Stable commutator length e Teorema di Bavard

Alessio Di Prisa

Molti problemi che sorgono naturalmente in ambito geometrico e topologico possono essere ricondotti alla ricerca di una superficie di genere minimo, in un'opportuna classe di superfici in uno spazio X.
Un problema algebrico analogo a questo è il seguente: dato un gruppo G e un elemento g nel derivato $[G, G]$, determinare la sua *commutator length* $\mathrm{cl}(g)$ ovvero il minimo intero n per cui g può essere scritto come prodotto di n commutatori.
Sia infatti X uno spazio topologico con gruppo fondamentale isomorfo a G e γ un laccio in X che rappresenta g in $\pi_1(X)$. Allora la commutator length di g può essere interpretata come il minimo genere di una superficie S connessa, compatta, orientabile e con una componente di bordo per la quale esiste un'applicazione continua $S \longrightarrow X$ per cui ∂S viene mappato in γ.
Calcolare la commutator length di un elemento G è non banale anche nel caso di gruppi finiti. Un problema più agilmente affrontabile è determinare la *stable commutator length*, definita come

$$\mathrm{scl}(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(g^n)}{n}.$$

In termini topologici, con le notazioni precedenti, risulta che

$$\mathrm{scl}(g) = \inf \frac{-\chi^-(S)}{2n(S)}$$

dove $-\chi^-(\cdot)$ è una funzione della caratteristica di Eulero di S e l'estremo inferiore è preso al variare delle superfici S compatte e orientate, non necessariamente connesse, per le quali esiste un'applicazione $S \longrightarrow X$ che mappi l'i-esima componente di bordo di S in una potenza γ^{k_i}, e $n(S) = \sum k_i$.
Tale problema risulta essere strettamente legato ad uno di natura omologica: preso b nello *spazio* $B_1(G)$ *degli 1-bordi* del *bar complex* di G o, equivalentemente, nello spazio degli 1-bordi singolari o simpliciali di uno spazio $K(G, 1)$, calcolarne la *boundary norm*, che può essere vista come la "minima complessità" di una 2-catena C il cui bordo sia b.
Il problema in linguaggio omologico ha un'interpretazione duale nei termini della *coomologia limitata* e dei *quasimorfismi*. Questi sono funzioni $\phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui esiste una costante $D \geq 0$ con

$$|\phi(g_1 g_2) - \phi(g_1) - \phi(g_2)| \leq D$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$. La minima di tali costanti D per cui vale la disuguaglianza è detto *difetto* di ϕ e lo si indica con $D(\phi)$.

Il risultato principale che arriveremo a mostrare è Teorema di dualità di Bavard, che precisa il legame di quest'ultimo punto di vista con la stable commutator length: posto $Q(G)$ lo spazio dei quasimorfismi *omogenei*, cioè dei quasimorfismi ϕ per cui $\phi(g^n) = n\phi(g)$ per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$, e $H^1(G)$ quello degli omomorfismi da G in $\mathbb{R}$, il difetto $D(\cdot)$ induce una norma su $Q(G)/H^1(G)$ e vale

$$\mathrm{scl}(a) = \frac{1}{2} \sup_{\phi \in Q(G)/H^1(G)} \frac{|\phi(a)|}{D(\phi)}.$$

Infine descriveremo un'applicazione del Teorema di Bavard al calcolo della stable commutator length nel caso di gruppi che *soddisfano una legge*, per i quali $\mathrm{scl}(\cdot)$ risulta essere identicamente nulla sul sottogruppo dei commutatori.