Esercizio 1. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio V generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il sottospazio W generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

.

Sia $V^\perp$ il sottospazio ortogonale di V per il prodotto scalare standard (stessa notazione per W).

(1) Calcolare la dimensione del sottospazio $V^\perp \cap W$.

(2) Calcolare la dimensione del sottospazio $V^\perp + W^\perp$.

Esercizio 2. Consideriamo l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $v \mapsto Av$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ dove la matrice di ϕ diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

Se sì, trovare tale base, se no, scrivere NO nel riquadro e motivare la risposta sul foglio.

(2) Stessa domanda con la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ costituito dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti reali.

(1) Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che il polinomio $x^3 + ax^2 + 3x + 4$ sia contenuto nel sottospazio generato dai polinomi $x^3 + 1$, $x + 1$, $x^3 + x$.

(2) Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare data da $x^3 \mapsto x^3 + 1$, $x^2 \mapsto x + 1$, $x \mapsto x^3 + x$, $1 \mapsto x^3 + ax^2 + 3x + 4$.
Scrivere la matrice di f rispetto alla base ordinata $\{1, x, x^2, x^3\}$ in partenza e arrivo.

(3) Per quali valori del parametro a l'applicazione f sopra ha nel nucleo solo il polinomio $0 \in V$?

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici 2×2 a coefficienti reali. Sappiamo che questo è uno spazio di dimensione 4.

(1) Sia R il sottoinsieme di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici M tali che

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini se R è un sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e in caso lo sia se ne determini una base.

(2) Sia S il sottoinsieme di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici M tali che

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini se S è un sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e in caso lo sia se ne determini una base.