Categorie Monoidali e Teorema di Coerenza di MacLane

Alessio Di Prisa

09/04/2021

Categorie monoidali

Definizione

Una *categoria monoidale stretta* è una terna $(C, \otimes, e)$ dove

- $\mathcal{C}$ è una categoria
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ è un funtore
- e è un oggetto di C

Categorie monoidali

Definizione

Una *categoria monoidale stretta* è una terna $(\mathcal{C}, \otimes, e)$ dove

- $\mathcal{C}$ è una categoria
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ è un funtore
- e è un oggetto di $\mathcal{C}$

che soddisfano le seguenti proprietà:

- $\otimes$ è associativo, ovvero
  $- \otimes (- \otimes -) = (- \otimes -) \otimes - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- e è un'unità destra e sinistra per $\otimes$, cioè
  $- \otimes e = \mathbb{1}_{\mathcal{C}} = e \otimes - : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$

Categorie monoidali

Esempio

Data $\mathcal{C}$ una categoria e indichiamo con $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ la categoria dei suoi endofuntori. Allora $(\mathrm{End}(\mathcal{C}), \circ, \mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ è una categoria monoidale stretta.

Categorie monoidali

Definizione

Una *categoria monoidale* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ è il dato di:

- una categoria $\mathcal{C}$
- un funtore $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- un oggetto $e \in \mathcal{C}$

Categorie monoidali

Definizione

Una *categoria monoidale* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ è il dato di:

- una categoria $\mathcal{C}$
- un funtore $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- un oggetto $e \in \mathcal{C}$

per cui

- $\otimes$ è associativo a meno di un isomorfismo naturale $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \Longrightarrow - \otimes (- \otimes -)$, detto *associatore*
- e è un'unità destra e sinistra a meno degli isomorfismi naturali

$$\lambda : e \otimes - \Longrightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$$

$$\rho : - \otimes e \Longrightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$$

Categorie monoidali

Richiediamo poi che valga l'*identità triangolare*

$$\begin{tikzcd}
a \otimes (e \otimes b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "1\otimes\lambda"'] & & (a \otimes e) \otimes b \arrow[dl, "\rho\otimes 1"] \\
& a \otimes b &
\end{tikzcd}$$

Categorie monoidali

Ed infine l'*identità del pentagramma*, cioè che per ogni $a, b, c, d \in \mathcal{C}$, il diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd}
a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[rr, "\alpha"] & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \arrow[d, "\alpha \otimes 1"] \\
a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[u, "1 \otimes \alpha"] \arrow[dr, "\alpha"] & & ((a \otimes b) \otimes c) \otimes d \\
& (a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \arrow[ur, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

Categorie monoidali

Esempio

Sia κ un campo, allora $(\mathbf{Vect}_\kappa, \otimes, \kappa, \alpha, \lambda, \rho)$ è una categoria monoidale, dove l'associatore è dato da

$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$$

$$(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$$

mentre λ e ρ

$$X \otimes \kappa \xrightarrow{\rho} X \xleftarrow{\lambda} \kappa \otimes X$$

$$x \otimes a \longmapsto ax \longleftarrow a \otimes x$$

Categorie monoidali

Esempio

Una categoria $\mathcal{C}$ dotata di (co)prodotti finiti è in modo naturale una categoria monoidale:

Categorie monoidali

Esempio

Una categoria $\mathcal{C}$ dotata di (co)prodotti finiti è in modo naturale una categoria monoidale:

- $(a, b) \longmapsto a \times b \ \ (a \sqcup b)$ si estende ad un funtore $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,

Categorie monoidali

Esempio

Una categoria $\mathcal{C}$ dotata di (co)prodotti finiti è in modo naturale una categoria monoidale:

- $(a, b) \longmapsto a \times b \ \ (a \sqcup b)$ si estende ad un funtore $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,
- l'oggetto finale (iniziale) è l'unità per il (co)prodotto binario,

Categorie monoidali

Esempio

Una categoria $\mathcal{C}$ dotata di (co)prodotti finiti è in modo naturale una categoria monoidale:

- $(a, b) \longmapsto a \times b \ \ (a \sqcup b)$ si estende ad un funtore $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,
- l'oggetto finale (iniziale) è l'unità per il (co)prodotto binario,
- α, λ, ρ si ottengono dalla proprietà universale dei (co)limiti.

Funtori monoidali

Un funtore monoidale $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \lambda', \rho')$ è dato da una tripla (F, J, φ) dove:

- $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ è un funtore
- $J_{X,Y} : F(X \otimes Y) \longrightarrow F(X) \otimes' F(Y)$ è un isomorfismo naturale
- $\varphi : F(e) \longrightarrow e'$ è un isomorfismo.

Funtori monoidali

Richiediamo inoltre che J e φ siano compatibili con gli associatori e le unità, ovvero che i seguenti diagrammi commutino:

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[r, "\alpha'"] & (F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \\
F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[u, "1 \otimes' J"] & F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[u, "J \otimes' 1"'] \\
F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[u, "J"] \arrow[r, "F\alpha"] & F((X \otimes Y) \otimes Z), \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}
$$

Funtori monoidali

Richiediamo inoltre che J e φ siano compatibili con gli associatori e le unità, ovvero che i seguenti diagrammi commutino:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[r, "\alpha'"] & (F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \\
F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[u, "1 \otimes' J"] & F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[u, "J \otimes' 1"'] \\
F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[u, "J"] \arrow[r, "F\alpha"] & F((X \otimes Y) \otimes Z), \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' e' \arrow[r, "\rho'"] & F(X) \\
F(X) \otimes' F(e) \arrow[u, "1 \otimes' \varphi"] & F(X \otimes e), \arrow[l, "J"] \arrow[u, "F\rho"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e' \otimes F(X) \arrow[r, "\lambda'"] & F(X) \\
F(e) \otimes' F(X) \arrow[u, "\varphi \otimes' 1"] & F(e \otimes X). \arrow[l, "J"] \arrow[u, "F\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Funtori monoidali

Esempio

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie con prodotti finiti, dotate della struttura monoidale indotta. Un funtore $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ che preservi tali limiti è naturalmente un funtore monoidale, definendo J e φ tramite la proprietà universale.

Funtori monoidali

Esempio

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie con prodotti finiti, dotate della struttura monoidale indotta. Un funtore $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ che preservi tali limiti è naturalmente un funtore monoidale, definendo J e φ tramite la proprietà universale.

Esempio

I funtori $\pi_n : (\mathbf{Top}_*, \times, *) \longrightarrow (\mathbf{Grp}, \times, 1)$ sono funtori monoidali.

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0).$$

Categorie monoidali

Definizione

Due categorie monoidali si dicono *monoidalmente equivalenti* se esiste un funtore monoidale tra loro che sia anche un'equivalenza di categorie.

Categorie monoidali

Date le definizioni sorgono spontanee alcune questioni:

- **Coerenza:** Data una k-upla di oggetti di $\mathcal{C}$, come differiscono i prodotti eseguiti inserendo parentesi in modo diverso?

Categorie monoidali

Date le definizioni sorgono spontanee alcune questioni:

- **Coerenza:** Data una k-upla di oggetti di $\mathcal{C}$, come differiscono i prodotti eseguiti inserendo parentesi in modo diverso?
- **Strettificazione:** Quanto differiscono le categorie monoidali da quelle strette? Abbiamo un modo di strettificare una categoria monoidale ottendendone una equivalente?

Strettificazione

Teorema

Ogni categoria monoidale $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ è monoidalmente equivalente ad una categoria monoidale stretta.

Strettificazione

Teorema

Ogni categoria monoidale $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ è monoidalmente equivalente ad una categoria monoidale stretta.

Idea

$$L : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Set}(M, M)$$

$$m \longmapsto (L_m : x \longmapsto mx)$$

$$\mathrm{im}(L) = \{f : M \longrightarrow M \ : \ f(xy) = f(x)y\}$$

Strettificazione

Definiamo $\mathcal{EC}$ la categoria avente come oggetti le coppie (F, t), con $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtore e t isomorfismo naturale $t_{X,Y} : F(X) \otimes Y \longrightarrow F(X \otimes Y)$ per cui il diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
& (F(X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "t\otimes 1"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
F(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "t"'] & & F(X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "t"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "F\alpha"] & & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

Strettificazione

I morfismi $(F, t) \longrightarrow (F', t')$ sono le trasformazioni naturali $\theta : F \Longrightarrow F'$ per cui

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes Y \arrow[r, "t_{X,Y}"] \arrow[d, "\theta_X \otimes 1_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\theta_{X \otimes Y}"] \\
F'(X) \otimes Y \arrow[r, "t'_{X,Y}"'] & F'(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

commuta, mentre la composizione è data dalla composizione verticale delle trasformazioni naturali.

Strettificazione

Inoltre $\mathcal{EC}$ è in modo naturale una categoria monoidale stretta: dati (F^1, t^1) e (F^2, t^2) poniamo $(F^1, t^1) \circ (F^2, t^2) = (F^1 F^2, t)$ dove $t_{X,Y}$ è dato dalla composizione

$$F^1 F^2(X) \otimes Y \xrightarrow{t^1_{F^2 X, Y}} F^1(F^2 X \otimes Y) \xrightarrow{F^1(t^2_{X,Y})} F^1 F^2(X \otimes Y).$$

L'unità del prodotto è il funtore identità $(1_{\mathcal{C}}, 1)$.

Strettificazione

Consideriamo allora il funtore dato dal prodotto a sinistra

$$L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}\mathcal{C}$$

$$X \longmapsto (X \otimes -, \alpha_{X,-,-})$$

$$f \longmapsto f \otimes 1_- .$$

Mostriamo in primo luogo che L è un'equivalenza di categorie.

Strettificazione

Preso $(F,t) \in \mathcal{EC}$ abbiamo un isomorfismo naturale dato da $F\rho_- \circ t_{e,-} : L(Fe) \Longrightarrow (F,t)$.
Infatti per ogni $f : X \longrightarrow Y$, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
Fe \otimes X \arrow[r, "1_{Fe} \otimes f"] \arrow[d, "t_{e,X}"] & Fe \otimes Y \arrow[d, "t_{e,Y}"] \\
F(e \otimes X) \arrow[r, "F(1 \otimes f)"] \arrow[d, "F\lambda_X"] & F(e \otimes Y) \arrow[d, "F\lambda_Y"] \\
F(X) \arrow[r, "Ff"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

è commutativo, e le frecce verticali sono isomorfismi. Dunque il funtore L è essenzialmente surgettivo.

Strettificazione

Si vede poi facilmente che L è pienamente fedele: abbiamo una bigezione naturale

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{EC}}(L(X), L(Y))$$

Strettificazione

Si vede poi facilmente che L è pienamente fedele: abbiamo una bigezione naturale

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{EC}}(L(X), L(Y))$$

indotta da

$$\begin{tikzcd} X \otimes e \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "\theta_e"'] & X \arrow[d, "f = \rho_Y \theta_e \rho_X^{-1}"] \\ Y \otimes e \arrow[r, "\rho_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Dunque L è un'equivalenza di categorie.

Strettificazione

Diamo adesso ad L una struttura di funtore monoidale.
L'isomorfismo $\varphi : L(e) \longrightarrow (1_{\mathcal{C}}, 1)$ è dato semplicemente da λ, mentre $J_{X,Y} = \alpha_{X,Y,-}$ ci dà un isomorfismo naturale

$$\alpha_{X,Y,-} : L(X \otimes Y) \longrightarrow L(X) \circ L(Y).$$

In tal modo (L, J, φ) è l'equivalenza monoidale voluta.

Coerenza

Definizione

Definiamo i *prodotti formali* come le parole ottenute ricorsivamente:

- *prodotto vuoto* e_0, $\mathrm{len}(e_0) = 0$,
- *placeholder* $(-)$, $\mathrm{len}((-)) = 1$,
- dati v, w prodotti formali, $(v \otimes w)$ è un prodotto formale di lunghezza $\mathrm{len}(v) + \mathrm{len}(w)$.

Coerenza

Definiamo quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ il grafo G_n avente:

- un vertice per ogni parola v con $\mathrm{len}(v) = n$
- un arco orientato per ognuna delle configurazioni descritte sotto

$$
\begin{array}{ccccc}
\dots(u \otimes (v \otimes w))\dots & \qquad & \dots(v \otimes e_0)\dots & \qquad & \dots(e_0 \otimes v)\dots \\
\Big\downarrow \alpha & & \Big\downarrow \rho & & \Big\downarrow \lambda \\
\dots((u \otimes v) \otimes w)\dots & & \dots(v)\dots & & \dots(v)\dots
\end{array}
$$

Coerenza

Dati $X_1, \ldots, X_n$ oggetti di $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$, consideriamo il diagramma $G_n(X_1, \ldots, X_n)$ in $\mathcal{C}$ ottenuto

- sostituendo gli X_i nei placeholder (ordinatamente),
- e_0 con l'unità e,
- gli archi di G_n con i corrispondenti isomorfismi naturali in $\mathcal{C}$.

Coerenza

Dati $X_1, \ldots, X_n$ oggetti di $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$, consideriamo il diagramma $G_n(X_1, \ldots, X_n)$ in $\mathcal{C}$ ottenuto

- sostituendo gli X_i nei placeholder (ordinatamente),
- e_0 con l'unità e,
- gli archi di G_n con i corrispondenti isomorfismi naturali in $\mathcal{C}$.

Teorema (di coerenza di MacLane)

Il diagramma $G_n(X_1, \ldots, X_n)$ è un diagramma commutativo in $\mathcal{C}$.

Coerenza

Sia (F, J, φ) un'equivalenza monoidale $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ con una categoria monoidale stretta $(\mathcal{C}', \otimes', e')$. Costruiamo un prisma in $\mathcal{C}'$ avente come basi $F(G_n(X_1, \ldots, X_n))$ e $G_n(FX_1, \ldots, FX_n)$ e facce laterali date da J.

$$\begin{array}{ccc}
F(\ldots(X_i \otimes (X_{i+1} \otimes X_{i+2}))\ldots) & \xrightarrow{\alpha} & F(\ldots((X_i \otimes X_{i+1}) \otimes X_{i+2})\ldots) \\
\Big\downarrow J & & \Big\downarrow J \\
\ldots(FX_i \otimes (FX_{i+1} \otimes FX_{i+2})) & \xrightarrow{\alpha'} & \ldots((FX_i \otimes FX_{i+1}) \otimes FX_{i+2})\ldots
\end{array}$$

Coerenza

Sappiamo adesso che:

- ogni mappa nel diagramma è un isomorfismo,
- le facce laterali commutano per costruzione,
- la base data da $G_n(FX_1, \ldots, FX_n)$ è commutativa, essendo $\mathcal{C}'$ una categoria monoidale stretta.

Segue che la base $F(G_n(X_1, \ldots, X_n))$ è commutativa, e quindi che il diagramma $G_n(X_1, \ldots, X_n)$ è commutativo in $\mathcal{C}$.

Coerenza

Corollario

Dati $X_1, \ldots, X_n$ oggetti di $\mathcal{C}$, due qualunque modi di formare un prodotto ordinato di questi, eventualmente inserendo un numero arbitrario di unità, sono canonicamente isomorfi.

Bibliografia

- *Tensor Categories*
  P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, 2015
- *Categories for the Working Mathematician*
  S. MacLane, 1971
- *Braided tensor categories*
  A. Joyal, R. Street, 1993