Q)$		↗	max	↘	

Grâce au signe de $\pi'(Q)$, on peut déduire que $Q=4$ est un point de max (↗•↘).

3.4 Evolution de la fonction de profit

Reprenez la fonction de coût étudiées dans l'exercice 2.4. Compléter le tableau de variation en identifiant pour quel volume de production le profit est maximal.

$$\pi''(Q) = (-3Q^2+12)' = -6Q$$

Puisque $Q \geq 0$, on a $\pi''(Q) \leq 0$ et donc π est CONCAVE.

	0		4		10
π'		+	0	−	
π''		−		−	
π		↗	max	↘	

$0 \leq Q \leq 4$ π concave croissante

$4 \leq Q \leq 10$ π concave décroissante

$\pi''(4) = -6 \cdot 4 = -24 < 0$

On a RE-trouvé que $Q=4$ est un point de max.