Tutorato di Algebra Lineare

Esercizi su diagonalizzabilità e ortogonalità

CdL in Informatica - Università di Pisa

17 Aprile 2025

Esercizio 1. Dati a e b parametri reali, consideriamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Per quali valori di a e b la matrice M è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? E su $\mathbb{C}$?
2. Per quali valori di a e b esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza M? Esplicitarla per i valori trovati.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di M è dato da $p(t) = (t-1)^2 - ab = t^2 - 2t + 1 - ab$. Calcolandone il discriminante, si ha $\Delta = 4ab$. Quindi la matrice M ha due autovalori reali e distinti se $ab > 0$ (ossia se a, b sono concordi), un autovalore doppio (ossia di molteplicità algebrica 2) se $a = 0$ oppure $b = 0$, due autovalori complessi (non reali) distinti se $ab < 0$ (ossia se a, b sono discordi).

1. Poiché per $ab > 0$ la matrice M ha due autovalori reali semplici (ossia di molteplicità algebrica 1), essa è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (e quindi anche su $\mathbb{C}$). Se invece $ab < 0$, allora M ha due autovalori complessi (non reali) distinti, quindi M è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$. Supponiamo ora $a = 0$. Se $b = 0$ allora M è la matrice identità (che è diagonale); se invece $b \neq 0$, allora M ha un unico autovalore reale $\lambda = 1$, che ha quindi molteplicità algebrica 2. Osserviamo che $1 \leq \dim \ker(M - I) < 2$ (infatti se $\dim \ker(M - I) = 2$, allora $M - I$ avrebbe rango 0, ossia sarebbe la matrice nulla), quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è minore di quella algebrica, dunque M non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$. Simmetricamente, lo stesso vale assumendo $b = 0$ e $a \neq 0$. In conclusione:

$$M \text{ è diagonalizzabile su } \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{per } ab > 0 \text{ oppure } a = b = 0 \\ \mathbb{C}, & \text{per } ab \neq 0 \text{ oppure } a = b = 0. \end{cases}$$

Per il secondo punto, una risposta diretta alla prima domanda è fornita dal teorema spettrale reale (in forma matriciale) nella sua versione "completa", ossia

> Una matrice è diagonalizzabile mediante una base ortonormale se *e solo se* è simmetrica.

In particolare, nel nostro caso una tale base esiste se *e solo se* $a = b$. Poiché questa versione del teorema spettrale non è nota a tutti i partecipanti, nel seguito è proposta una soluzione che non ne richiede l'uso.

2. Dal punto precedente, sappiamo che M è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $ab > 0$ oppure $a = b = 0$, quindi questi sono gli unici casi da studiare. Se $a = b = 0$, allora M è la matrice identità e quindi una qualsiasi base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ (ad esempio, la base canonica) diagonalizza M (che resta sempre l'identità). Determiniamo ora una base di autovettori per M nel caso in cui $ab > 0$ (in modo da dedurre – senza usare il teorema spettrale – che $a = b$ è condizione sufficiente e *necessaria* affinché esista una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ composta da autovettori per M). Se $ab > 0$, allora si ha

$$M - (1 \pm \sqrt{ab})I = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{ab} & a \\ b & \mp\sqrt{ab} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 \pm \frac{b}{\sqrt{ab}} R_1} \begin{pmatrix} \mp\sqrt{ab} & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi gli autospazi di M sono dati da

$$V_{1\pm\sqrt{ab}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \pm\frac{a}{\sqrt{ab}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Allora una qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ composta da autovettori per M è del tipo

$$c_1 \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{ab}} \\ 1 \end{pmatrix}, \; c_2 \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{ab}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

con c_1, c_2 numeri reali *non nulli*. Osservando che

$$\left\langle c_1 \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{ab}} \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{ab}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 c_2 \left(-\frac{a}{b} + 1 \right),$$

concludiamo che esiste una base ortogonale (e quindi anche ortonormale) di autovettori per M se e solo se $-\frac{a}{b} + 1 = 0$, ossia se e solo se $a = b$. In questo caso, gli autovalori sono $1 \pm a$ e gli autospazi sono dati da

$$V_{1\pm a} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per quanto visto prima, i vettori $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sono ortogonali e di norma $\sqrt{(\pm 1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza M è quindi data da

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia a un parametro reale e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$ nei casi $a = 0$ e $a = 1$.

2. Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$ in funzione del parametro a.

Soluzione. Risolviamo direttamente il secondo punto. Indichiamo con w_1 e w_2 rispettivamente il primo e il secondo vettore che compaiono nella definizione di W. Osserviamo che w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti per ogni valore reale di a, e che $\langle w_1, w_2 \rangle = 2a$. In particolare w_1 e w_2 sono ortogonali se e solo se $a = 0$.

Una base ortogonale di W si ottiene applicando l'algoritmo di Gram Schmidt a w_1, w_2 (notare che questo funziona anche per $a = 0$, quindi non c'è bisogno di distinguere i casi). Posto $v_1 = w_1$, consideriamo

$$v_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = w_2 - \frac{2a}{5} v_1 = \begin{pmatrix} -2a/5 \\ a \\ -1 \\ a/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2a \\ 5a \\ -5 \\ a \end{pmatrix}.$$

Una base ortonormale di W è quindi data da

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{6}{5}a^2}} \begin{pmatrix} -2a/5 \\ a \\ -1 \\ a/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{25 + 30a^2}} \begin{pmatrix} -2a \\ 5a \\ -5 \\ a \end{pmatrix}.$$

Il sottospazio ortogonale a W è dato dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ ax_2 - x_3 + ax_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_4 \\ x_2 \\ ax_2 + ax_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_3} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_4},$$

ossia $W^\perp = \operatorname{span}\{w_3, w_4\}$. Di nuovo, poiché $\langle w_3, w_4 \rangle = a^2$, i vettori w_3 e w_4 sono ortogonali se e solo se $a = 0$. Come prima, applichiamo l'algoritmo di Gram Schmidt a w_3, w_4 per determinare una base ortogonale di $W^\perp$. Posto $v_3 = w_3$, consideriamo

$$v_4 = w_4 - \frac{\langle w_3, w_4 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = w_4 - \frac{a^2}{1 + a^2} w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -a^2/(1 + a^2) \\ a/(1 + a^2) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\|v_3\| = \sqrt{1 + a^2}$ e che

$$\|v_4\|^2 = 5 + \frac{a^4}{(1 + a^2)^2} + \frac{a^2}{(1 + a^2)^2} = \frac{5(1 + a^2)^2 + a^2(1 + a^2)}{(1 + a^2)^2} = \frac{5 + 6a^2}{1 + a^2}.$$

Una base ortonormale di $W^\perp$ è quindi data da

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_4 = \sqrt{\frac{1 + a^2}{5 + 6a^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -a^2/(1 + a^2) \\ a/(1 + a^2) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 (La successione di Fibonacci).

La successione di Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ si costruisce partendo dai numeri $1, 1$ e definendo ogni altro numero come la somma dei due precedenti. Formalmente, la successione può essere definita tramite la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \ ^{a} \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Quindi, per calcolare l'n-esimo termine della successione di Fibonacci, si dovrebbero prima calcolare tutti i termini $F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}$. Esiste un modo diretto per calcolare F_n senza prima calcolare tutti i termini precedenti? Cioè, esiste una formula esplicita che esprima F_n in funzione di n? La risposta è affermativa, e tale formula può essere trovata in vari modi. Lo scopo di questo esercizio è quello di determinarla sfruttando le conoscenze di algebra lineare acquisite nel corso.

[a] Spesso, la successione di Fibonacci è indicizzata in modo diverso, ossia ponendo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Notare che le due successioni coincidono a meno di uno shift degli indici (vedere la Nota alla fine).

1. Verificare che la formula ricorsiva può essere scritta in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \tag{$*$}$$

   e, posto $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, trovare una formula che esprime $\left(\begin{smallmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{smallmatrix}\right)$ in termini di n, A, F_0, F_1.

2. Verificare che la matrice A è diagonalizzabile. Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ composta da autovettori per A.

3. Sia M la matrice le cui colonne sono date dai vettori della base $\mathcal{B}$. Determinare M^{-1}.

Ricordiamo che $M = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$. Dalla teoria sappiamo che

$$A = MDM^{-1},$$

dove D è una matrice diagonale.

4. Mostrare che per ogni $n \geq 1$ vale $A^n = MD^nM^{-1}$ e, sfruttando il primo punto dell'esercizio, dedurre la formula esplicita per F_n.

Soluzione.

1. La prima verifica si riduce a un semplice prodotto matrice-vettore. Iterando questa uguaglianza, si trova

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

   Rigorosamente, tale formula può essere verificata per induzione su $n \geq 1$. Il passo base $n = 1$ è chiaro, in quanto

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

   Il passo induttivo segue applicando l'ipotesi induttiva alla formula ($*$).

2. Il polinomio caratteristico di A è dato da $p_A(t) = t(t-1) - 1 = t^2 - t - 1$. Quindi A ha due autovalori reali e distinti $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (il numero aureo) e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi$. Quindi gli autovalori hanno entrambi molteplicità algebrica pari a 1, dunque A è diagonalizzabile. Determiniamo una base di $\mathbb{R}^2$ composta da autovettori per A: per $\lambda \in \{\varphi, 1-\varphi\}$ (ossia per λ soluzione dell'equazione $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$), si ha

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - (1-\lambda) R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autospazi di A sono quindi dati da

$$V_\lambda = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \lambda \in \{\varphi, 1-\varphi\}.$$

Allora, una base di $\mathbb{R}^2$ composta da autovettori per A è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Notiamo che la matrice M dipende dalla scelta della base $\mathcal{B}$ (e dal suo ordinamento). Nel nostro caso, consideriamo

$$M = \begin{pmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $\det(M) = 2\varphi - 1 = \sqrt{5}$. Calcolando l'inversa (ad esempio tramite la matrice dei cofattori), si trova

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \varphi - 1 & \varphi \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \varphi - 1 \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}.$$

4. Notiamo che nel nostro caso si ha $D = \left(\begin{smallmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1-\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Per mostrare l'uguaglianza, procediamo per induzione su $n \geq 1$. Il caso $n = 1$ è chiaro. Per il passo induttivo, assumiamo la tesi vera per $n - 1$. Applicando l'ipotesi induttiva si ottiene

$$A^n = AA^{n-1} = AMD^{n-1}M^{-1} = MDM^{-1}MD^{n-1}M^{-1} = MD^nM^{-1}.$$

A questo punto, si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= MD^nM^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (1-\varphi)^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \varphi - 1 \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+2} - (1-\varphi)^{n+2} \\ \varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Guardando la seconda coordinata, deduciamo

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Nota. Definendo la successione di Fibonacci a partire da $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, vale la stessa formula a patto di sostituire F_n con F_{n+1}.