ESERCITAZIONE 09/05/25 : ESAME SCRITTO DEL 14/01/25

Esercizio 1. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$w_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$\varphi(v) := \begin{bmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \langle v, w_2 \rangle \end{bmatrix},$$

dove $\langle\ ,\ \rangle$ è il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^4$.

(1) Calcolare la dimensione del nucleo di φ.

(2) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ è contenuto nell'immagine di φ e ha norma $\sqrt{5}$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

(1) Per quali valori di a la matrice A ha rango 4?

(2) Per quali valori di a la matrice A ammette un autovalore di molteplicità algebrica 1?

Esercizio 3. (1) Determinare se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Se sì, scrivere la matrice di f rispetto alla base standard in partenza e arrivo. Se no, scrivere NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta sul foglio.

(2) Stessa domanda con

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia U il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici simmetriche, e sia V il sottospazio delle matrici che ammettono $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ come autovettore per l'autovalore 0.

(1) Calcolare le dimensioni di U e di V.

(2) Trovare una base di $U \cap V$.

(3) Determinare $U + V$.