ESERCITAZIONE 07/05/25 : ESAME SCRITTO DEL 17/12/24

Esercizio 1. Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2+a & a & 0 \\ -a & 2-a & 0 \\ 1+a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare gli autovalori di A.
(2) Per quali valori del parametro a esiste un autovalore di molteplicità geometrica 2?
(3) Per quali valori del parametro a la matrice A è diagonalizzabile?

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}[x]$ di grado ≤ 3 e sia $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}.$$

(1) Sia A la matrice di ϕ rispetto alla base ordinata $1, x, x^2, x^3$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ in partenza e la base standard in arrivo. Determinare A.
(2) Determinare l'immagine di ϕ.
(3) Trovare una base del nucleo di ϕ.

Esercizio 3. Siano V, W_a i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$V = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ -x + z + t = 0 \end{cases} \right\}, \quad W_a = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} ax + y + at = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \right\},$$

dove a è un parametro reale.

(1) Determinare le dimensioni di V e W_a.
(2) Per quali valori di a si ha $\dim(V \cap W_a) = 1$?
(3) Determinare i valori di a per cui $V + W_a = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Si considerino le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Lo spazio generato da A_1, A_2, A_3 contiene matrici diagonali? In caso affermativo, determinarne una. In caso contrario, motivare la risposta.
(2) Esiste una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che contiene le matrici A_1, A_2, A_3? Scrivere SI o NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta.