TD L1 AES, Groupes 3 et 4 – 2025/26

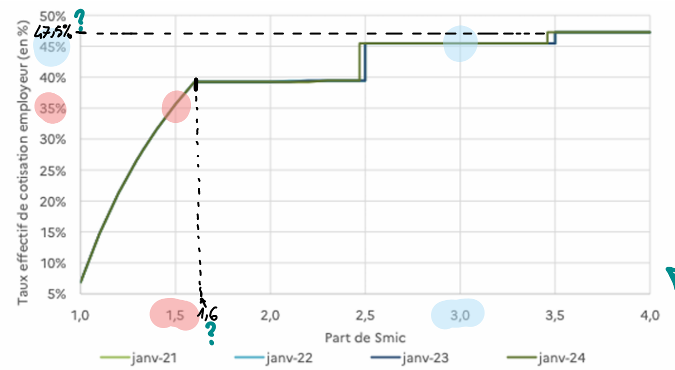
CORRECTIONS DES EXERCICES RESTANTS DU TD4

1.3 Exonération de cotisations sociales sur les bas salaires

Il y a depuis plusieurs années en France un débat important qui porte sur la politique d'exonération de cotisations sociales employeurs sur les bas salaires. On représente ci-dessous dans la Figure 4.1 comment a évolué entre 2020 et 2024 le barème d'exonération de cotisation en fonction du salaire brut exprimé en part de Smic[1]. Dans cet exercice, on va se concentrer sur la courbe plus foncée qui correspond aux barèmes avant janvier 2024.

1. Source : Bozio A. et Wasmer E., "Les politiques d'exonération de cotisations sociales : une inflexion nécessaire", Mission Bozio-Wasmer, rapport final, Oct. 2024, Lien.

FIGURE 4.1 – Évolution du taux de cotisation employeur en fonction du niveau de salaire exprimé en part de Smic entre 2020 et 2024



Lecture : en janvier 2024, le taux de cotisation employeur au niveau du Smic est de 6,9 %. Note : taux en vigueur pour une entreprise de plus de 50 salariés ou plus située à Paris.

Source : Dares.

1. Quel est le taux effectif de cotisation à 1,5 Smic ? à 3 Smic ? 35 % et 45 %

2. Décrivez la forme de la courbe et déduisez de votre description les propriétés de la fonction représentée.

La courbe est le graphe d'une fonction PAR MORCEAUX (les lignes verticales en $x = 2,5$ et $x = 3,5$ devraient être "—● ●—", mais pour "simplifier" elles sont représentées par des lignes...).

- On a deux SAUTS en $x = 2,5$ et $x = 3,5$ ⟿ FONCTION PAS CONTINUE
- Pour $1 \leq x < \underbrace{1,6}_{\text{« je crois... »}}$, on a une fonction CROISSANTE et CONCAVE (par exemple : une parabole)
- Pour $1,6 \leq x < 2,5$, on a une fonction CONSTANTE (égale à 40%)
- Pour $2,5 \leq x < 3,5$, on a une fonction CONSTANTE (égale à 45%)
- Pour $x > 3,5$, on a une fonction CONSTANTE (égale à $\underbrace{47,5\%}_{\text{« je crois... »}}$)

À ÉVITER ! (C'EST PLUS QUE FACULTATIF...)

3. Proposez une fonction mathématique qui pourrait correspondre à la fonction représentée.

Solution (pour les personnes intéressées !)

Pour $x > 1{,}6$ c'est facile car on a des morceaux constantes.

Le problème est pour $1 \leq x < 1{,}6$ ... Comme déjà dit, le graphe pourrait correspondre à une parabole, d'équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

En effet, en regardant le graphe, on a déjà deux points $\left(\begin{array}{l} x = 1{,}5 \Rightarrow y = 35\% \\ x = 1{,}6 \Rightarrow y = 40\% \end{array} \right)$

Nous ajoutons un troisième « facile » :

→ $x = 0 \Rightarrow y = 0$

[Parce que si "Part de Smic" = 0, alors le taux effectif de cotisation employeur (en %) est 0]

Pour simplifier, on a étendu le domaine à "$x \geq 0$"

→ $x = 1{,}5 \Rightarrow y = 35\% = 0{,}35$

→ $x = 1{,}6 \Rightarrow y = 40\% = 0{,}4$

En utilisant cette trois informations, on peut trouver les valeurs de a, b, c :

→ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underset{y}{0} = a \cdot \underset{x^2}{0^2} + b \cdot \underset{x}{0} + c$

$\Rightarrow 0 = 0 + 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$

→ $\begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 0{,}35 \end{cases} \Rightarrow 0{,}35 = a \cdot (1{,}5)^2 + b \cdot 1{,}5 + 0$

→ $\begin{cases} x = 1{,}6 \\ y = 0{,}4 \end{cases} \Rightarrow 0{,}4 = a \cdot (1{,}6)^2 + b \cdot 1{,}6 + 0$

On a une système de deux équations en a et b ...

Par exemple, en utilisant la première, on a

$$b \cdot 1{,}5 = 0{,}35 - a \cdot (1{,}5)^2 \Rightarrow b = \underbrace{\frac{0{,}35}{1{,}5}}_{0{,}2333.. = 0{,}2\overline{3}} - a \cdot 1{,}5 .$$

Note : ici, il serait mieux de travailler avec les fractions... ($0{,}2\overline{3} = \frac{7}{30}$ etc.)

En remplaçant $b = 0{,}2\overline{3} - a \cdot 1{,}5$ dans la deuxième équation on a

$$0{,}4 = a \cdot (1{,}6)^2 + \underbrace{(0{,}2\overline{3} - a \cdot 1{,}5)}_{b} \cdot 1{,}6$$

Donc $0{,}4 = a\,(1{,}6)^2 + 0{,}2\overline{3} \cdot 1{,}6 - a \cdot (1{,}5) \cdot (1{,}6)$

$$\iff 0{,}4 = a \cdot (1{,}6) \cdot (\underbrace{1{,}6 - 1{,}5}_{0{,}1}) + 0{,}2\overline{3} \cdot 1{,}6$$

$$\iff 0{,}4 - 0{,}2\overline{3} \cdot 1{,}6 = a \cdot (1{,}6)(0{,}1)$$

$$\iff a = \frac{0{,}4 - 0{,}2\overline{3} \cdot 1{,}6}{1{,}6 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}4}{1{,}6 \cdot 0{,}1} - \frac{0{,}2\overline{3} \cdot \cancel{1{,}6}}{\cancel{1{,}6} \cdot 0{,}1}$$

$$= \frac{0{,}4}{1{,}6 \cdot 0{,}1} - \frac{0{,}2\overline{3}}{0{,}1}$$

$$= \frac{4}{1{,}6} - 2{,}\overline{3}$$

$$= 1{,}5 - 2{,}\overline{3}$$

$$= -0{,}8\overline{3} = -0{,}8333\ldots$$

et alors $b = 0{,}2\overline{3} - a \cdot 1{,}5$

$$= 0{,}2\overline{3} + (0{,}8\overline{3}) \cdot 1{,}5$$

$$= 0{,}2\overline{3} + 1{,}25$$

$$= 0{,}48\overline{3} = 0{,}48333\ldots$$

Donc $y = \underbrace{-0{,}8\overline{3}}_{a}\,x^2 + \underbrace{0{,}48\overline{3}}_{b}\,x$ et alors on propose :

$$f(x) = \begin{cases} (-0{,}8\overline{3})x^2 + (0{,}48\overline{3})x & \text{, si } x \in [0\,,\,1{,}6[\\ 0{,}4 & \text{, si } x \in [1{,}6\,,\,2{,}5[\\ 0{,}45 & \text{, si } x \in [2{,}5\,,\,3{,}5[\\ 0{,}475 & \text{, si } x \geq 3{,}5\,. \end{cases}$$

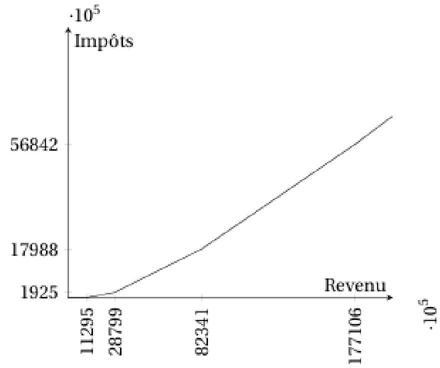
1.4 Impôts sur le revenu (*Facultatif)

Le Tableau 4.1 donne le barème de l'impôt sur le revenu et le graphique 4.2 représente comment évolue le montant des impôts à payer en fonction du revenu imposable [2]. A noter que changer de tranche ne fait pas "bondir" l'impôt, car seuls les revenus compris dans la nouvelle tranche sont imposés au taux supérieur. Ainsi pour un revenu imposable de 30 000 euro, les 11 294 "premiers" euros ne sont pas imposés, les 28 797-11 295=17 502 euros suivants sont imposés au taux de 30% et les 30 000- 28 797=1 203 euros suivants sont imposés au taux de 40%.

TABLE 4.1 – Barème de l'impôt 2024 sur les revenus 2023

Fraction du revenu imposable (pour une part)	Taux d'imposition à appliquer sur la tranche
Jusqu'à 11 294 euros	0 %
De 11 295 euros à 28 797 euros	11 %
De 28 798 euros à 82 341 euros	30 %
De 82 342 euros à 177 106 euros	41 %
Supérieur à 177 106 euros	45 %

FIGURE 4.2 – Montant de l'impôt (en euros) en fonction du revenu imposable (en euros)



2. Source : page web de Bercy Info, entrée "Comment calculer votre impôt d'après le barème de l'impôt sur le revenu ?"

1. Quel est le montant de l'impôt pour un revenu imposable de 12 000 euros ? 45 000 euros ? (NB : vous pouvez bien sûr utiliser une calculatrice pour faire le calcul, mais seulement après avoir posé le calcul).

- $12\,000 = \underbrace{11\,294}_{\text{pas imposable}} + \underbrace{706}_{\text{imposable au } 11\%}$

Montant de l'impôt : 11% de 706 = 12000 − 11 294, c'est-à-dire

$$\frac{11}{100} \cdot 706 = 77,66 .$$

- $45\,000 = \underbrace{11\,294}_{\text{pas imposable}} + \underbrace{28\,797 - 11\,294}_{\text{imposable au } 11\,\%} + \underbrace{45\,000 - 28\,797}_{\text{imposable au } 30\,\%}$

Montant de l'impôt : 11% de $28797 - 11294$ $+$ 30% de $45000 - 28797$

c'est-à-dire : $\frac{11}{100}(28797 - 11294) + \frac{30}{100}(45000 - 28797) = 6785{,}93$.

2. Décrivez la forme de la courbe et déduisez si possible les propriétés de la fonction représentée sur le graphique.

Le courbe représent le graphe d'une fonction par morceaux où tout morceau est une fonction affine.

La fonction par morceaux est croissante et continue.

3. Proposez une fonction mathématique qui pourrait correspondre à la fonction tracée sur le graphique.

Pour $0 \le x \le 11294$, la fonction est constante (égale à 0)

Pour $11294 \le x \le 28797$, le montant d'impôt est

$$\frac{11}{100}\,(\underbrace{x - 11294}_{\text{partie imposable}}) \quad \text{(au } 11\,\%)$$

Pour $28797 \le x \le 82341$, le montant d'impôt est

$$\frac{11}{100}\,(\underbrace{28797 - 11294}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 11\%}}) + \frac{30}{100}\,(\underbrace{x - 28797}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 30\,\%}})$$

Pour $82341 \le x \le 177106$, le montant d'impôt est

$$\frac{11}{100}\,(\underbrace{28797 - 11294}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 11\%}}) + \frac{30}{100}\,(\underbrace{82341 - 28797}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 30\,\%}}) + \frac{41}{100}\,(\underbrace{x - 82341}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 41\,\%}})$$

Pour $x \geq 177\,106$, le montant d'impôt est

$$\frac{11}{100}\underbrace{(28797-11294)}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 11\%}} + \frac{30}{100}\underbrace{(82341-28797)}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 30\%}} + \frac{41}{100}\underbrace{(177106-82341)}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 41\%}} + \frac{45}{100}\underbrace{(x-82341)}_{\substack{\text{partie imposable}\\ \text{au } 45\%}}.$$

Calcules :

$28797 - 11294 = 17503$ et $\frac{11}{100}\cdot 17503 = \frac{192533}{100} = 1925{,}33$

$82341 - 28797 = 53544$ et $\frac{30}{100}\cdot 53544 = \frac{80316}{5} = 16063{,}2$

$117106 - 82341 = 94765$ et $\frac{41}{100}\cdot 94765 = \frac{777073}{20} = 38853{,}65$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \in [0, 11294] \\ 0{,}11\cdot(x-11294) & , \text{ si } x \in [11294, 28797] \\ 1925{,}33 + 0{,}3\cdot(x-28797) & , \text{ si } x \in [28797, 82341] \\ 17988{,}53 + 0{,}41\cdot(x-82341) & , \text{ si } x \in [82341, 177106] \\ 56842{,}18 + 0{,}45\cdot(x-177106) & , \text{ si } x \geq 177106. \end{cases}$$

2.2 Calculs de dérivées et analyse des sens et ampleurs de variation

3.2 Calculs de dérivées secondes et analyse des vitesses de variation

Reprenez les fonctions de l'exercice 2.2. Dérivez une seconde fois les fonctions pour calculer les dérivées secondes des fonctions. Commentez comment évolue $y = f(x)$ avec x.

Pour le 2.2, il me reste que (c), (h), (m), (n), (p)

[Les autres sont dans le fichier du Groupe 3 ou Groupe 4]

On va résoudre le 2.3 en détails seulement pour ces cinq.

Pour les autres, vous trouverez la liste à la fin !

c. $f(x) = 4 + 5x$

- Type : affine
- $f'(x) = 5$

  → $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ⇒ f CROISSANTE
- $f''(x) = 0$

  → f "LINÉAIRE" (concave + convexe..)

h. $f(x) = x^3 - 27x^2 + 144x$

- Type : polynôme
- $f'(x) = 3x^2 - 54x + 144$

  → Signe de $f'(x)$:

On a $3x^2 - 54x + 144 = 0 \overset{\text{division par 3}}{\iff} x^2 - 18x + 48 = 0$

$\overset{\text{formule du } \Delta}{\iff} x = 9 - \sqrt{33}$ ou $x = 9 + \sqrt{33}$

Donc $f'(x) \begin{cases} > 0 \iff x < 9 - \sqrt{33} \text{ ou } x > 9 + \sqrt{33} & \leadsto f(x) \text{ CROISSANTE} \\ < 0 \iff 9 - \sqrt{33} < x < 9 + \sqrt{33} & \leadsto f(x) \text{ DÉCROISSANTE} \end{cases}$

- $f''(x) = 6x - 54$

  $\rightarrow$ Signe de $f''(x)$:

  On a $6x - 54 \geq 0 \iff x \geq \frac{54}{6} = 9$

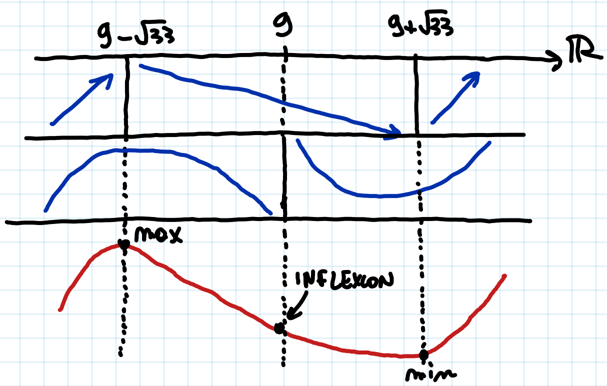
  Donc $f''(x) \begin{cases} > 0 & \iff x > 9 \rightsquigarrow f(x) \text{ CONVEXE} \\ < 0 & \iff x < 9 \rightsquigarrow f(x) \text{ CONCAVE} \end{cases}$

Pas nécessaire

Signe de f'

Signe de f''

Evolution de f



m. $f(x) = \exp(3x+2)$

- Type : composition (exp $\circ$ affine)

  (mais aussi exponentielle avec base différent : $\exp(3x+2) = e^{3x+2} = e^2 \cdot e^{3x} = \underbrace{e^2}_{\text{coeff.}} \cdot (\underbrace{e^3}_{\text{base}})^x$)

  $c \cdot a^x$

- $f'(x) = (3x+2)' \exp(3x+2) = 3\exp(3x+2)$

  $\rightarrow$ $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ f toujours croissante

- $f''(x) = (3\exp(3x+2))' = 3(\exp(3x+2))' = 3(3x+2)'\exp(3x+2) = 9\exp(3x+2)$

  $\rightarrow$ $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ f toujours convexe

n. $f(x) = \ln(x)$ pour $x>0$

- Type : logarithme
- $f'(x) = \frac{1}{x}$, pour $x>0$ (formule sur le formulaire)

→ Pour $x>0$, on a $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

⇝ $f(x)$ toujours croissante

- $f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, pour $x>0$

→ Pour $x>0$, on a $x^2>0$ et donc $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

⇝ $f(x)$ toujours concave

p. $f(x) = (1+2x)^2$

- Type : composition (pol ∘ pol)

MAIS AUSSI polynôme.

$f(x) = 1 + 2\cdot 2x + (2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$

[SVP, RAPPELEZ QUE
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a\cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$]

- $f'(x) = (1+4x+4x^2)' = 4 + 4\cdot 2x = 4 + 8x$

→ $f'(x) \geq 0 \iff 4+8x \geq 0 \iff x \geq -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

⇝ f est $\begin{cases} \text{CROISSANTE pour } x \geq -1/2 \\ \text{DÉCROISSANTE pour } x \leq -1/2 \end{cases}$

- $f''(x) = (4+8x)' = 8$

→ $f''(x) > 8$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ⇝ f est toujours CONVEXE.

- Solutions du 2.3 pour les fonctions restantes :

a. $f''(x) = 0$ $\rightsquigarrow$ f linéaire.

b. $f''(x) = 0$ $\rightsquigarrow$ f linéaire.

d. $f''(x) = 2$ $\rightsquigarrow$ f convexe.

e. $f''(x) = 4$ $\rightsquigarrow$ f convexe.

f. $f''(x) = -2$ $\rightsquigarrow$ f concave.

g. $f''(x) = 18x$ $\rightsquigarrow$ f convexe pour $x \geq 0$, concave pour $x \leq 0$.

i. $f''(x) = 30x - 18$ $\rightsquigarrow$ f convexe pour $x \geq \frac{5}{3}$, concave pour $x \leq \frac{5}{3}$.

j. $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\rightsquigarrow$ f convexe pour $x > -1$, concave pour $x < -1$.

k. $f''(x) = \frac{4(x-2)}{(1+x)^4}$ $\rightsquigarrow$ f convexe pour $x \geq 2$, concave pour $x \leq 2$ et $x \neq -1$.

l. $f''(x) = 4x^2 \exp(x^2)$ $\rightsquigarrow$ f convexe.

o. $f''(x) = -\frac{9}{(3x-2)^2}$ pour $x > \frac{2}{3}$ $\rightsquigarrow$ f concave (pour $x > \frac{2}{3}$).

q. $f''(x) = 12x^2 + 36x + 22$ $\rightsquigarrow$ f convexe pour $x \leq \frac{-9-\sqrt{15}}{6}$ ou $x \geq \frac{-9+\sqrt{15}}{6}$ et concave pour $\frac{-9-\sqrt{15}}{6} \leq x \leq \frac{-9+\sqrt{15}}{6}$.

r. $f''(x) = \frac{1}{\exp(1+x)} = \exp(-1-x)$ $\rightsquigarrow$ f convexe.

4 Compléments et analyses de fonctions d'économie et de gestion

4.1 Calculs d'élasticité

1. Soit y une variable fonction de x telle que $y = f(x)$.
   (a) Rappelez la définition de l'élasticité de y par rapport à x.
   (b) On veut calculer l'élasticité de y par rapport à x.
      i. Donnez la formule à mobiliser si on vous dit que x passe de x_0 à x_1 et que y passe de y_0 à y_1 entre t_0 et t_1.
      ii. Donnez la formule à mobiliser si on vous dit que $y = f(x) = 5x^2 + x + 1$.

(a) L'élasticité de y par rapport à x est le rapport entre le taux d'accroissement de y et ce de x (suites à certains variations, par exemple : suite à une variation de 1% de x) : voir (b), i.

(b) i. $y : y_0 \rightsquigarrow y_1$

$x : x_0 \rightsquigarrow x_1$

(Temps $t_0 \rightsquigarrow t_1$)

$$\Rightarrow e_{y,x} = \frac{\frac{y_1 - y_0}{y_0}}{\frac{x_1 - x_0}{x_0}} \quad \left(\text{«} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} \text{»} \right)$$

ii. Dans le cas des fonctions (dérivables) $y = f(x)$

si on considère encore entre x_0 et x_1, on a

$y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f(x_1)$, donc

Rappel : $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}$

$$e_{y,x}^{\text{entre } x_0 \text{ et } x_1} = \frac{\frac{y_1 - y_0}{y_0}}{\frac{x_1 - x_0}{x_0}} = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{Taux d'accr. moyen entre } x_0 \text{ et } x_1} \cdot \frac{x_0}{y_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \, \frac{x_0}{f(x_0)}$$

Mais, en général (« sans x_0 et x_1 »), on doit considérer la limite $x_1 \to x_0$ ...

on a $e_{y,x} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$.

Donc, si $f(x) = 5x^2 + x + 1$, alors $f'(x) = 10x + 1$, d'où

$$e_{y,x} = (10x + 1) \frac{x}{5x^2 + x + 1} = \frac{(10x+1)x}{5x^2 + x + 1} = \frac{10x^2 + x}{5x^2 + x + 1}.$$

2. Sur la période 2000-2015, l'élasticité-prix de la demande de cigarettes est estimée à -0,4. Interprétez cette valeur.[3]

3. Source : "Taxation et prix du tabac en France et conséquences sur la consommation'", Bulletin épidémiologique hebdomadaire, No. 14-15, 2018

$t_0 = 2000$, $t_1 = 2015$, x : prix
y : demande

$$e_{y,x} = \frac{(y_1 - y_0)/y_0}{(x_1 - x_0)/x_0} = -0{,}4 < 0 \Rightarrow y_1 - y_0 < 0$$

Donc suite à l'augmentation du prix, la demande à diminué.

Plus précisement, en considérant une variation de 1% de x : $x_1 - x_0 = \frac{1}{100} x_0$

augmentation de 1% : $x_1 = x_0 + 1\% \, x_0$

on a

$$e_{y,x} = -0{,}4 = \frac{(y_1 - y_0)/y_0}{\frac{1}{100}\cancel{x_0}/\cancel{x_0}} = 100 \cdot \frac{y_1 - y_0}{y_0}$$

$$\Rightarrow y_1 - y_0 = -\frac{0{,}4}{100} \cdot y_0$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 - \frac{0{,}4}{100} y_0 = y_0 - 0{,}4\% \, y_0$$

c'est-à-dire, suite à une hausse de 1% du prix,
la demande a baissé de 0,4%.

3. Entre t et $t+1$, le prix du bien d'une entreprise est passé de 10 à 11 euros. On a alors constaté que la demande pour le bien est quant à elle passé de 50 à 40 unités entre t et $t+1$. Quelle est l'élasticité-prix de la demande pour le bien ?

x : prix , y : demande

$x_0 = 10$, $y_0 = 50$
$x_1 = 11$, $y_1 = 40$

$$e_{y,x} = \frac{(y_1 - y_0)/y_0}{(x_1 - x_0)/x_0} = \frac{(40-50)/50}{(11-10)/10} = \frac{-10/50}{1/10}$$

$$= -\frac{10}{5\cancel{0}} \cdot \frac{10}{1} = -\frac{10}{5} = -2.$$

$\frac{10}{100} \cdot 10 = 1$

[Dans ce cas, le prix a augmenté de 10% et la demande a baissé de 2%.]

4. On se donne une fonction de demande égale à $D(p) = 3 - 2p$. Quelle est l'élasticité-prix de la demande au prix $p_0 = 1$?

$$D'(p) = -2 \implies e_{D,p}(p) = D'(p)\frac{p}{D(p)} = -\frac{2p}{3-2p}$$

$$e_{D,p}(\underbrace{p_0}_{=1}) = -\frac{2p_0}{3-2p_0} \underset{p_0=1}{\uparrow}{=} -\frac{2}{3-2} = -2.$$

[Donc si le prix augmente de 1%, la demande diminue de 2%.]

4.2 Problème complet 1

Soit une entreprise qui fabrique un produit donné. On note Q la quantité produite exprimée en milliers d'unités. On suppose que la technologie de l'entreprise ne lui permet que de produire au maximum 2 000 unités (donc $Q_{max} = 2$). Le coût total de production, exprimé en dizaine de milliers d'euros, est $C(Q) = Q^3 - 2Q^2 + Q$.

1. Quelles sont les variables endogène(s) (le coût Total C) et exogène(s) (la quantité produite Q) et le domaine de la fonction de coût ?
2. On s'intéresse au coût moyen et à son évolution. On rappelle que le coût moyen correspond au coût total rapporté au volume de production (= Q).
   (a) Posez la fonction de coût moyen $C_M(Q)$. Quel est ce type de fonction ? (constante, affine, puissance, polynôme...?)

1. Le domaine est $[0, 2]$ car $Q \geq 0$ (quantité produite)
et $Q \leq 2$ (limite donnée par l'énoncé).

2. (a) $C_M(Q)$ est une fonction POLYNÔME, car :

$$C_M(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{Q^3 - 2Q^2 + Q}{Q} = \frac{Q^3}{Q} - 2\frac{Q^2}{Q} + \frac{Q}{Q}$$
$$= Q^2 - 2Q + 1$$

[Note : $Q^2 - 2Q + 1 = (Q-1)^2$.]

(b) Calculez la dérivée de la fonction de coût moyen puis montrez que le coût moyen est décroissant si l'entreprise produit moins de 1 000 unités de biens (c'est-à-dire si $Q < 1$) mais qu'il augmente si l'entreprise produit plus de 1 000 (c'est-à-dire si $Q > 1$).

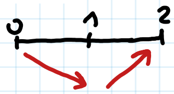
$$C_M'(Q) = (Q^2 - 2Q + 1)' = 2Q - 2$$

et on a $C_M'(Q) \geq 0 \iff 2Q - 2 \geq 0 \iff 2Q \geq 2 \iff Q \geq 1.$

$$\text{Donc} \quad C_M'(Q) \quad \text{est} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{pour} \quad 1 \leq Q \leq 2 \\ \leq 0 & \text{pour} \quad 0 \leq Q \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad C_M(Q) \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{CROISSANTE} & \text{pour} \quad 1 \leq Q \leq 2 \\ \text{DÉCROISSANTE} & \text{pour} \quad 0 \leq Q \leq 1 \end{cases}.$$

(c) Vérifiez que l'entreprise minimise son coût moyen en $Q = 1$.

C'est claire en utilisant le sense de variation que on a vu :  ,
mais ce type de question vous demande (implicitement) d'utiliser la dérivée seconde :

$$C_M''(Q) = (2Q - 2)' = 2 \quad \Rightarrow \quad C_M''(1) = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ $Q = 1$ est un point de minimum pour C_M.

(d) Quel est le pourcentage de variation du coût moyen suite à une augmentation de 1% du volume de production en $Q = 2$? Comment appelle-t-on ce que vous venez de calculer ?

↳ Élasticité de C_M par rapport à Q

$$e_{C_M,Q}(Q) = C_M'(Q) \cdot \frac{Q}{C_M(Q)} = (2Q - 2)\frac{Q}{Q^2 - 2Q + 1}$$

Pas nécessaire

$$= \frac{(2Q-2)Q}{Q^2 - 2Q + 1} \quad \left[= \frac{2Q(Q-1)}{(Q-1)^2} = \frac{2Q}{Q-1} \right].$$

$$e_{C_M,Q}(2) = \frac{(2 \cdot 2 - 2) \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 1} = \frac{2 \cdot 2}{4 - 4 + 1} = 4 ,$$

donc le pourcentage demandé est de 4 %.

4.3 Problème complet 2 (extrait du CC de 2013-2014)

Soit une entreprise qui fabrique un produit donné. On note Q la quantité produite exprimée en milliers d'unités. On suppose que la technologie de l'entreprise ne lui permet que de produire au maximum 20 000 unités (donc $Q_{max} = 20$). Le coût total de production, exprimé en dizaine de milliers d'euros, est $C(Q) = Q^3 - 23Q^2 + 180Q$. L'entreprise veut connaître le niveau de production qui maximise son profit. Pour cela il nous faut déterminer comment évolue le profit de l'entreprise en fonction de ses quantités vendues

1. Le profit est la différence entre la recette totale et le coût total. Montrez que la fonction de profit $\Pi(Q)$ s'écrit $\Pi(Q) = -Q^3 + 18Q^2$ si la fonction de prix à laquelle l'entreprise est confrontée est $P(Q) = 180 - 5Q$.

Rappel : la RECETTE TOTALE est donnée par $P(Q) \cdot Q$ → voir l'énoncé de l'exercice 2.4 du TD 4

On a
$$\begin{aligned}
\Pi(Q) &= P(Q) \cdot Q - C(Q) \\
&= (180 - 5Q) \cdot Q - (Q^3 - 23Q^2 + 180Q) \\
&= \cancel{180Q} - 5Q^2 - Q^3 + 23Q^2 - \cancel{180Q} \\
&= -Q^3 + 18Q^2 .
\end{aligned}$$

2. Calculez la dérivée de la fonction de profit par rapport à Q, que l'on note $\Pi'(Q)$.

$$\Pi'(Q) = (-Q^3 + 18Q^2)' = -3Q^2 + 36Q .$$

3. Pour quelle valeur a-t-on $\Pi'(Q) = 0$?

$$\begin{aligned}
\Pi'(Q) = 0 &\iff -3Q^2 + 36Q = 0 \iff -3Q(Q-12) = 0 \\
&\iff -3Q = 0 \quad \text{ou} \quad Q - 12 = 0 \\
&\iff Q = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 12 .
\end{aligned}$$

4. Dressez le tableau de variation de la fonction de profit Π.

$$\begin{aligned}
\Pi'(Q) \geq 0 &\iff \underbrace{-3Q}_{\leq 0}(Q-12) \geq 0 \iff Q - 12 \leq 0 \quad (\text{ou } Q = 0) \\
&\iff \underbrace{0 \leq}_{\text{Rappel : } Q \geq 0} Q \leq 12 .
\end{aligned}$$

car Q est la quantité produite

	0		12		20
Π'	0	+	0	−	
Π	$\Pi(0)$	↗	$\Pi(12)$	↘	$\Pi(20)$

5. Quel est le volume de production Q^* qui assure le profit maximum? Quelle est la valeur du profit réalisé pour ce niveau de production Q^* ?

$Q^* = 12$ est un point de maximum pour $\Pi(Q)$: en effet

$$\Pi''(Q) = (-3Q^2 + 36Q)' = -6Q + 36$$

et $\begin{cases} \Pi''(12) = -6 \cdot 12 + 36 = -36 < 0 \\ \Pi'(12) = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $Q^* = 12$ point de max

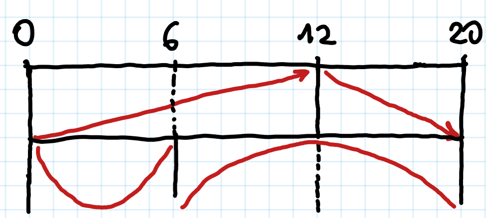
Ensuite, on a

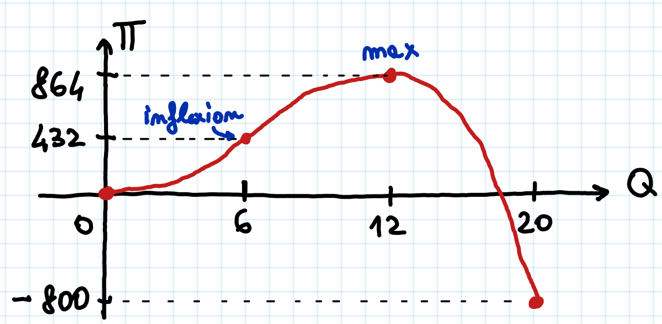
$$\Pi(12) = -12^3 + 18 \cdot 12^2 = 12^2(-12 + 18) = 144 \cdot 6 = 864.$$

Considérations Finales (même si elle ne sont pas demandées)

on a $\Pi''(Q) \geq 0 \iff -6Q + 36 \geq 0 \iff 0 \leq Q \leq \frac{36}{6} = 6$,
(et $Q \in [0, 20]$)

donc $\Pi(Q)$ est $\begin{cases} \text{CONVEXE} & \text{pour } 0 \leq Q \leq 6 \\ \text{CONCAVE} & \text{pour } 6 \leq Q \leq 20. \end{cases}$





Notons aussi : $\Pi(0) = -0^3 + 18 \cdot 0^2 = 0.$

$$\Pi(6) = -6^3 + 18 \cdot 6^2 = 6^2(-6 + 18) = 36 \cdot 12 = 432.$$

$$\Pi(20) = -20^3 + 18 \cdot 20^2 = 20^2(-20 + 18) = 400(-2) = -800.$$