Tutorato di Algebra Lineare

CdL in Fisica (corso B) - Università di Pisa

26 Marzo 2025

Esercizi

Esercizio 1 (Riscaldamento I)**.** Data la la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}),$$

determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ (rispetto al prodotto hermitiano standard) costituita da autovettori per A.

Esercizio 2 (Riscaldamento II, ispirato da un esercizio del secondo compitino del 17/12/2009)**.** Siano A, B matrici simmetriche in $\mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tali che $A^4 = B^4 = I$.

1. Mostrare che $\mathrm{tr}(A)$ è un numero intero pari.
2. Se $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, è vero che A e B sono simili?

Esercizio 3 (Dal tutorato del 21/03/2024)**.** Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard. Sia W il sottospazio di equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e sia U il sottospazio di equazione cartesiana $x_1 - x_2 = 0$. Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \colon f \text{ autoaggiunto}, \ f(U) \subseteq W, \ f(W) \subseteq U \right\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ e determinarne la dimensione.

Esercizio 4 (Dal compito del 14/09/2006)**.** Sia $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e sia $\varphi \colon V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\!AB)$. Per ogni M in V, sia f_M l'endomorfismo di V definito da $f_M(A) = AM + A$.

1. Verificare che φ definisce un prodotto scalare definito positivo.
2. Determinare le matrici M in V per cui f_M è autoaggiunto rispetto a φ.
3. Sia ora $n = 2$. Fissata $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinare, se esiste, una base ortonormale di (V, φ) costituita da autovettori per f_M.

Soluzioni

Soluzione 1. Poiché A è una matrice hermitiana, il teorema spettrale hermitiano garantisce l'esistenza di una tale base. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = t(t-2)$. Con procedimenti standard si trova

$$V_0(A) = \ker(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad V_2(A) = \ker(A-2I) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Poiché A è hermitiana, due autovettori relativi ad autovalori distinti sono necessariamente ortogonali, quindi una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ si ottiene normalizzando i generatori degli autospazi precedenti.

Soluzione 2. Per il teorema spettrale, le matrici A, B sono diagonalizzabili e hanno autovalori reali. Poiché $A^4 = B^4 = I$, i polinomi minimi di A e B sono divisori del polinomio $t^4 - 1$, che ammette le sole radici reali ± 1. In particolare, gli autovalori di A e B possono essere solo ± 1.

1. La traccia di A è la somma dei suoi autovalori, quindi è la somma di quattro numeri interi dispari, cioè un intero pari.

2. Se $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, allora le molteplicità algebriche di ± 1 per A e B coincidono.

   > Infatti, siano $m_A(\pm 1)$ e $m_B(\pm 1)$ rispettivamente le molteplicità algebriche di ± 1 per A e B. Allora
   >
   > $$\operatorname{tr}(A) = m_A(1) - m_A(-1) = m_A(1) - (4 - m_A(1)) = 2m_A(1) - 4$$
   >
   > e analogamente $\operatorname{tr}(B) = 2m_B(1) - 4$. Quindi $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ se e solo se $m_A(1) = m_B(1)$ e (quindi) $m_A(-1) = m_B(-1)$.

   Ne consegue che le matrici diagonali che rappresentano A e B (in una qualche base) coincidono a meno di permutare le entrate della diagonale. Quindi A e B sono simili.

Soluzione 3. Innanzitutto verifichiamo che $\mathcal{F}$ è un sottospazio di $\operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$. Sicuramente $\mathcal{F}$ contiene l'endomorfismo nullo. Inoltre, se f e g sono endomorfismi in $\mathcal{F}$, si ha

$$(f+g)(U) \subseteq f(U) + g(U) \subseteq W + W = W$$

e analogamente $(f+g)(W) \subseteq U$. Inoltre, poiché f e g sono autoaggiunti, per ogni v_1, v_2 in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$\langle (f+g)(v_1), v_2 \rangle = \langle f(v_1), v_2 \rangle + \langle g(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle + \langle v_1, g(v_2) \rangle = \langle v_1, (f+g)(v_2) \rangle,$$

quindi anche $f + g$ è autoaggiunto. La chiusura per prodotto per scalare è analoga.

Procediamo al calcolo della dimensione di $\mathcal{F}$. Sia f un endomorfismo in $\mathcal{F}$. Osserviamo innanzitutto che $U \cap W$ è un sottospazio f-invariante, infatti $f(U \cap W) \subseteq f(U) \cap f(W) \subseteq W \cap U$. Un semplice calcolo mostra che $U \cap W$ è il sottospazio generato dal vettore ${}^t(1,1,-2)$, che quindi è un autovettore per f. Sia v il vettore ottenuto normalizzando ${}^t(1,1,-2)$. Poiché v è un autovettore per f, esiste λ in $\mathbb{R}$ tale che $f(v) = \lambda v$. Completiamo $\{v\}$ a una base ortonormale $\{v,u\}$ di U e a una base ortonormale $\{v,w\}$ di W. Poiché $f(v)=\lambda v$, le condizioni sui contenimenti si traducono in

$$f(u) = av + bw$$
$$f(w) = cv + du$$

per certi a,b,c,d in $\mathbb{R}$. Notiamo che $\{v,u,w\}$ è una base di $U+W=\mathbb{R}^3$, quindi f è univocamente determinata dalle condizioni precedenti. Poiché v,u e v,w sono coppie di vettori ortogonali, si ha

$$\begin{aligned}\langle f(u),v\rangle &= a\langle v,v\rangle + b\langle w,v\rangle = a\\ \langle f(w),v\rangle &= c\langle v,v\rangle + d\langle u,v\rangle = c\\ \langle f(w),u\rangle &= c\langle v,u\rangle + d\langle u,u\rangle = d.\end{aligned}$$

D'altra parte, poiché f è autoaggiunto, si ha

$$\begin{aligned}a &= \langle f(u),v\rangle = \langle u, f(v)\rangle = \langle u,\lambda v\rangle = 0\\ c &= \langle f(w),v\rangle = \langle w, f(v)\rangle = \langle w,\lambda v\rangle = 0\\ d &= \langle f(w),u\rangle = \langle w, f(u)\rangle = a\langle v,u\rangle + b\langle w,w\rangle = b.\end{aligned}$$

In particolare, abbiamo solo due parametri liberi (λ e b), ogni scelta dei quali fornisce un elemento di $\mathcal{F}$. Concludiamo quindi che $\dim\mathcal{F}=2$.

> Nello specifico, siano f_1, f_2 gli endomorfismi definiti sulla base $\{v,u,w\}$ da $f_1(v)=v$, $f_1(u)=f_1(w)=0$ e $f_2(v)=0$, $f_1(u)=w$, $f_2(w)=u$. Allora f_1,f_2 sono elementi di $\mathcal{F}$ linearmente indipendenti. Inoltre, f_1,f_2 formano una base di $\mathcal{F}$ in quanto ogni f in $\mathcal{F}$ si scrive come $f=\lambda f_1 + bf_2$, con λ, b in $\mathbb{R}$.

Nota. La seconda parte dell'esercizio poteva essere risolta anche "meccanicamente" attraverso l'interpretazione matriciale. Nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, un endomorfismo autoaggiunto f corrisponde a una matrice simmetrica A. Dopo aver determinato esplicitamente una base u_1,u_2 di U e una base w_1,w_2 di W, le condizioni $f(U)\subseteq W$ e $f(W)\subseteq U$ si traducono in $Au_i\in W$ e $Aw_i\in U$ per $i=1,2$. Ciò dà luogo a quattro equazioni lineari nelle sei incognite date dalle entrate della matrice A. Risolvendo il sistema si ottengono solo due parametri liberi per A.

Soluzione 4. 1. La bilinearità di φ segue dalla linearità della traccia e della trasposizione, la simmetria segue dal fatto che la traccia è invariante per trasposizione. Sia A una matrice in V. Indichiamo con A_j la j-esima colonna di A. Allora l'entrata di posto (i,j) della matrice ${}^tAA$ è data da ${}^tA_iA_j=\langle A_i,A_j\rangle$, dove $\langle\ ,\ \rangle$ denota il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$. Poiché quest'ultimo è definito positivo, si ha

$$\varphi(A,A)=\operatorname{tr}({}^tAA)=\sum_{j=1}^n\langle A_j,A_j\rangle \geq 0,$$

con uguaglianza se e solo se ogni addendo è nullo, ossia se e solo se ogni colonna di A è nulla. In particolare φ è un prodotto scalare definito positivo.

2. Mostriamo che f_M è autoaggiunto (rispetto a φ) se e solo se M è una matrice simmetrica. Sappiamo che f_M è autoaggiunto se e solo se $\varphi(f_M(A),B)=\varphi(A,f_M(B))$ per ogni A,B in V.

Osserviamo che per ogni A, B in V si ha

$$\begin{aligned}\varphi(f_M(A), B) &= \operatorname{tr}({}^t(AM)B) + \varphi(A, B),\\ \varphi(A, f_M(B)) &= \operatorname{tr}({}^tA(BM)) + \varphi(A, B).\end{aligned}$$

Ricordando che $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ per ogni X, Y in V, si ha

$$\begin{aligned}\varphi(f_M(A), B) = \varphi(A, f_M(B)) &\iff \operatorname{tr}({}^tM\,{}^tAB) = \operatorname{tr}({}^tABM)\\ &\iff \operatorname{tr}(B\,{}^tM\,{}^tA) = \operatorname{tr}(BM\,{}^tA)\\ &\iff \operatorname{tr}(B\,({}^tM - M)\,{}^tA) = 0. \qquad (*)\end{aligned}$$

Quindi f_M è autoaggiunto se e solo se l'identità $(*)$ vale per ogni A, B in V. Quest'ultima è sicuramente verificata se M è simmetrica. Viceversa, assumiamo che $(*)$ valga per ogni A, B in V. Sia $R = {}^tM - M$ e sia $r \geq 0$ il rango di R. Per SD-equivalenza, esistono S, D in V tali che

$$SRD = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix},$$

dove I_r è la matrice identità di taglia r. Allora $\operatorname{tr}(SRD) = r$. Applicando $(*)$ con $B = S$ e $A = {}^tD$ troviamo $r = 0$, ossia $R = 0$.

3. Poiché M è simmetrica, per il punto precedente f_M è autoaggiunto, quindi il teorema spettrale garantisce l'esistenza di una tale base. Per costruirne una, determiniamo dapprima gli autovalori di f_M (che sappiamo essere tutti reali). Sia λ un numero reale e sia X una matrice in V non nulla. Allora $f_M(X) = \lambda X$ se e solo se $X(M + (1-\lambda)I) = 0$, ossia

$$X \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0. \qquad (**)$$

Poiché X è non nulla, la matrice $M + (1-\lambda)I$ non è invertibile (altrimenti, moltiplicando $(**)$ a destra per la sua inversa si avrebbe $X = 0$), quindi $\det(M + (1-\lambda)I) = \lambda^2 - 2\lambda = 0$. In particolare f_M può avere solo 0 e 2 come autovalori. Un semplice calcolo mostra che l'equazione $(**)$ ammette come soluzioni tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} \text{ per } \lambda = 0, \qquad \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \text{ per } \lambda = 2,$$

con a, b in $\mathbb{R}$. Dunque una base di autovettori per f_M è data da

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo diretto mostra che $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(X_3, X_4) = 0$. Infine, poiché f_M è autoaggiunto, autovettori relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali, quindi X_1, X_2, X_3, X_4 è una base ortogonale di (V, φ). Per ottenere una base ortonormale, basta normalizzare la precedente (in questo caso ogni matrice è riscalata di un fattore $1/2$).