TD L1 AES (Groupe 4) – 28/11/25

3 Vitesse de variation et extrema

3.1 Questions de cours

1. Soit une fonction f définie sur un ensemble E telle que $y = f(x)$. Comment fait-on pour déterminer si la fonction f est concave sur son ensemble de définition ?

Si f est dérivable deux fois, alors il suffit de vérifier que

$f''(x) \leq 0$ sur E.

$\forall x \in E$

2. Soit une fonction f définie sur un ensemble E. Comment fait-on pour déterminer sur la fonction f admet un minimum en un point $x_0 \in E$?

Si f est dérivable (deux fois), il suffit de vérifier que

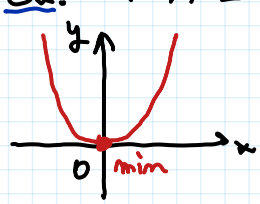
$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

x_0 est un probable pt de max/min

minimum

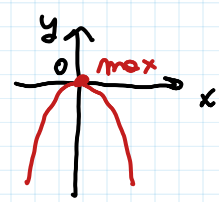
Comment se rappeler si $f''(x_0) > 0$ ou $f''(x_0) < 0$ pour max/min ?

Ex. $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$



$x_0 = 0$: $\begin{cases} f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 \\ f''(0) = 2 > 0 \end{cases}$

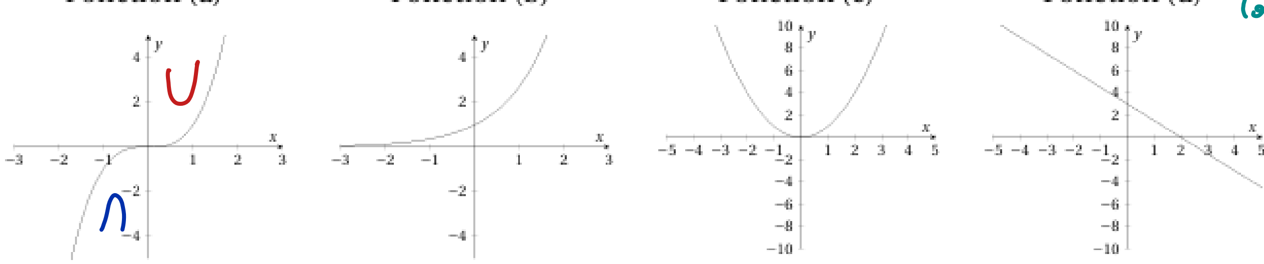
$f(x) = -x^2$ $\quad f'(x) = -2x$, $f''(x) = -2$



$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = -2 < 0 \end{cases}$

3. Les graphes de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont représentés ci-dessous. Répondez aux questions suivantes :
   (a) Quelle(s) est (ou sont) la (ou les) fonction(s) convexe(s) pour tout $x \in \mathbb{R}$? b), c)
   (b) Quelle(s) est (ou sont) la (ou les) fonction(s) telle(s) que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? b), c) $\Rightarrow f$ convexe $\forall x \in \mathbb{R}$
   (c) Quelle(s) est (ou sont) la (ou les) fonction(s) telle(s) que $f''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: d) $\Rightarrow f$ affine (ou linéaire) sur $\mathbb{R}$

Fonction (a) Fonction (b) Fonction (c) Fonction (d)



3.2 Calculs de dérivées secondes et analyse des vitesses de variation

Reprenez les fonctions de l'exercice 2.2. Dérivez une seconde fois les fonctions pour calculer les dérivées secondes des fonctions. Commentez comment évolue $y = f(x)$ avec x.

Pour vous !

[Pour les solutions, voir « RESSOURCES SUPPLÉMENTAIRES », à venir sur ma page personnelle.]

2.4 Evolution de la fonction de profit

$Q \geq 0$

Soit une entreprise qui fabrique un produit donné. On note Q la quantité produite exprimée en milliers d'unités. On suppose que la technologie de l'entreprise ne lui permet que de produire au maximum 10 000 unités (donc $Q_{max} = 10$). Le coût total de production est $C(Q) = Q^3 - 16Q^2 + 20Q$. La fonction de prix à laquelle l'entreprise est confrontée est $P(Q) = 20 - 10Q$. L'entreprise veut connaître le niveau de production qui maximise son profit. Pour cela il nous faut déterminer comment évolue le profit de l'entreprise en fonction de ses quantités vendues.

1. On rappelle que le profit est la différence entre la recette totale et le coût total, c'est-à-dire que $\Pi(Q) = P(Q) \times Q - C(Q)$. Montrez que la fonction de profit $\Pi(Q)$ s'écrit $\Pi(Q) = -Q^3 + 6Q^2$.

2. Calculez la dérivée de la fonction de profit par rapport à Q. On note $\Pi'(Q)$ cette dérivée.

3. Pour quelle valeur de Q a-t-on $\Pi'(Q) = 0$?

4. Pour quelles valeurs de Q le profit est-il croissant et pour quelles valeurs de Q le profit est-il décroissant ?

5. Complétez le tableau de variation de la fonction de profit Π :

$Q \Pi'(Q) \Pi(Q)$

1.
$$\begin{aligned}
\Pi(Q) &= P(Q) \cdot Q - C(Q) \\
&= (20 - 10Q) \cdot Q - (Q^3 - 16Q^2 + 20Q) \\
&= \cancel{20 \cdot Q} - 10 \cdot Q^2 - Q^3 + 16Q^2 - \cancel{20Q} \\
&= -Q^3 - 10Q^2 + 16Q^2 \\
&= -Q^3 + 6Q^2.
\end{aligned}$$

2. $\Pi'(Q) = (-Q^3 + 6Q^2)' = -3Q^2 + 2\cdot 6Q$

$= -3Q^2 + 12Q$

3. $\Pi'(Q) = 0 \iff -3Q^2 + 12Q = 0$

$\iff Q(-3Q+12) = 0$

$\iff Q = 0$ ou $-3Q + 12 = 0$ — $3Q = 12$

$\iff Q = 0$ ou $Q = \frac{12}{3} = 4.$

4. Π croissante pour les valeurs de Q telles que $\Pi'(Q) \geq 0$:

$\Pi'(Q) \geq 0 \iff -3Q^2 + 12Q \geq 0$

$\iff Q(-3Q+12) \geq 0$

$Q \geq 0$

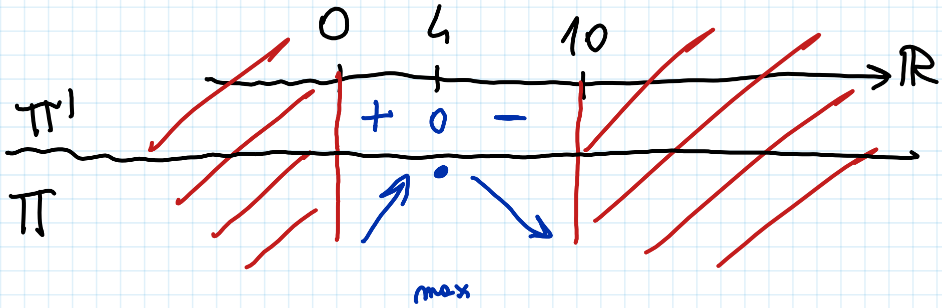
$\iff -3Q + 12 \geq 0$ (ou $Q = 0$)

$\iff 3Q \leq 12$

$\iff 0 \leq Q \leq 4$

$$\Pi'(Q) \text{ est } \begin{cases} > 0 & \text{pour } 0 < Q < 4 \\ = 0 & \text{pour } Q = 0 \text{ ou } Q = 4 \\ < 0 & \text{pour } 4 < Q \leq 10 = Q_{max} \end{cases}$$

Condition donnée par le problème !



On a déduit que $Q = 4$ est un point de max (en regardant le signe de la dérivée $\left[\ \Pi(0) \nearrow \Pi(4) \searrow \Pi(10) \longrightarrow\right.$ forcem. un point de max ! $\left.\right]$).

La valeur maximale du profit Π est donc :

$$\Pi(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = -64 + 96 = 32.$$

Pour le déduire, on pouvait également utiliser la dérivée seconde :

3.4 Evolution de la fonction de profit

Reprenez la fonction de coût étudiées dans l'exercice 2.4. Compléter le tableau de variation en identifiant pour quel volume de production le profit est maximal.

$Q = 4$

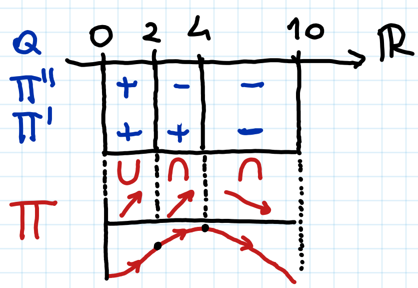
$$\Pi''(Q) = \left(-3Q^2 + 12Q\right)' = -6Q + 12$$

$$\Pi''(4) = -6 \cdot 4 + 12 = -24 + 12 = -12 < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi''(4) < 0 \\ \text{et } \Pi'(4) = 0 \end{array}\right\} \ Q = 4 \text{ est un point de maximum}$$

On note que : $\Pi''(Q) \geq 0 \iff -6Q + 12 \geq 0 \iff Q \leq \frac{12}{6} = 2.$

Donc $\Pi(Q)$ est $\begin{cases} \text{CONVEXE} & \text{pour } 0 \leq Q \leq 2 \\ \text{CONCAVE} & \text{pour } 2 \leq Q \leq 10 \end{cases}$

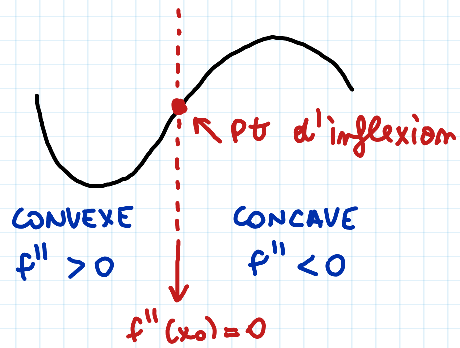


CONSIDÉRATIONS SUPPLÉMENTAIRES

Rappel : Un point $x_0 \in E$ est un POINT D'INFLEXION pour une fonction f (définie sur E et dérivable deux fois) si

$$f''(x_0) = 0.$$

Un point d'inflexion peut déterminer un changement de concavité :



Ex. On reprend la fonction $\Pi(Q)$ de l'exercice 2.4 :

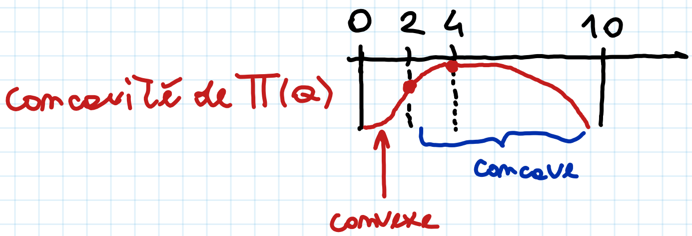
$\Pi(Q) = -Q^3 + 6Q^2$.

Points d'inflexions ? [Déjà vu, mais quand-même...]

→ On a vu que $\Pi''(Q) = -6Q + 12$, donc

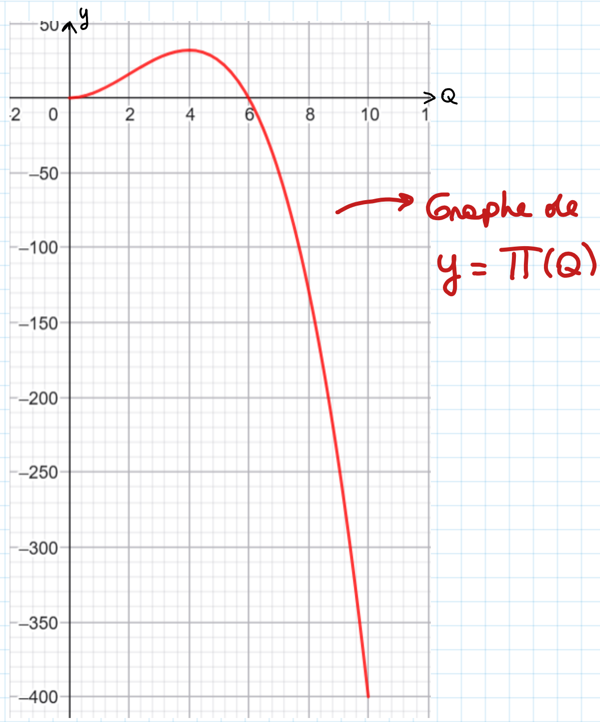
$\Pi''(Q) = 0 \iff -6Q + 12 = 0 \iff Q = \frac{12}{6} = 2$

⇝ $Q = 2$ est un POINT D'INFLEXION pour $\Pi(Q)$.

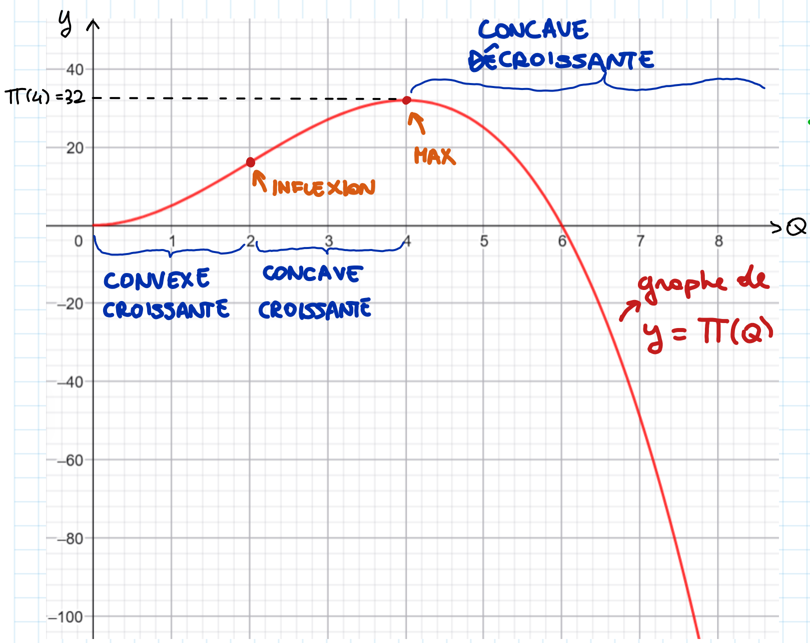


En effet, si on trace le graphe de Π (en utilisant un software), on trouve

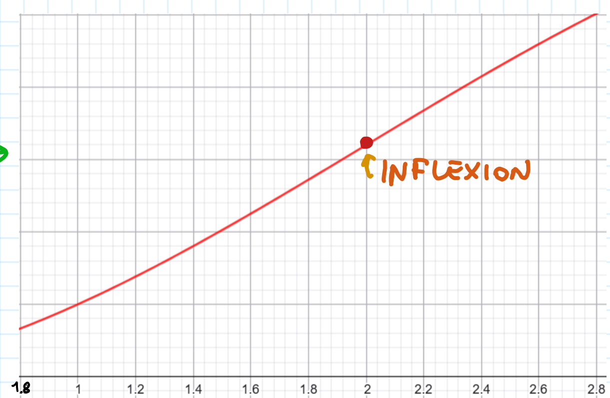
ici "GeoGebra"



Maintenant, allons examiner « de plus près » le graphe de $\Pi(Q)$:



« zoom »



En « zoomant fortement », autour du POINT D'INFLEXION ($\Pi''(2)=0$), la fonction SEMBLE avoir une « tendance LINÉAIRE ».

Rappel : si $f''(x)=0$ POUR TOUT $x \in$ Domaine de f alors f est linéaire (affine).

Ici $\Pi(Q)$ n'est pas linéaire, mais "autour du $Q=2$" "ressemble à une fonction linéaire".

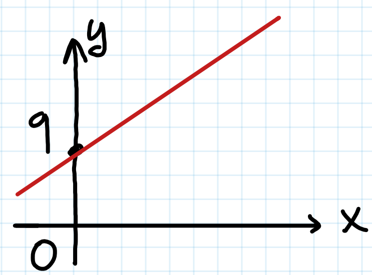
INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE de la DÉRIVÉE SECONDE

[à l'aide du software "GeoGebra"]

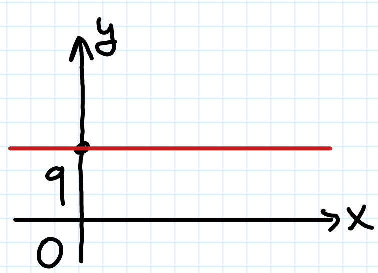
Note. Dans cette dernière partie, j'ai essayé de résumer de manière « statique » ce que nous avons vu de façon « dynamique » à la fin de ce TD.

Rappel. $y = \underbrace{m}_{\text{coeff. directeur}} x + q$ → représente une droite sur le plan (x, y)

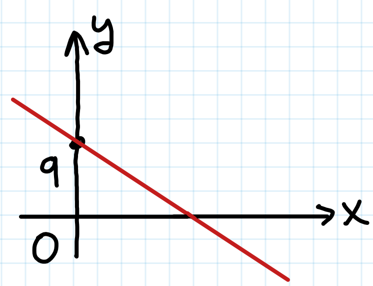
$m > 0 \Rightarrow$ droite « croissante »



$m = 0 \Rightarrow$ droite « constante »

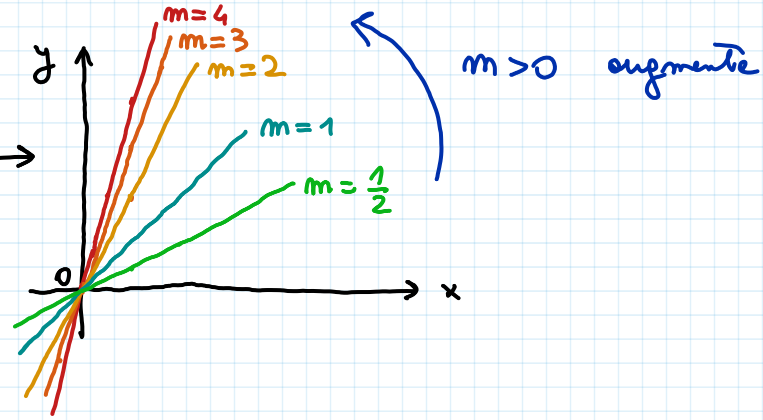


$m < 0 \Rightarrow$ droite « décroissante »



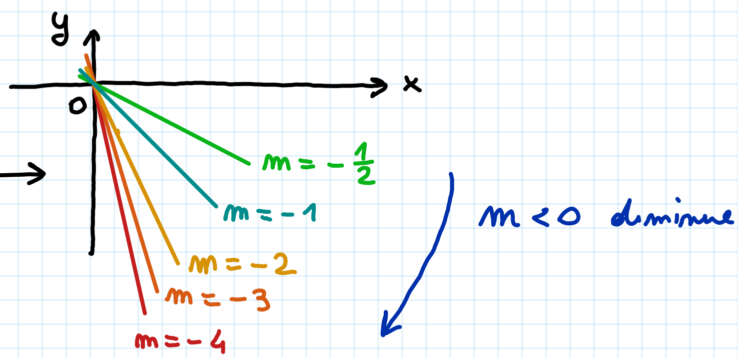
Ensuite, si $m > 0$ augmente, la "pente" de la droite diminue :

(Ici $q=0$) $y = mx$



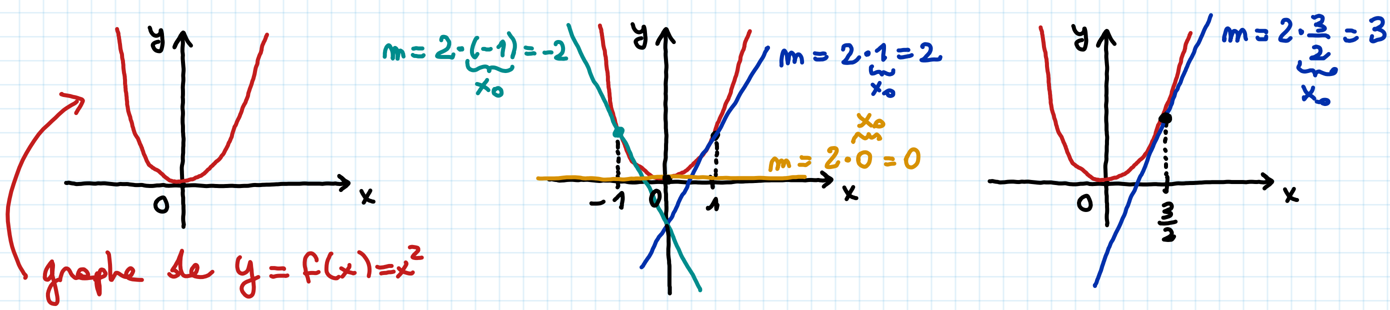
ET contrairement

(Ici $q=0$) $y = mx$



RAPPEL. Si f est une fonction dérivable, alors $f'(x_0)$ est le COEFF. DIRECTEUR de la DROITE TANGENTE au graphe de f en x_0.

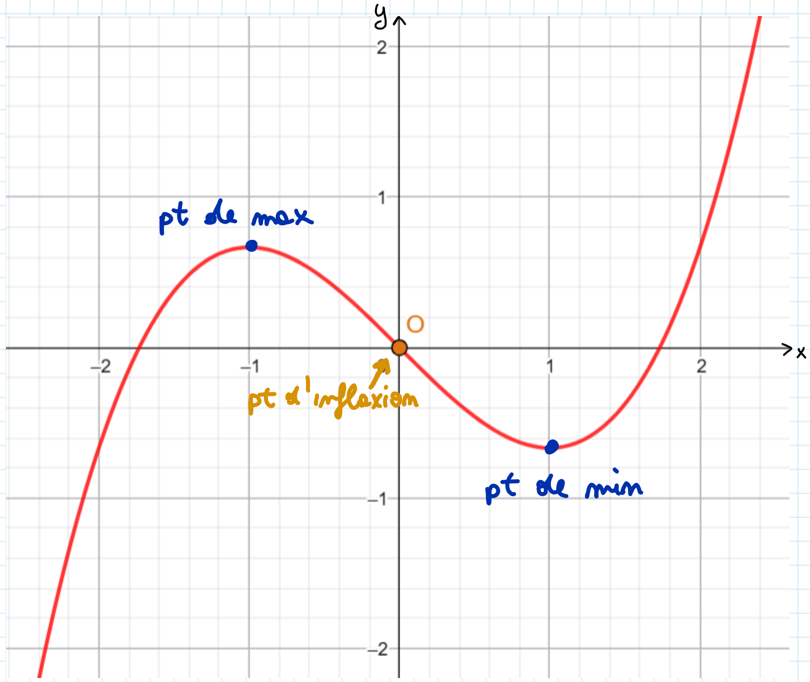
Ex. $f(x) = x^2$ $\qquad f'(x) = 2x$



Maintenant on va donné une interprétation géométrique de la dérivée seconde en regardant un exemple concret :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

Le graphe de f est :



Exercice (pour vous !) 1) Montrer que $f(x)$ admet :

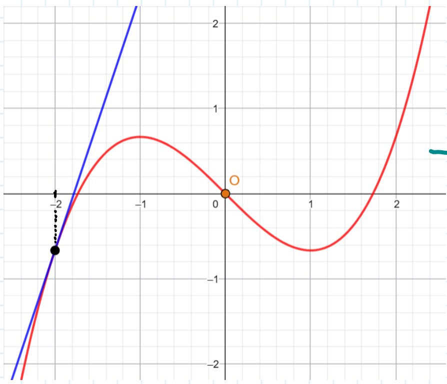
- un point de maximum pour $x = -1$
- un point de minimum pour $x = 1$
- un point d'inflexion pour $x = 0$

et donner le tableau de variation de f, puis discuter la concavité de f.

2) Vérifiez que vos résultats sont cohérents avec le graphe ci-dessus.

Notons que pour $x<0$, $f(x)$ est CONCAVE : le graphe se situe toujours en dessous des droites tangentes et les coeff. directeurs diminuent :

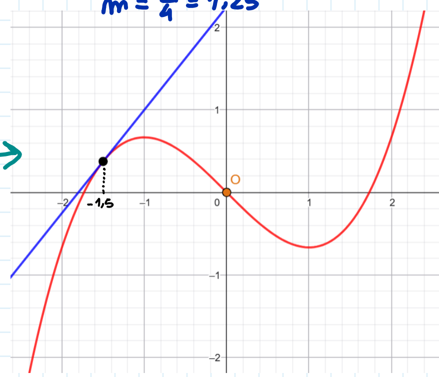
$m=3$



$x_0=-2$

$f'(-2)=3$

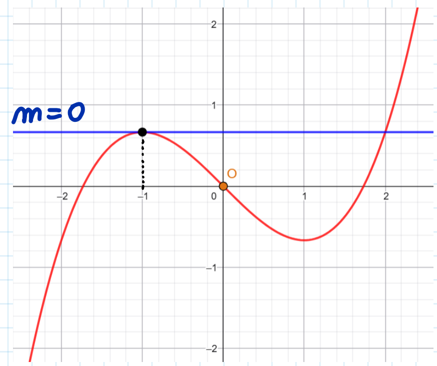
$m=\frac{5}{4}=1{,}25$



$x_0=-\frac{3}{2}=-1{,}5$

$f'(-3/2)=5/4=1{,}25$

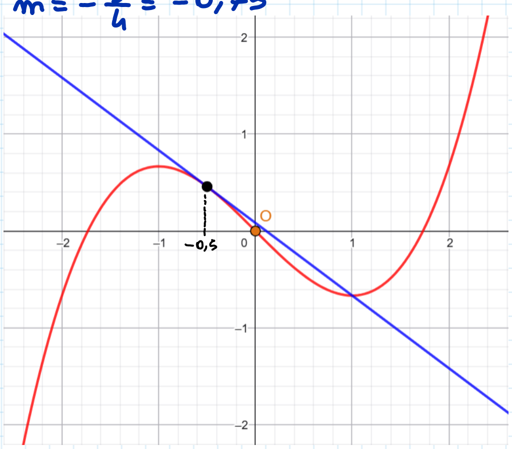
$m=0$



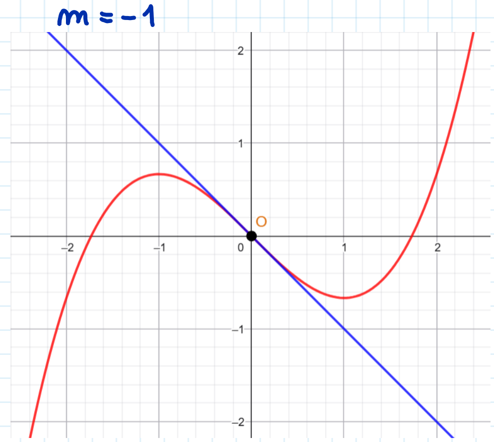
$x_0=-1$

$f'(-1)=0$

$m=-\frac{3}{4}=-0{,}75$



$m=-1$



Pour $x<0$ $\underbrace{\text{coeffic. directeur}}_{f'(x)}$ de la droite tangente $\underbrace{\text{diminue}}_{\text{est décroissante}}$.

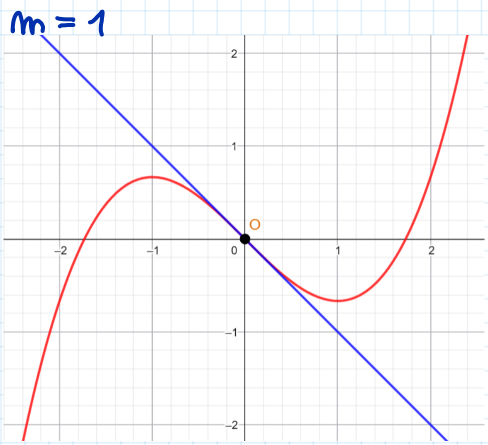
Traduction

$f'(x)$ décroissante pour $x<0$ $\iff$ sa dérivée est negative pour $x<0$

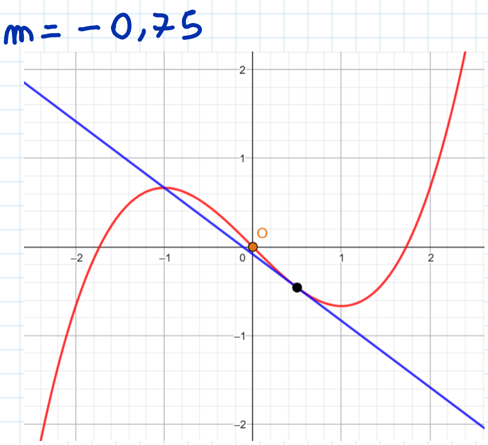
$$(f'(x))' = f''(x) < 0$$

Voici "pourquoi" f CONCAVE $\iff$ f'' negative.

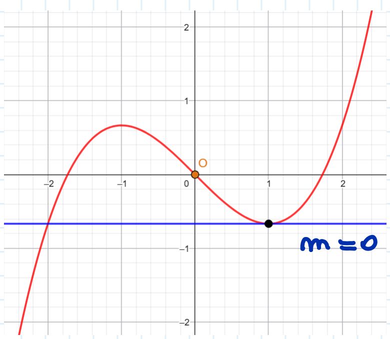
En $x = 0$ on a un point d'inflexion :

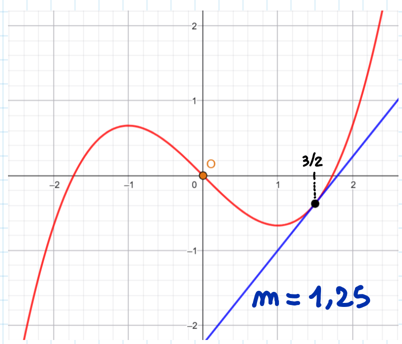


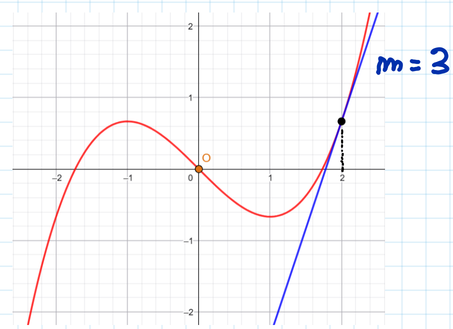
de CONCAVE $\longrightarrow$ à CONVEXE



Le graphe de f est toujours au-dessus des droites tangentes







et le coeff. de la droite tangente commence à augmenter ...

c'est-à-dire, $f'(x)$ est CROISSANTE pour $x > 0$

$\rightsquigarrow$ sa dérivée est POSITIVE pour $x > 0$.

$$\underbrace{(f'(x))' = f''(x)}_{\text{sa dérivée}} \underbrace{> 0}_{\text{POSITIVE}} \quad (\text{pour } x > 0)$$