Exercice 34. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx \qquad L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3 \sin(x)\,dx \qquad N = \int_0^2 xe^x dx$$

$$J = \int_1^e x\ln(x)dx \qquad M = \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \qquad O = \int_0^{\pi/2} x\sin(2x)\,dx$$

$$K = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)e^{\sin(x)}dx \qquad P = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

(Ind. Pour M, poser $u = \sqrt{x}$).

Solution.

- $$I = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3$$
$$= \frac{3^3}{3} - 3^2 + 2\cdot 3 - \left(\frac{0^3}{3} - 0^2 + 2\cdot 0\right)$$
$$= 3^2 - 3^2 + 2\cdot 3 - 0$$
$$= 2\cdot 3 = 6.$$

- $$J = \int_1^e x\ln(x)\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{f'}\,\underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\,\underbrace{\ln(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow J = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{e^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Ou, plus directement :

$$J = \int_1^e x\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$
$$= \left(\frac{e^2}{2}\underbrace{\ln(e)}_{1} - \frac{1}{2}\cancel{\ln(1)}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

- $K = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x)\, e^{\sin(x)}\, dx$

$y = \sin(x)$
$y' = \cos(x)$
$dy = \cos(x)\, dx$

$= \int_0^{-1} e^y\, dy$

$x = 0 \Rightarrow y = \sin(0) = 0$
$x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow y = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$

$= [e^y]_0^{-1} = e^{-1} - e^0 = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1.$

- $L = \int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\, \sin(x)\, dx$

$y = \cos(x)$
$y' = -\sin(x)$
$dy = -\sin(x)\, dx \Rightarrow \sin(x)\, dx = -dy$

$= \int_1^0 y^3\, (-dy)$

$x = 0 \Rightarrow y = \cos(0) = 1$
$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$= -\int_1^0 y^3\, dy = -\left[y^4/4\right]_1^0 = -\left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

- $M = \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

$u = \sqrt{x}$
$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\, du$

$x = \pi^2 \Rightarrow u = \sqrt{\pi^2} = \pi$
$x = 4\pi^2 \Rightarrow u = \sqrt{4\pi^2} = 2\pi$

$= \int_\pi^{2\pi} \sin(u)\, 2\, du = 2\left[-\cos(u)\right]_\pi^{2\pi} = 2\left(-\underbrace{\cos(2\pi)}_{=\cos(0)} - (-\cos(\pi))\right)$

$= 2\left(-\cos(0) + \cos(\pi)\right)$

$= 2(-1-1) = -4.$

- $N = \int_0^2 \underbrace{x}_{g} \underbrace{e^x}_{f'} dx = \left[\underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g} \right]_0^2 - \int_0^2 \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} dx$

$$= e^2 \cdot 2 - e^0 \cdot 0 - \int_0^2 e^x dx$$

$$= 2e^2 - [e^x]_0^2$$

$$= 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1 .$$

- $O = \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx$

$y = 2x$ $\Rightarrow dy = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dy$

$y' = 2$

Note : $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \pi$

$$= \int_0^{\pi} \frac{y}{2} \sin(y) \frac{1}{2} dy = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} y \cdot \sin(y) dy$$

Maintenant, on calcule $\int_0^{\pi} y \sin(y) dy$ par parties :

$$\int_0^{\pi} \underbrace{y}_{g} \underbrace{\sin(y)}_{f'} dy = \left[\underbrace{-\cos(y)}_{f} \cdot \underbrace{y}_{g} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{(-\cos(y))}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} dy$$

$$= (-\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} \cdot \pi + \cancel{\cos(0) \cdot 0}) + \int_0^{\pi} \cos(y) dy$$

$$= \pi + [\sin(y)]_0^{\pi} = \pi + (\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0}) = \pi$$

Donc

$$O = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} y \sin(y) dy = \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{4} .$$

- $P = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$u = 1+x^2$ $\Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

$u' = 2x$

$x = 0 \Rightarrow u = 1+0^2 = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 1+1^2 = 2$

$$= \int_1^2 \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1^{3/2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

$$\left(= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).\right)$$

Exercice 35.

a. Calculer $I = \int_0^\pi x\sin(x)dx$ en intégrant par parties.

b. a) Utiliser un changement de variable approprié pour calculer l'intégrale $J = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$.

b) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K = \int_1^2 x^2 \ln x dx$.

c. Calculer les primitives $\int x^2 e^{-x^3}dx$ et $\int xe^{-x}dx$, puis $\int te^{-t^2}dt$.

Solution.

a. Déjà fait (par exemple, dans l'Ex. 34, intégral O.)

b. a) Déjà fait (Ex. 34, intégral P.)

b) $$\int_1^2 \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx = \left[\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f}\underbrace{\ln(x)}_{g}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx$$

$$= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{=0} - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}.$$

c.1) $$\int x^2 e^{-x^3}\,dx = \int e^u\left(-\frac{1}{3}\,du\right) = -\frac{1}{3}\int e^u\,du = -\frac{1}{3}e^u = -\frac{1}{3}e^{-x^3}.$$

$u = -x^3$

$du = -3x^2\,dx$

$x^2\,dx = -\frac{1}{3}\,du$

c.2) $$\int \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{e^{-x}}_{f'}\,dx = \underbrace{-e^{-x}}_{f}\cdot\underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$= -e^{-x}(x+1).$$

$f = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

c.3) $$\int t\,e^{-t^2}\,dt = \int e^u\left(-\frac{1}{2}\,du\right) = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}e^{-t^2}.$$

$u = -t^2$

$du = -2t\,dt$

$t\,dt = -\frac{1}{2}\,du$

Exercice 36. On veut calculer sur $\mathbb{R}_+$ la primitive : $F(x)=\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

a. Montrer que si on procède au changement de variable : $u=\sqrt{x}+1$, on obtient $x=(u-1)^2$ et : $F(x)=2\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du$, [en précisant l'intervalle considéré pour u.] ⊛

b. Prouver que : $\forall x>0,\ F(x)=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)$. $+\,2$

mais pour nous n'est pas importante...

c. Calculer l'intégrale : $K=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$.

Solution.

a. $$u=\sqrt{x}+1 \iff \sqrt{x}=u-1 \implies x=(u-1)^2$$

⊛ [Puisque $\sqrt{x}$ est définie pour $x\geq 0$, on a $u=\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}+1\geq 1$]

$$\leadsto\ x=x(u)=(u-1)^2=u^2-2u+1$$

$$x'(u)=2u-2$$

dérivée de $x(u)$ par rapport à la variable u

$$dx=x'(u)\,du=(2u-2)\,du$$

Donc $$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{1}{u}(2u-2)\,du=2\int\frac{u-1}{u}du$$
$$=2\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du$$

b. Pour tout $x>0$ (mais aussi $x\geq 0$), on a

$$F(x)=2\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du=2\left(u-\overbrace{\ln|u|}^{=\ln(u)}\right)$$

$u\geq 1 \implies |u|=u$

$$\overset{u=\sqrt{x}+1}{=}2\left(\sqrt{x}+1-\ln(\sqrt{x}+1)\right)=2\sqrt{x}+\cancel{2}-2\ln(\sqrt{x}+1)$$

Rappel : les constantes ne sont pas importantes...

c. $$K=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\Big[2\sqrt{x}+2-2\ln(\sqrt{x}+1)\Big]_0^1=2+\cancel{2}-2\ln(2)-\big(0+\cancel{2}-2\underbrace{\ln(1)}_{=0}\big)$$

en effet...

$$=2-2\ln(2).$$