

Exercices Supplémentaires du Chapitre 1

(Tirés du [poly](#) du cours d'Analyse 1 du Prof. P. Acquistapace)

Analyse 1 – L1 Math (Groupe 4)

1. Déterminer sous quelles conditions sur les nombres réels x, y les égalités suivantes sont vérifiées :

(a) $|x| - |y| = |x - y|$

(c) $||x| - |y|| = |x - y|$

(b) $|x + y| = |x - y|$

(d) $||x| - |y|| = x + y$

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a) $|x| + 1 = |x + 1|$

(d) $||x - 1| + 1| < 1$

(b) $|x| - x^2 = ||x| + x|$

(e) $\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x+3|} > \frac{1}{|x+4|}$

(c) $|x + 3| < |2x - 3|$

(f) $||2x - 1| - |x + 3|| < |4x + 5|$

3. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a) $|5 + x^{-1}| < 1$

(e) $\frac{|x^2-2|+3}{3x+1} \geq 1$

(b) $|x^2 - 2| \leq 1$

(f) $\frac{|x+2|-2x}{x^2-2x} \leq 1$

(c) $x < |x^2 - 12| < 4x$

(g) $\frac{2}{x+2} > \frac{2x}{x^2-1}$

(d) $\frac{15x-3}{x^2-5} \geq 3$

(h) $x^2 - 5|x| + 6 \geq 0$

4. Déterminer un nombre réel M tel que pour $|x| \leq 1$ on ait :

$$|x^2 - x| \leq M$$

5. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \geq 2$

(d) $\sqrt{3x^2 - 1} > \sqrt{x^2 - 3}$

(b) $\sqrt{\frac{|x+2|}{|x-1|}} > 1$

(e) $|x|\sqrt{1 - 2x^2} > 2x^2 - 1$

(c) $\sqrt{4x^2 - 1} < x - 3$

(f) $\frac{|x|-3}{\sqrt{x-2}} > \sqrt{x}$

6. Prouver que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\max\{a, 0\} = \frac{a + |a|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{a, 0\} = -\max\{-a, 0\} = \frac{a - |a|}{2}$$