Line bundles e fattori di automorfia

Alessio Di Prisa

25/11/2020

1. Preliminari
2. Line bundles e rivestimenti
3. Fattori di automorfia
4. Line bundles su tori
5. Generalizzazione
6. Appendice
7. Bibliografia

Rivestimenti normali

Definizione

Data M varietà complessa, un rivestimento $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ si dice *normale* se $p_*(\pi_1(\widetilde{M})) \lhd \pi_1(M)$.

Rivestimenti normali

Definizione

Data M varietà complessa, un rivestimento $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ si dice *normale* se $p_*(\pi_1(\widetilde{M})) \lhd \pi_1(M)$.

In tal caso si ha

- $\pi_1(M)/\pi_1(\widetilde{M}) \cong \mathrm{Deck}(\widetilde{M}/M) = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M}) : p \circ \gamma = p\}$
- $\mathrm{Deck}(\widetilde{M}/M)$ agisce in modo libero e propriamente discontinuo
- $M \cong \widetilde{M}/\mathrm{Deck}(\widetilde{M}/M)$

Rivestimenti normali

Definizione

Data M varietà complessa, un rivestimento $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ si dice *normale* se $p_*(\pi_1(\widetilde{M})) \lhd \pi_1(M)$.

In tal caso si ha

- $\pi_1(M)/\pi_1(\widetilde{M}) \cong \mathrm{Deck}(\widetilde{M}/M) = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M}) : p \circ \gamma = p\}$
- $\mathrm{Deck}(\widetilde{M}/M)$ agisce in modo libero e propriamente discontinuo
- $M \cong \widetilde{M}/\,\mathrm{Deck}(\widetilde{M}/M)$

Quindi sono tutti e soli $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ con $\Gamma < \mathrm{Aut}(\widetilde{M})$.

Coomologia di gruppi

Definizione

Sia Γ un gruppo. Un gruppo abeliano V dotato di un'azione $\Gamma \longrightarrow Aut(V)$ è detto Γ-modulo.
Un omomorfismo $V \longrightarrow W$ è detto Γ-lineare se è invariante per l'azione di Γ.

Coomologia di gruppi

Definizione

Sia Γ un gruppo. Un gruppo abeliano V dotato di un'azione $\Gamma \longrightarrow Aut(V)$ è detto Γ-modulo.
Un omomorfismo $V \longrightarrow W$ è detto Γ-lineare se è invariante per l'azione di Γ.

In seguito considereremo l'azione di Γ come un'azione destra

$$V \times \Gamma \longrightarrow V$$

$$(v, g) \longmapsto v \cdot g.$$

Coomologia di gruppi

Dato $\Gamma < \mathrm{Aut}(M)$, il gruppo abeliano $H^0(M, \mathcal{O}^*_M)$ ha una struttura di Γ-modulo data da

$$H^0(M, \mathcal{O}^*_M) \times \Gamma \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}^*_M)$$

$$(f, g) \longmapsto f \circ g.$$

Coomologia di gruppi

Definizione

Dato un Γ-modulo V definiamo il *bar complex* associato alla coppia (Γ, V) come il complesso dato in dimensione $n \geq 0$ da

$$C^n(\Gamma, V) = \{f : \Gamma^n \longrightarrow V\}$$

dotato dei differenziali

$$\begin{aligned}\delta^n(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = & f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i \cdot g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + \\ & + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n) \cdot g_{n+1}.\end{aligned}$$

Coomologia di gruppi

Definizione

Definiamo la coomologia di Γ a valori nel Γ-modulo V come l'omologia $H^*(\Gamma, V)$ del complesso $C^*(\Gamma, V)$.

Coomologia di gruppi

Definizione

Definiamo la coomologia di Γ a valori nel Γ-modulo V come l'omologia $H^*(\Gamma, V)$ del complesso $C^*(\Gamma, V)$.

In altre parole ponendo $Z^n(\Gamma, V) = \ker \delta^n$ e $B^n(\Gamma, V) = \operatorname{im} \delta^{n-1}$ si ha

$$H^n(\Gamma, V) = Z^n(\Gamma, V)/B^n(\Gamma, V).$$

Coomologia di gruppi

Definizione

Definiamo la coomologia di Γ a valori nel Γ-modulo V come l'omologia $H^*(\Gamma, V)$ del complesso $C^*(\Gamma, V)$.

In altre parole ponendo $Z^n(\Gamma, V) = \ker \delta^n$ e $B^n(\Gamma, V) = \operatorname{im} \delta^{n-1}$ si ha

$$H^n(\Gamma, V) = Z^n(\Gamma, V)/B^n(\Gamma, V).$$

Osservazione

$H^0(\Gamma, V) = V^\Gamma$ è il sottogruppo di V invariante per l'azione di Γ.

Coomologia di gruppi

Tramite un morfismo $\varphi : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$, un Γ-modulo V diventa un Γ'-modulo.
Abbiamo allora

$$\varphi^* : H^*(\Gamma, V) \longrightarrow H^*(\Gamma', V)$$

$$[f] \longmapsto [f \circ \varphi^n] \, .$$

Coomologia di gruppi

Tramite un morfismo $\varphi : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$, un Γ-modulo V diventa un Γ'-modulo.
Abbiamo allora

$$\varphi^* : H^*(\Gamma, V) \longrightarrow H^*(\Gamma', V)$$

$$[f] \longmapsto [f \circ \varphi^n]\,.$$

Invece una mappa Γ-lineare $\psi : V \longrightarrow W$ induce

$$\psi^* : H^*(\Gamma, V) \longrightarrow H^*(\Gamma, W)$$

$$[f] \longmapsto [\psi \circ f]\,.$$

Line bundles e rivestimenti

Definizione

Sia $f : M \longrightarrow N$ tra varietà complesse e sia $E \xrightarrow{\pi} N$. Definiamo il *pullback* di E come il fibrato vettoriale $f^*E = \{(x, v) \in M \times E \,:\, f(x) = \pi(v)\}$.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Line bundles e rivestimenti

Fissiamo un rivestimento normale $p : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma = M$.

Line bundles e rivestimenti

Fissiamo un rivestimento normale $p : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma = M$.
Ricordiamo che $\mathrm{Pic}(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$.

Line bundles e rivestimenti

Fissiamo un rivestimento normale $p : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma = M$.
Ricordiamo che $\mathrm{Pic}(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$.
Ci interessa $\ker p^*$ dove

$$p^* : H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}^*)$$

$$[E] \longmapsto [p^* E]$$

$$[g_{ij}, \{U_i\}_{i \in I}] \longmapsto \left[g_{ij} \circ p, \{p^{-1}(U_i)\}_{i \in I}\right]$$

Line bundles e rivestimenti

Teorema

Esiste un isomorfismo canonico

$$H^1\left(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})\right) \longrightarrow \ker(p^*).$$

Line bundles e rivestimenti

Teorema

Esiste un isomorfismo canonico

$$H^1\left(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})\right) \longrightarrow \ker(p^*).$$

Vediamo $f \in C^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$ come una funzione olomorfa $f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

Allora $f \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$ se e solo se

$$f(\gamma_1\gamma_2, x) = f(\gamma_1, \gamma_2 x) f(\gamma_2, x).$$

Line bundles e rivestimenti

Teorema

Esiste un isomorfismo canonico

$$H^1\left(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})\right) \longrightarrow \ker(p^*).$$

Vediamo $f \in C^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$ come una funzione olomorfa $f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.
Allora $f \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$ se e solo se

$$f(\gamma_1\gamma_2, x) = f(\gamma_1, \gamma_2 x) f(\gamma_2, x).$$

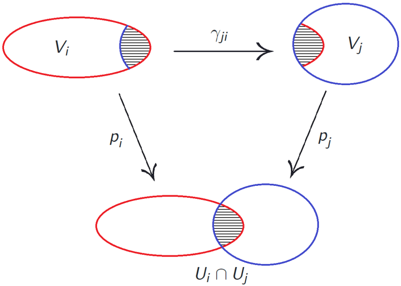
Osserviamo che per $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ otteniamo $f(1, x) = 1 \ \forall x \in \widetilde{M}$.

Line bundles e rivestimenti

- $\{V_i\}_{i\in I}$ ricoprimento di $\widetilde{M}$;
- $V_i \xrightarrow{\cong} p(V_i) = U_i$ con $p_i = p_{|V_i}$;
- $\{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento di M.

Line bundles e rivestimenti

- $\{V_i\}_{i\in I}$ ricoprimento di $\widetilde{M}$;
- $V_i \xrightarrow{\cong} p(V_i) = U_i$ con $p_i = p_{|V_i}$;
- $\{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento di M.



Line bundles e rivestimenti

A $f \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})$ associamo

$$g_{ji} = f(\gamma_{ji}, p_i^{-1}) : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$x \longmapsto f(\gamma_{ji}, p_i^{-1}(x))$$

Line bundles e rivestimenti

A $f \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})$ associamo

$$g_{ji} = f(\gamma_{ji}, p_i^{-1}) : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$x \longmapsto f(\gamma_{ji}, p_i^{-1}(x))$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{ji} p_i^{-1} = p_j^{-1} \text{ su } U_i \cap U_j \\ \delta^1(f) = 1 \end{array}\right\} \implies g_{ki} = g_{kj} gji.$$

Line bundles e rivestimenti

Se $x \in V_i \cap V_j$ allora $p_i^{-1}(p(x)) = p_j^{-1}(p(x)) \implies \gamma_{ji} = 1$, quindi

$$g_{ij} \circ p = f(\gamma_{ij}, \cdot) = f(1, \cdot) = 1$$

ovvero il pullback ha f.d.t banali sul ricoprimento $\{V_i\}_{i \in I}$.

Line bundles e rivestimenti

Se $x \in V_i \cap V_j$ allora $p_i^{-1}(p(x)) = p_j^{-1}(p(x)) \implies \gamma_{ji} = 1$, quindi

$$g_{ij} \circ p = f(\gamma_{ij}, \cdot) = f(1, \cdot) = 1$$

ovvero il pullback ha f.d.t banali sul ricoprimento $\{V_i\}_{i \in I}$.
Inoltre si vede facilmente che

$$f = \delta^0(h) \implies g_{ji} = h \circ (p_i)^{-1} / h \circ (p_j)^{-1}.$$

Line bundles e rivestimenti

Se $x \in V_i \cap V_j$ allora $p_i^{-1}(p(x)) = p_j^{-1}(p(x)) \implies \gamma_{ji} = 1$, quindi

$$g_{ij} \circ p = f(\gamma_{ij}, \cdot) = f(1, \cdot) = 1$$

ovvero il pullback ha f.d.t banali sul ricoprimento $\{V_i\}_{i \in I}$.
Inoltre si vede facilmente che

$$f = \delta^0(h) \implies g_{ji} = h \circ (p_i)^{-1} / h \circ (p_j)^{-1}.$$

Dunque otteniamo

$$H^1\left(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})\right) \longrightarrow \ker(p^*).$$

Line bundles e rivestimenti

Sia $E \in \mathrm{Pic}(M)$ con p^*E banale.

$$\begin{tikzcd}
p^*E \arrow[r, dashed, "\gamma"] \arrow[d] & p^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & \widetilde{M} \arrow[r, "p"] & M
\end{tikzcd}$$

Line bundles e rivestimenti

Sia $E \in \mathrm{Pic}(M)$ con p^*E banale.

$$\begin{tikzcd}
p^*E \arrow[r, dashed, "\gamma"] \arrow[d] & p^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & \widetilde{M} \arrow[r, "p"] & M
\end{tikzcd}$$

Tramite $a : p^*E \longrightarrow \widetilde{M} \times \mathbb{C}$ abbiamo

$$\gamma(x, v) = (\gamma x, f(\gamma, x)v)$$

con $f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ olomorfa che soddisfa

$$f(\gamma_1\gamma_2, x) = f(\gamma_1, \gamma_2 x)f(\gamma_2, x)$$

ovvero $f \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$.

Line bundles e rivestimenti

Un'altra trivializzazione $b : p^*E \longrightarrow \widetilde{M} \times \mathbb{C}^*$ fornisce $g \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$.
$ab^{-1} : \widetilde{M} \times \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{M} \times \mathbb{C}$ è della forma

$$(x, v) \longmapsto (x, h(x)v)$$

con $h : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ olomorfa.

Line bundles e rivestimenti

Un'altra trivializzazione $b : p^*E \longrightarrow \widetilde{M} \times \mathbb{C}^*$ fornisce
$g \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$.
$ab^{-1} : \widetilde{M} \times \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{M} \times \mathbb{C}$ è della forma

$$(x, v) \longmapsto (x, h(x)v)$$

con $h : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ olomorfa.
Vale allora

$$f(\gamma, x) = g(\gamma, x)h(x)h(\gamma x)^{-1},$$

cioé è ben definita una classe in $H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})$ associata ad E.

Line bundles e rivestimenti

Il diagramma commutativo con p, q rivestimenti normali

$$
\begin{array}{ccc}
\widetilde{M} & \xrightarrow{\qquad\widetilde{\varphi}\qquad} & \widetilde{N} \\
\Big\downarrow p & & \Big\downarrow q \\
M = \widetilde{M}/\Gamma_1 & \xrightarrow{\varphi} & N = \widetilde{N}/\Gamma_2
\end{array}
$$

Line bundles e rivestimenti

Il diagramma commutativo con p, q rivestimenti normali

$$
\begin{array}{ccc}
\widetilde{M} & \xrightarrow{\qquad\widetilde{\varphi}\qquad} & \widetilde{N} \\
\Big\downarrow p & & \Big\downarrow q \\
M = \widetilde{M}/\Gamma_1 & \xrightarrow{\varphi} & N = \widetilde{N}/\Gamma_2
\end{array}
$$

induce

$$
\begin{array}{ccc}
\pi_1(\widetilde{M}) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_*} & \pi_1(\widetilde{N}) \\
\Big\downarrow p_* & & \Big\downarrow q_* \\
\pi_1(M) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(N)
\end{array}
$$

Line bundles e rivestimenti

Il diagramma commutativo con p, q rivestimenti normali

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\qquad\widetilde{\varphi}\qquad} & \widetilde{N} \\ \big\downarrow p & & \big\downarrow q \\ M = \widetilde{M}/\Gamma_1 & \xrightarrow{\varphi} & N = \widetilde{N}/\Gamma_2 \end{array}$$

induce

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{M}) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_*} & \pi_1(\widetilde{N}) \\ \big\downarrow p_* & & \big\downarrow q_* \\ \pi_1(M) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(N) \end{array}$$

Avendo $\Gamma_1 = \pi_1(M)/\pi_1(\widetilde{M})$ e $\Gamma_2 = \pi_1(N)/\pi_1(\widetilde{N})$ abbiamo un morfismo indotto

$$\varphi_* : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2.$$

Line bundles e rivestimenti

La mappa $\widetilde{\varphi}$ induce

$$\widetilde{\varphi}^* : H^0(\widetilde{N}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{N}}) \longrightarrow H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})$$

$$f \longmapsto f \circ \widetilde{\varphi}.$$

Line bundles e rivestimenti

La mappa $\widetilde{\varphi}$ induce

$$\widetilde{\varphi}^* : H^0(\widetilde{N}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{N}}) \longrightarrow H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})$$

$$f \longmapsto f \circ \widetilde{\varphi}.$$

Per funtorialità otteniamo

$$\varphi_* \times \widetilde{\varphi}^* : H^1\left(\Gamma_2, H^0(\widetilde{N}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{N}})\right) \longrightarrow H^1\left(\Gamma_1, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})\right)$$

$$[f] \longmapsto [(\varphi_* \times \widetilde{\varphi}^*)(f)]$$

con

$$(\varphi_* \times \widetilde{\varphi})(f) : \Gamma_1 \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(\gamma, x) \longmapsto f(\varphi_*(\gamma), \widetilde{\varphi}(x)).$$

Line bundles e rivestimenti

Allora il diagramma naturale è commutativo

$$\begin{tikzcd}
H^1\left(\Gamma_2, H^0(\widetilde{N}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{N}})\right) \arrow[r, "\varphi_* \times \widetilde{\varphi}^*"] \arrow[d, "\cong"'] & H^1\left(\Gamma_1, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}})\right) \arrow[d, "\cong"] \\
\ker q^* \arrow[r, "\varphi^*"] & \ker p^*.
\end{tikzcd}$$

Fattori di automorfia

Sia $p : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma = M$ un rivestimento normale.

Definizione

Una mappa olomorfa $f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ per cui per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ e $x \in \widetilde{M}$ valga

$$f(\gamma_1\gamma_2, x) = f(\gamma_1, \gamma_2 x) f(\gamma_2, x)$$

è detta *fattore di automorfia*.

Fattori di automorfia

Sia $p : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma = M$ un rivestimento normale.

Definizione

Una mappa olomorfa $f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ per cui per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ e $x \in \widetilde{M}$ valga

$$f(\gamma_1\gamma_2, x) = f(\gamma_1, \gamma_2 x) f(\gamma_2, x)$$

è detta *fattore di automorfia*.

Due fattori di automorfia f_1, f_2 si dicono *equivalenti* se esiste $h : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ per cui

$$f_1(\gamma, x) f_2(\gamma, x)^{-1} = h(x) h(\gamma x)^{-1}.$$

Fattori di automorfia

In altre parole:

- un fattore di automorfia è un elemento di $Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$,

Fattori di automorfia

In altre parole:

- un fattore di automorfia è un elemento di $Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$,
- due fattori di automorfia sono equivalenti se e solo se rappresentano la stessa classe in $H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$.

Fattori di automorfia

In altre parole:

- un fattore di automorfia è un elemento di $Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$,
- due fattori di automorfia sono equivalenti se e solo se rappresentano la stessa classe in $H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$.

Indichiamo con $E(f)$ il line bundle dato da $f \in Z^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}^*_{\widetilde{M}}))$.

Theta functions

Sia $f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un fattore di automorfia fissato.

Definizione

Una *f-theta function* è una mappa olomorfa $s : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ per cui

$$s(\gamma x) = f(\gamma, x) s(x).$$

Theta functions

Sia $f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un fattore di automorfia fissato.

Definizione

Una *f-theta function* è una mappa olomorfa $s : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ per cui

$$s(\gamma x) = f(\gamma, x)s(x).$$

L'insieme delle f-theta functions è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Theta functions

Proposizione

Lo spazio delle f-theta functions è naturalmente isomorfo allo spazio delle sezioni olomorfe di $E(f)$.

Theta functions

Proposizione

Lo spazio delle f-theta functions è naturalmente isomorfo allo spazio delle sezioni olomorfe di $E(f)$.

- $\{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di $\widetilde{M}$
- $V_i \xrightarrow{\cong} p(V_i) = U_i$ con $p_i = p_{|V_i}$
- $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di M banalizzante $E(f)$.

Theta functions

Proposizione

Lo spazio delle f-theta functions è naturalmente isomorfo allo spazio delle sezioni olomorfe di $E(f)$.

- $\{V_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di $\widetilde{M}$
- $V_i \xrightarrow{\cong} p(V_i) = U_i$ con $p_i = p_{|V_i}$
- $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di M banalizzante $E(f)$.

Prendiamo una sezione di $E(f)$:

$$s_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$s_i = g_{ij} s_j \text{ su } U_i \cap U_j$$

$$g_{ij}(x) = f(\gamma_{ij}, p_j^{-1}(x)).$$

Theta functions

Definiamo $s : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ come

$$s = s_i \circ p \text{ su } V_i.$$

Theta functions

Definiamo $s : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ come

$$s = s_i \circ p \text{ su } V_i.$$

È ben definita:

$$g_{ij} \circ p = 1 \text{ su } V_i \cap V_j \implies s_i \circ p = (g_{ij} \circ p)(s_j \circ p) = s_j \circ p.$$

Theta functions

Inoltre se $p(y) = x \in U_i$ abbiamo

$$s(\gamma_{ji} y) = s(p_j^{-1}(x)) = s_j(x) = g_{ji}(x) s_i(x) = f(\gamma_{ji}, y) s(y))$$

ovvero s è una f-theta function.

Theta functions

Viceversa sia $s : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ una f-theta function.
Definiamo $s_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ come $s_i(x) = s(p_i^{-1}(x))$.

Theta functions

Viceversa sia $s : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ una f-theta function.
Definiamo $s_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ come $s_i(x) = s(p_i^{-1}(x))$.
Allora per $x \in U_i \cap U_j$

$$s_i(x) = s(\gamma_{ij} p_j^{-1}(x)) = f(\gamma_{ij}, p_j^{-1}(x)) s(p_j^{-1}(x)) = g_{ij}(x) s_j(x)$$

ovvero le s_i definiscono una sezione di $E(f)$.

Line bundles su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$

Proposizione

Tutti i line bundles su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ sono banali.

Line bundles su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$

Proposizione

Tutti i line bundles su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ sono banali.

Sia X uno tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$. Per $\bar{\partial}$-Poincaré vale $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Line bundles su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$

Proposizione

Tutti i line bundles su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ sono banali.

Sia X uno tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$. Per $\bar{\partial}$-Poincaré vale $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

e la relativa successione lunga

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Poiché anche $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ si ha $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = 0$.

Line bundles su tori

Definizione

Un toro complesso (di dimensione 1) è una varietà complessa $X = \mathbb{C}/\Gamma$ con $\Gamma = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ e $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C}$.

Line bundles su tori

Definizione

Un toro complesso (di dimensione 1) è una varietà complessa $X = \mathbb{C}/\Gamma$ con $\Gamma = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ e $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia $X = \mathbb{C}/\Gamma$ un toro. Allora $\mathrm{Pic}(X) = H^1(\Gamma, H^0(\mathbb{C}, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}}))$. Quindi tutti i line bundles provengono da fattori di automorfia $\Gamma \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

Line bundles su tori

Osserviamo che possiamo:

1. applicare $\mathbb{C} \xrightarrow{\cdot\omega_1^{-1}} \mathbb{C}$ e assumere $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, con $\tau = \omega_2/\omega_1$,

Line bundles su tori

Osserviamo che possiamo:

1. applicare $\mathbb{C} \xrightarrow{\cdot\omega_1^{-1}} \mathbb{C}$ e assumere $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, con $\tau = \omega_2/\omega_1$,
2. supporre $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$, a meno di cambiarne in segno.

Line bundles su tori

Osserviamo che possiamo:

1. applicare $\mathbb{C} \xrightarrow{\cdot\omega_1^{-1}} \mathbb{C}$ e assumere $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, con $\tau = \omega_2/\omega_1$,
2. supporre $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$, a meno di cambiarne in segno.

Posto $q = \exp(2\pi i\tau)$ abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\exp(2\pi i\cdot)"'] & \mathbb{C}/\Gamma \arrow[d, dashed, "\cong"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r] & \mathbb{C}^*/\langle q\rangle \end{tikzcd}$$

Line bundles su tori

Osserviamo che possiamo:

1. applicare $\mathbb{C} \xrightarrow{\cdot\omega_1^{-1}} \mathbb{C}$ e assumere $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, con $\tau = \omega_2/\omega_1$,
2. supporre $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$, a meno di cambiarne in segno.

Posto $q = \exp(2\pi i\tau)$ abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\exp(2\pi i\cdot)"'] & \mathbb{C}/\Gamma \arrow[d, dashed, "\cong"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r] & \mathbb{C}^*/\langle q\rangle \end{tikzcd}$$

Dunque ogni toro complesso può essere visto come quoziente $\mathbb{C}^*/\langle q\rangle$, con $q \in \mathbb{C}^*$ e $|q| < 1$.

Line bundles su tori

Teorema

Sia $X = \mathbb{C}^*/\langle q \rangle$. Allora $\mathrm{Pic}(X) = H^1(\langle q \rangle, H^0(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^*}))$.

Cioè tutti i line bundles provengono da fattori di automorfia

$$f : \langle q \rangle \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$f(q^n q^m, x) = f(q^n, q^m x) f(q^m, x).$$

Line bundles e divisori

Proposizione

Sia X superficie di Riemann compatta. Ogni line bundle su X ammette una sezione meromorfa non banale. In particolare

$$\mathrm{Div}(X) \xrightarrow{[\cdot]} \mathrm{Pic}(X)$$

è surgettiva.

Line bundles e divisori

Proposizione

Sia X superficie di Riemann compatta. Ogni line bundle su X ammette una sezione meromorfa non banale. In particolare

$$\mathrm{Div}(X) \xrightarrow{[\cdot]} \mathrm{Pic}(X)$$

è surgettiva.

Ricordiamo che
$\ker[\cdot] = \{D \in \mathrm{Div}(X) \,:\, D = (f),\, f \in H^0(X, \mathcal{M}_X^*)\}$.

Line bundles e divisori

Abbiamo che $\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}x$, ovvero ogni divisore è della forma $\sum_{i=1}^{k} n_i P_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$ e $p_i \in X$.
È ben definito l'omomorfismo

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i P_i \longmapsto \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

Line bundles e divisori

Abbiamo che $\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}x$, ovvero ogni divisore è della forma $\sum_{i=1}^{k} n_i P_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$ e $p_i \in X$.
È ben definito l'omomorfismo

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i P_i \longmapsto \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Indichiamo con $\mathrm{Div}^0(X)$ il kernel della mappa deg.

Line bundles e divisori

Presa $f \in H^0(X, \mathcal{M}_X^*)$ abbiamo

$$\#\{\text{zeri di } f\} = \#\{\text{poli di } f\}$$

quindi $\ker[\cdot] \subseteq \ker(\deg)$.

Line bundles e divisori

Presa $f \in H^0(X, \mathcal{M}_X^*)$ abbiamo

$$\#\{\text{zeri di } f\} = \#\{\text{poli di } f\}$$

quindi $\ker[\cdot] \subseteq \ker(\deg)$.
Allora il grado fattorizza a

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

il cui kernel che indichiamo con $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Line bundles e divisori

Abbiamo una successione esatta che spezza

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Line bundles e divisori

Abbiamo una successione esatta che spezza

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Fissato $E \in \mathrm{Pic}(X)$ con $\deg(E) = 1$ (es: $E = [P]$), abbiamo una sezione di deg

$$s_E : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

$$n \longmapsto E^n.$$

Dunque $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Pic}^0(X) \times \mathbb{Z}$, dove l'isomorfismo dipende da E.

Line bundles e divisori

Lemma

Fissato $P \in X$, abbiamo che $\mathrm{Div}^0(X)$ è generato da $Q - P$ al variare di $Q \in X$.
Di conseguenza $\mathrm{Pic}^0(X)$ è generato da $[Q] - [P]$ al variare di $Q \in X$.

Line bundles e divisori

Lemma

Fissato $P \in X$, abbiamo che $\mathrm{Div}^0(X)$ è generato da $Q - P$ al variare di $Q \in X$.
Di conseguenza $\mathrm{Pic}^0(X)$ è generato da $[Q] - [P]$ al variare di $Q \in X$.

Preso $\sum_{i=1}^k n_i P_i \in \mathrm{Div}^0(X)$ abbiamo $\sum_{i=1}^k n_i = 0$, quindi

$$\sum_{i=1}^k n_i P_i = \sum_{i=1}^k n_i P_i - \left(\sum_{i=1}^k n_i\right) P = \sum_{i=1}^k n_i (P_i - P).$$

Line bundles di grado zero

Sia $X = \mathbb{C}^*/\langle q \rangle$, con $|q| < 1$.
Fissiamo una radice quadrata $q^{\frac{1}{2}} = \exp(\pi i \tau)$ di q. Allora

$$\varphi(q^n, u) = q^{-\frac{n^2}{2}} u^{-n}$$

definisce un fattore di automorfia $\varphi : \langle q \rangle \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

Line bundles di grado zero

Sia $X = \mathbb{C}^*/\langle q \rangle$, con $|q| < 1$.
Fissiamo una radice quadrata $q^{\frac{1}{2}} = \exp(\pi i \tau)$ di q. Allora

$$\varphi(q^n, u) = q^{-\frac{n^2}{2}} u^{-n}$$

definisce un fattore di automorfia $\varphi : \langle q \rangle \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$.
Infatti

$$\varphi(q^m, q^n u)\varphi(q^n, u) = q^{-\frac{m^2}{2}} (q^n u)^{-m} q^{-\frac{n^2}{2}} u^{-n} =$$

$$= q^{\frac{-(m+n)^2}{2}} u^{-(m+n)} = \varphi(q^m q^n, u).$$

Line bundles di grado zero

Definiamo la funzione olomorfa $\theta : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\theta(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} u^n.$$

Line bundles di grado zero

Definiamo la funzione olomorfa $\theta : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\theta(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} u^n.$$

Osserviamo che θ è una φ-theta function:

$$\varphi(q^k, u)\theta(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} u^n q^{-\frac{k^2}{2}} u^{-k} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{(n-k)^2}{2}} q^{k(n-k)} u^{n-k} = \theta(q^k u).$$

Line bundles di grado zero

Definiamo la funzione olomorfa $\theta : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\theta(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} u^n.$$

Osserviamo che θ è una φ-theta function:

$$\varphi(q^k, u)\theta(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} u^n q^{-\frac{k^2}{2}} u^{-k} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{(n-k)^2}{2}} q^{k(n-k)} u^{n-k} = \theta(q^k u).$$

Dunque θ definisce una sezione $s : X \longrightarrow E(\varphi)$.

Line bundles di grado zero

Proposizione

La sezione s ha un unico zero semplice in X. Indicando questo con $P \in X$ si ha allora che $E(\varphi) = [P]$ e $\deg(E(\varphi)) = 1$.

Line bundles di grado zero

Proposizione

La sezione s ha un unico zero semplice in X. Indicando questo con $P \in X$ si ha allora che $E(\varphi) = [P]$ e $\deg(E(\varphi)) = 1$.

Per qualche $r > 0$, θ non ha zeri in

$$\{u \in \mathbb{C}^* \ : \ |u| = r\} \cup \{u \in \mathbb{C}^* \ : \ |u| = |q|r\}.$$

Sia $V = \{u \in \mathbb{C}^* \ : \ |q|r < |u| < r\}$ allora $p(\overline{V}) = X$ e $p_{|V} : V \longrightarrow U = p(V)$ è un biolomorfismo.
Per costruzione s su U è $\theta \circ (p_{|V})^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{C}$, quindi gli zeri di s su X sono gli zeri di θ su V.

Line bundles di grado zero

Vale allora che

$$\#\{\text{zeri di } \theta \text{ in } V\} = \int_{\partial V} \frac{\theta'(u)}{2\pi i \theta(u)} du.$$

Line bundles di grado zero

Vale allora che

$$\#\{\text{zeri di } \theta \text{ in } V\} = \int_{\partial V} \frac{\theta'(u)}{2\pi i \theta(u)} du.$$

Usando che $\theta(qu) = q^{-\frac{1}{2}} u^{-1} \theta(u)$ otteniamo

$$\frac{d\theta(qu)}{du} = q^{-\frac{1}{2}} u^{-1} \frac{d\theta(u)}{du} - q^{-\frac{1}{2}} u^{-2} \theta(u)$$

Line bundles di grado zero

Vale allora che

$$\#\{\text{zeri di } \theta \text{ in } V\} = \int_{\partial V} \frac{\theta'(u)}{2\pi i \theta(u)} du.$$

Usando che $\theta(qu) = q^{-\frac{1}{2}} u^{-1} \theta(u)$ otteniamo

$$\frac{d\theta(qu)}{du} = q^{-\frac{1}{2}} u^{-1} \frac{d\theta(u)}{du} - q^{-\frac{1}{2}} u^{-2} \theta(u)$$

e quindi

$$\#\{\text{zeri di } \theta \text{ in } V\} = \int_{|u|=r} \frac{du}{2\pi i u} = 1.$$

Line bundles di grado zero

Teorema

Sia $X = \mathbb{C}^*/\langle q \rangle$ un toro. Allora esiste un isomorfismo di gruppi

$$E : \mathbb{C}^*/\langle q \rangle \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X).$$

Line bundles di grado zero

Teorema

Sia $X = \mathbb{C}^*/\langle q \rangle$ un toro. Allora esiste un isomorfismo di gruppi

$$E : \mathbb{C}^*/\langle q \rangle \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X).$$

Considerando ogni $a \in \mathbb{C}^*$ come fattore di automorfia costante

$$a : \langle q \rangle \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(q^k, u) \longmapsto a^k$$

abbiamo un'omomorfismo

$$E : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

$$a \longmapsto E(a).$$

Line bundles di grado zero

$E(a)$ è banale se esiste $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ per cui

$$a^k = a(q^k, u) = h(u)h(q^k u)^{-1}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e $u \in \mathbb{C}^*$.

Line bundles di grado zero

$E(a)$ è banale se esiste $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ per cui

$$a^k = a(q^k, u) = h(u)h(q^k u)^{-1}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e $u \in \mathbb{C}^*$.
Sviluppando in serie di Laurent

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u^n = h(u) = a^k h(q^k u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n a^k q^{nk} u^n$$

per $k = 1$ otteniamo $c_n a q^n = c_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
Essendo $h \neq 0$, per qualche n si ha $c_n \neq 0$, quindi $a = q^{-n}$.

Line bundles di grado zero

$E(a)$ è banale se esiste $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ per cui

$$a^k = a(q^k, u) = h(u)h(q^k u)^{-1}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e $u \in \mathbb{C}^*$.
Sviluppando in serie di Laurent

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n u^n = h(u) = a^k h(q^k u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n a^k q^{nk} u^n$$

per $k = 1$ otteniamo $c_n a q^n = c_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
Essendo $h \neq 0$, per qualche n si ha $c_n \neq 0$, quindi $a = q^{-n}$.
Viceversa se $a = q^{-n}$, presa $h(u) = u^n$ si vede che $E(a)$ è banale.
Dunque $\ker(E) = \langle q \rangle$ e possiamo fattorizzare

$$\mathbb{C}^*/\langle q \rangle \xrightarrow{E} \mathrm{Pic}(X).$$

Line bundles di grado zero

Mostriamo che $\mathrm{Pic}^0(X) \subseteq \mathrm{im}(E)$. Ricordiamo che $E(\varphi) = [P]$.
Preso $Q \in X$ è sufficiente che $[Q] - [P] \in \mathrm{im}(E)$.
Sia $a \in \mathbb{C}^*$ con $\bar{a} = P/Q$, abbiamo

Line bundles di grado zero

Mostriamo che $\mathrm{Pic}^0(X) \subseteq \mathrm{im}(E)$. Ricordiamo che $E(\varphi) = [P]$.
Preso $Q \in X$ è sufficiente che $[Q] - [P] \in \mathrm{im}(E)$.
Sia $a \in \mathbb{C}^*$ con $\bar{a} = P/Q$, abbiamo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{a\cdot} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{t_a} & X \end{array}$$

Poiché $t_a Q = P$ si ha $t_a^* E(\varphi) = [Q]$. Inoltre $t_a^* E(\varphi) = E(\varphi_a)$ dove

$$\varphi_a(q^n, u) = \varphi(q^n, au) = q^{-\frac{n^2}{2}} u^{-n} a^{-n}.$$

Quindi $[P] - [Q] = E(\varphi) \otimes t_a^* E(\varphi)^{-1} = E(\varphi/\varphi_a) = E(a)$.

Line bundles di grado zero

Viceversa preso $a \in \mathbb{C}^*$ vale che $E(\varphi_a) = t_a^* E(\varphi) = [Q]$ con $Q = P/\bar{a}$. Dunque $E(a) = E(\varphi/\varphi_a) = [P] - [Q] \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Line bundles di grado zero

Viceversa preso $a \in \mathbb{C}^*$ vale che $E(\varphi_a) = t_a^* E(\varphi) = [Q]$ con $Q = P/\bar{a}$. Dunque $E(a) = E(\varphi/\varphi_a) = [P] - [Q] \in \mathrm{Pic}^0(X)$.
In particolare abbiamo dimostrato che

$$E(Q/P) = [Q] - [P]$$

o equivalentemente

$$E(x) = [xP] - [P]\,.$$

Line bundles su tori

Corollario

Ogni line bundle $L \in \mathrm{Pic}(X)$ si scrive in modo unico come

$$L = E(x) \otimes E(\varphi)^d$$

dove $d = \deg(L)$ e $x \in X$.

Line bundles su tori

Corollario

Ogni line bundle $L \in \mathrm{Pic}(X)$ si scrive in modo unico come

$$L = E(x) \otimes E(\varphi)^d$$

dove $d = \deg(L)$ e $x \in X$.

Il line bundle $L \otimes E(\varphi)^{-d}$ ha grado 0 quindi esiste unico $x \in X$ per cui $L \otimes E(\varphi)^{-d} = E(x)$.

Line bundles su tori

Corollario

Ogni line bundle $L \in \text{Pic}(X)$ si scrive in modo unico come

$$L = E(x) \otimes E(\varphi)^d$$

dove $d = \deg(L)$ e $x \in X$.

Il line bundle $L \otimes E(\varphi)^{-d}$ ha grado 0 quindi esiste unico $x \in X$ per cui $L \otimes E(\varphi)^{-d} = E(x)$.
Quindi L è definito da un fattore di automorfia

$$a\varphi^d : \langle q \rangle \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(q^n, u) \longrightarrow a^n \varphi(q^n, u)^d.$$

Line bundles di grado zero

Corollario

L'isomorfismo E coincide con

$$X \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X)$$

$$x \longrightarrow [x] - [1]\,.$$

Line bundles di grado zero

Corollario

L'isomorfismo E coincide con

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \\ x &\longrightarrow [x]-[1]\,. \end{aligned}$$

Abbiamo $E(xy) = [xyP] - [P] = [xP] + [yP] - 2\,[P]$.
Posto $y = 1/P$ otteniamo

$$[x] - [P] = [xP] + [1] - 2\,[P]$$

$$[xP] - [P] = [x] - [1]\,.$$

Line bundles su tori

Corollario

Abbiamo un isomorfismo naturale

$$X \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

Line bundles su tori

Corollario

Abbiamo un isomorfismo naturale

$$X \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

Abbiamo un isomorfismo $X \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X)$ e preso $L = [1]$ otteniamo un isomorfismo

$$X \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

che si esplicita come

$$(x, n) \longrightarrow [x] - (n+1)\,[1]\,.$$

Generalizzazione

Definizione

Definiamo $\mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M)$ come il fascio dei germi di funzioni olomorfe $M \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Sono ben definiti

$$H^0(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M)) = \{\text{sezioni } \ M \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M)\}$$

$$H^1(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M)) \longleftrightarrow \{E \longrightarrow M \ : \ \mathrm{rank}(E) = r\}/\sim$$

Generalizzazione

Preso $p : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma = M$ abbiamo un'azione $\Gamma \curvearrowright H^0(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M))$ e sono ben definiti

$$H^0(\Gamma, H^0(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M))) = H^0(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M))^\Gamma$$

$$H^1(\Gamma, H^0(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M))) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \\ f(\gamma_1\gamma_2, x) = f(\gamma_1, \gamma_2 x) f(\gamma_2, x) \end{array} \right\} / \sim$$

Generalizzazione

Teorema

Abbiamo un isomorfismo naturale

$$H^1(\Gamma, H^0(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M))) \longrightarrow \ker p^*$$

dove

$$p^* : H^1(M, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_M)) \longrightarrow H^1(\widetilde{M}, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_{\widetilde{M}})).$$

Generalizzazione

Teorema

Tutti i fibrati vettoriali olomorfi su $\mathbb{C}^n$ sono banali.

Generalizzazione

Teorema

Tutti i fibrati vettoriali olomorfi su $\mathbb{C}^n$ sono banali.

Corollario

Tutti i fibrati di rango r su un toro $\mathbb{C}^n/\Gamma$ sono dati da fattori di automorfia

$$f : \Gamma \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$$

modulo equivalenza.

Coomologia non abeliana

Siano Γ, G due gruppi, con un'azione $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$. Definiamo

$$C^0(\Gamma, G) = G \quad C^1(\Gamma, G) = \{f : \Gamma \longrightarrow G\} \quad C^2(\Gamma, G) = \{f : \Gamma^2 \longrightarrow G\}$$

$$\delta^0(g)(\gamma) = g^\gamma g^{-1} \qquad \delta^1(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_2)^{\gamma_1} f(\gamma_1) f(\gamma_1\gamma_2)^{-1}$$

Coomologia non abeliana

Poniamo quindi

$$H^0(\Gamma, G) = \{f \in C^0(\Gamma, G) \ : \ \delta^0(f) = 1\}$$

$$Z^1(\Gamma, G) = \{f \in C^1(\Gamma, G) \ : \ \delta^1(f) = 1\}$$

$$B^1(\Gamma, G) = \operatorname{im} \delta^0$$

$$H^1(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, G)/\sim$$

dove $f_1 \sim f_2$ se e solo se $f_1 f_2^{-1} \in B^1(\Gamma, G)$.

Coomologia non abeliana

Poniamo quindi

$$H^0(\Gamma, G) = \{f \in C^0(\Gamma, G) \ : \ \delta^0(f) = 1\}$$

$$Z^1(\Gamma, G) = \{f \in C^1(\Gamma, G) \ : \ \delta^1(f) = 1\}$$

$$B^1(\Gamma, G) = \operatorname{im} \delta^0$$

$$H^1(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, G)/\sim$$

dove $f_1 \sim f_2$ se e solo se $f_1 f_2^{-1} \in B^1(\Gamma, G)$.
Osserviamo che $H^0(\Gamma, G) = G^\Gamma$ è il sottogruppo degli elementi di G stabilizzati da tutto Γ.
In generale invece $H^1(\Gamma, G)$ è solo un insieme.

Coomologia Čech non abeliana

Sia G un prefascio di gruppi, non necessariamente abeliani, su X spazio topologico.

Coomologia Čech non abeliana

Sia G un prefascio di gruppi, non necessariamente abeliani, su X spazio topologico. Preso $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di X definiamo

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, G) = \prod_{i \in I} G(U_i) \qquad \delta^0(\sigma)_{ij} = \sigma_j \sigma_i^{-1}$$

$$\check{C}^1(\mathcal{U}, G) = \prod_{(i_0, i_1) \in I^2} G(U_{i_0 i_1}) \qquad \delta^1(\sigma)_{ijk} = \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik}^{-1}$$

$$\check{C}^2(\mathcal{U}, G) = \prod_{(i_0, i_1, i_2) \in I^3} G(U_{i_0 i_1 i_2})$$

Coomologia Čech non abeliana

Poniamo

$$H^0(\mathcal{U}, G) = \{\sigma \in \check{C}^0(\mathcal{U}, G) \ : \ \delta^0(\sigma) = 1\}$$

$$Z^1(\mathcal{U}, G) = \{\sigma \in \check{C}^1(\mathcal{U}, G) \ : \ \delta^1(\sigma) = 1\}$$

$$B^1(\mathcal{U}, G) = \mathrm{im}(\delta^0)$$

$$H^1(\mathcal{U}, G) = Z^1(\mathcal{U}, G)/ \sim$$

dove $\sigma_1 \sim \sigma_2$ se e solo se $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B^1(\mathcal{U}, G)$

Coomologia Čech non abeliana

Definizione

Definiamo allora

$$H^0(M, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^0(\mathcal{U}, G)$$

$$H^1(M, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, G).$$

Coomologia Čech non abeliana

Definizione

Definiamo allora

$$H^0(M,G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^0(\mathcal{U},G)$$

$$H^1(M,G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U},G).$$

Osserviamo che $H^0(M,G)$ ha una struttura di gruppo e come nel caso di gruppi abeliani si ha $H^0(M,G) = \Gamma(M, \mathrm{Sheaf}(G))$.

Coomologia Čech non abeliana

Definizione

Definiamo allora

$$H^0(M, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^0(\mathcal{U}, G)$$

$$H^1(M, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, G).$$

Osserviamo che $H^0(M, G)$ ha una struttura di gruppo e come nel caso di gruppi abeliani si ha $H^0(M, G) = \Gamma(M, \mathrm{Sheaf}(G))$.
In generale invece $H^1(M, G)$ è solo un insieme.

Coomologia Čech non abeliana

Definizione

Definiamo allora

$$H^0(M, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^0(\mathcal{U}, G)$$

$$H^1(M, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, G).$$

Osserviamo che $H^0(M, G)$ ha una struttura di gruppo e come nel caso di gruppi abeliani si ha $H^0(M, G) = \Gamma(M, \mathrm{Sheaf}(G))$.
In generale invece $H^1(M, G)$ è solo un insieme. Come al solito per $\mathcal{G}$ fascio di gruppi su X definiamo

$$H^i(X, \mathcal{G}) = H^i(X, \Gamma(G)) \text{ per } i = 0, 1.$$

Teorema di Montel

Teorema (Ascoli-Arzelà)

Sia X uno spazio topologico separabile e $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}(X)$ una successione di funzioni equicontinue e puntualmente limitate. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge uniformemente su ogni compatto.

Teorema di Montel

Teorema (Ascoli-Arzelà)

Sia X uno spazio topologico separabile e $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}(X)$ una successione di funzioni equicontinue e puntualmente limitate. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge uniformemente su ogni compatto.

Teorema (Montel)

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(U)$ una successione di funzioni olomorfe localmente equilimitate. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge uniformemente su ogni compatto.

Teorema di Montel

Per Ascoli-Arzelà è sufficiente mostrare che la successione è equicontinua. Fissiamo $z_0 \in U$ e $\varepsilon > 0$. A meno di traslazioni possiamo supporre $z_0 = 0$. Allora esistono $M, r > 0$ tali per cui per ogni $z \in \overline{\Delta_{2r}} \subseteq U$ e $n > 0$ vale $|f_n(z)| < M$. Vale quindi che per $z, w \in \Delta_r$

$$
\begin{aligned}
|f_n(z) - f_n(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi - w} d\xi \right| = \\
&= \left| \frac{z - w}{2\pi i} \int_{|\xi|=2r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - w)} \right| \leq |z - w| \frac{2M}{r}
\end{aligned}
$$

poiché $|(\xi - z)(\xi - w)| > r^2$. Dunque posto $\delta = \min(r, \varepsilon r/2M)$ si ha che per $z, w \in \Delta_\delta$ vale $|f_n(z) - f_n(w)| \leq \varepsilon$, ovvero la successione di funzioni è equicontinua.

Successioni di Cauchy

Definizione

Una successione $\{v_n\} \subseteq V$ a valori in uno spazio vettoriale topologico si dice di Cauchy se per ogni aperto U contenente 0 esiste $n_U > 0$ tale che per $n, m \geq n_U$ si abbia $v_n - v_m \in U$.

Spazi di Fréchet

Definizione

Uno spazio vettoriale topologico V è detto di *Fréchet* se:

1. È Hausdorff e la topologia è indotta da una famiglia di pseudonorme $\{p_i\}_{i \in I}$, ovvero una base di intorni di 0 è data da

$$U(p_{i_1}, \dots, p_{i_m}; \varepsilon) = \{v \in V \ : \ \max(p_{i_1}(v), \dots, p_{i_m}(v)) < \varepsilon\};$$

2. È completo, ovvero ogni successione di Cauchy converge;
3. È localmente convesso.

Spazi di Fréchet

Definizione

Uno spazio vettoriale topologico V è detto di *Fréchet* se:

1. È Hausdorff e la topologia è indotta da una famiglia di pseudonorme $\{p_i\}_{i\in I}$, ovvero una base di intorni di 0 è data da
$$U(p_{i_1},\dots,p_{i_m};\varepsilon)=\{v\in V\ :\ \max(p_{i_1}(v),\dots,p_{i_m}(v))<\varepsilon\};$$
2. È completo, ovvero ogni successione di Cauchy converge;
3. È localmente convesso.

Osserviamo che, se I è numerabile, la topologia su V può essere indotta da una metrica invariante per traslazioni. Per esemio possiamo porre per $u,v\in V$

$$d(u,v)=\sum_{n\in\mathbb{N}}2^{-n}\frac{p_{i_n}(u-v)}{1+p_{i_n}(u-v)}.$$

Spazi di Fréchet

Examples

Sia M una varietà complessa. Consideriamo la famiglia di pseudonorme su $\mathcal{O}(M)$ data per ogni $K \subseteq M$ compatto da

$$p_K(f) = \sup_{p \in K} |f(p)|.$$

Questa induce su $\mathcal{O}(M)$ una topologia che lo rende uno spazio di Fréchet. Osserviamo che prendendo un'esaustione in compatti $\{K_n\}$ di M è possibile realizzare la stessa topologia con una quantità numerabile di pseudonorme, dunque $\mathcal{O}(M)$ è metrizzabile.

Spazi di Fréchet

Osservazione

Sia $N \subseteq M$ una sottovarietà e siano d_N, d_M distanze invarianti su $\mathcal{O}(N)$ e $\mathcal{O}(M)$ compatibili con la struttura di spazio di Fréchet. Allora per $f, g \in \mathcal{O}(M)$

$$d(f,g) = d_M(f,g) + d_N(f_{|N}, g_{|N})$$

è ancora una distanza compatibile su $\mathcal{O}(M)$.

Spazi di Fréchet

Definizione

Una mappa lineare $\psi : V \longrightarrow W$ tra spazi vettoriali topologici si dice *compatta* se esiste un intorno $U \subseteq V$ di 0 per cui $\overline{\psi(U)}$ sia compatto.

Spazi di Fréchet

Definizione

Una mappa lineare $\psi : V \longrightarrow W$ tra spazi vettoriali topologici si dice *compatta* se esiste un intorno $U \subseteq V$ di 0 per cui $\overline{\psi(U)}$ sia compatto.

Examples

Siano $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{C}$ aperti, con Y a chiusura compatta. Allora la mappa di restrizione

$$r : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$$

è compatta. Infatti $U = \{f \in \mathcal{O}(X) : \sup_{x \in \overline{Y}} |f(x)| < 1\}$ è un aperto, mentre $K = \{f \in \mathcal{O}(Y) : \sup_{x \in Y} |f(x)| \leq 1\}$ è un compatto per il teorema di Montel e vale $r(U) \subseteq K$.

Spazi di Fréchet

Teorema di Baire

Sia X uno spazio metrico completo e $\{U_n\}$ sottinsiemi mai densi di X, ovvero per cui $\overline{U_n}$ ha parte interna vuota per ogni n.
Allora $X \neq \bigcup U_n$.

Spazi di Fréchet

Teorema di Baire

Sia X uno spazio metrico completo e $\{U_n\}$ sottinsiemi mai densi di X, ovvero per cui $\overline{U_n}$ ha parte interna vuota per ogni n.
Allora $X \neq \bigcup U_n$.

Teorema della mappa aperta

Sia $\psi : X \longrightarrow Y$ una mappa lineare continua e surgettiva tra spazi di Fréchet. Allora ψ è aperta.

Spazi di Fréchet

Teorema di Baire

Sia X uno spazio metrico completo e $\{U_n\}$ sottinsiemi mai densi di X, ovvero per cui $\overline{U_n}$ ha parte interna vuota per ogni n.
Allora $X \neq \bigcup U_n$.

Teorema della mappa aperta

Sia $\psi : X \longrightarrow Y$ una mappa lineare continua e surgettiva tra spazi di Fréchet. Allora ψ è aperta.

Sia d una distanza invariante su X compatibile con la sua topologia e sia $V \subseteq X$ un intorno aperto di 0. Poniamo allora

$$V_n = \{x \in X : d(x, 0) < 2^{-n} r\}$$

con $r > 0$ per cui $V_0 \subseteq V$.

Spazi di Fréchet

In primo luogo vediamo che per ogni n si ha che $\overline{\psi(V_n)}$ è un intorno di 0. Infatti vale

$$\overline{\psi(V_n)} \supseteq \overline{\psi(V_{n+1}) - \psi(V_{n+1})} \supseteq \overline{\psi(V_{n+1})} - \overline{\psi(V_{n+1})}$$

e dunque è sufficiente che $\overline{\psi(V_{n+1})}$ abbia parte interna non vuota. D'altra parte

$$Y = \psi(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\psi(V_{n+1})$$

quindi per Baire $\overline{k\psi(V_{n+1})}$ ha parte interna non vuota per qualche k. Dunque lo stesso vale per $\overline{\psi(V_{n+1})}$. È sufficiente ora che valga $\overline{\psi(V_1)} \subseteq \psi(V)$.

Spazi di Fréchet

Sia $y_1 \in \overline{\psi(V_1)}$, costruiamo induttivamente una successione $y_n \in \overline{\psi(V_n)}$. Dato y_n abbiamo che

$$(y_n - \overline{\psi(V_{n+1})}) \cap \psi(V_n) \neq \emptyset$$

quindi vi è $x_n \in V_n$ per cui $\psi(x_n) \in y_n - \overline{\psi(V_{n+1})}$. Poniamo $y_{n+1} = y_n - \psi(x_n) \in \overline{\psi(V_{n+1})}$. Per costruzione $d(x_n, 0) < 2^{-n}r$ dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a $x \in X$ con $d(x, 0) < r$, quindi $x \in V$. Inoltre

$$\sum_{i=1}^{m} \psi(x_i) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - y_{i+1}) = y_1 - y_{m+1}$$

e per $m \to \infty$ si ha $y_{m+1} \to 0$, dunque per continuità di ψ vale $\psi(x) = y_1$.

Spazi di Fréchet

Teorema (Schwartz)

Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ mappe lineari continue tra spazi di Fréchet, con g suriettiva e f compatta. Allora $f + g$ ha immagine di codimensione finita.

Spazi di Fréchet

Teorema (Schwartz)

Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ mappe lineari continue tra spazi di Fréchet, con g suriettiva e f compatta. Allora $f + g$ ha immagine di codimensione finita.

Sia $U \subseteq X$ un intorno simmetrico di 0 per cui $K = \overline{f(U)}$ sia compatto. Per mappa aperta $V = g(U)$ è aperto. Per compattezza esistono $y_1, \ldots, y_n \in K$ per cui $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n y_i + \frac{1}{2}V$. Poniamo $Y' = \mathrm{span}(y_1, \ldots, y_n)$ e siano $f', g' : X \longrightarrow Y/Y'$ le mappe indotte al quoziente. Allora f' è ancora compatta e g' suriettiva.
La tesi segue quindi dal seguente lemma.

Spazi di Fréchet

Lemma

Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ lineari continue fra spazi di Fréchet, con g surgettiva e f compatta. Se esiste $U \subseteq X$ intorno aperto simmetrico di 0 con $V = g(U)$ e $K = \overline{f(U)} \subseteq \frac{1}{2}V$ allora $h = f + g$ è ancora surgettiva.

Osserviamo che essendo V intorno aperto di 0 è sufficiente che $V \subseteq \mathrm{im}(h)$ per la surgettività.
Sia $\{W_p\}$ una base di intorni di $0 \in X$, con W_p aperti, convessi e simmetrici e tali che $W_{p+1} \subseteq \frac{1}{2}W_p$. Per compattezza di K esiste una successione crescente n_p tale per cui $K \subseteq \frac{1}{2}g(U \cap 2^{n_p}W_p)$ per ogni p.
Sia ora $y_0 \in V$ e sia $x_0 \in U$ per cui $g(x_0) = y_0$. Poniamo allora $y_1 = y_0 - h(x_0) = -f(x_0) \in K = K \cap \frac{1}{2}V$ e possiamo trovare $x_1 \in \frac{1}{2}U$ per cui $y_1 = g(x_1)$.

Spazi di Fréchet

Iterando possiamo trovare due sequenze $\{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ e $\{y_i\}_{i=1}^{n_1}$ per cui

$$\begin{aligned}
&y_{j+1} = y_j - h(x_j) \\
&y_j = g(x_j) \\
&y_j \in 2^{-j+1}K \cap 2^{-j}V \\
&x_j \in 2^{-j}U
\end{aligned}$$

Dunque
$y_{n_1+1} = y_{n_1} - h(x_{n_1}) = -f(x_{n_1}) \in 2^{-n_1}K \subseteq g(2^{-n_1-1}U \cap \frac{1}{2}W_p)$
ovvero possiamo prendere $x_{n_1+1} \in 2^{-n_1-1}U \cap \frac{1}{2}W_p$ per cui
$g(x_{n_1+1}) = y_{n_1+1}$.

Spazi di Fréchet

Iterando ancora otteniamo due successioni $\{x_j\}$ e $\{y_j\}$ per cui

$$y_{j+1} = y_j - h(x_j)$$
$$y_j = g(x_j)$$
$$y_j \in 2^{-j+1}K \cap 2^{-j}V$$
$$x_j \in 2^{-j}U \cap 2^{n_p-j}W_p \text{ per } j > n_p$$

Ora per $n_p < k < l \leq n_{p+1}$ si ha, essendo W_p convesso

$$x_k + \cdots + x_l \in 2^{n_p-k}W_p + \ldots 2^{n_p-l}W_p \subseteq W_p.$$

Analogamente per $n_p < k < l \leq n_q$ vale

$$x_k+\cdots+x_l \in W_p+\cdots+w_{q-1} \subseteq W_p+2^{-1}W_p+\ldots 2^{p-q}W_p \subseteq 2W_P$$

ovvero la successione $z_n = x_1 + \cdots + x_n$ è di Cauchy, e quindi converge a $z \in X$.

Spazi di Fréchet

Per concludere è sufficiente osservare che

$$y_0 - h(z) = \lim_n y_0 - h(z_n) = \lim_n (y_n - h(x_n)) = \\ = \lim_n y_{n+1} = \lim_n g(x_{n+1}) = 0.$$

Perciò $V \subseteq \mathrm{im}(h)$ e h è surgettiva.

Lemma di $\bar{\partial}$-Poincarè

Proposizione

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto a chiusura compatta. Allora $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(U) = 0$.

Lemma di $\bar{\partial}$-Poincarè

Proposizione

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto a chiusura compatta. Allora $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(U) = 0$.

Poiché $\dim U = 1$ tutte le $(0,2)$-forme su U sono nulle. Inoltre ogni $(0,1)$-forma su U si può scrivere come $f \cdot d\bar{z}$ dove $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione liscia.
È dunque sufficiente mostrare che esiste $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ liscia tale per cui $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$.
Idea: per ogni $V \subseteq U$ aperto con $\overline{V} \subseteq U$ l'equazione è soddisfatta da

$$g(w) = \int_V \frac{f(z) d\bar{z} \wedge dz}{z - w}$$

e con un processo di esaustione si può ottenere una g definita su tutto U.

Sezioni meromorfe

D'ora in poi $E \longrightarrow X$ sarà un fibrato vettoriale olomorfo di rango r su X superficie di Riemann non compatta.

Sezioni meromorfe

D'ora in poi $E \longrightarrow X$ sarà un fibrato vettoriale olomorfo di rango r su X superficie di Riemann non compatta.

Proposizione

Sia $Y \subseteq X$ un aperto a chiusura compatta. Allora per ogni aperto $Y_0 \subseteq Y$ la mappa naturale $H^1(Y, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow H^1(Y_0, \mathcal{O}(E))$ è surgettiva.

Sezioni meromorfe

Siano $U_1, \ldots, U_n$ aperti banalizzanti E per cui $Y = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Poniamo allora $Y_k = Y_0 \cup \bigcup_{i=1}^k U_i$. Per ottenere la tesi è sufficiente mostrare che ogni $H^1(Y_k, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow H^1(Y_{k-1}, \mathcal{O}(E))$ è surgettiva. Fissato k siano $V_i = U_i \cap Y_{k-1}$ e $V_i' = V_i$ per $i \neq k$ e $V_k' = U_k$. Osserviamo che per il lemma di $\overline{\partial}$-Poincaré abbiamo che per ogni $V \subseteq U_i$

$$H^1(V, \mathcal{O}(E)) \cong H^1(V, \mathcal{O})^r = 0,$$

quindi i ricoprimenti $\mathcal{U} = \{V_i\}$ e $\mathcal{U}' = \{V_i'\}$ sono adatti a calcolare la coomologia di Y_{k-1} e Y_k rispettivamente. Poiché per $i \neq j$ si ha $V_i \cap V_j = V_i' \cap V_j'$ otteniamo immediatamente che $Z^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}(E)) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ e che dunque $H^1(Y_k, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow H^1(Y_{k-1}, \mathcal{O}(E))$ è surgettiva.

Sezioni meromorfe

Proposizione

Sia $Y \subseteq X$ un aperto a chiusura compatta. Allora $H^1(Y, \mathcal{O}(E_{|Y}))$ ha dimensione finita.

Sezioni meromorfe

Proposizione

Sia $Y \subseteq X$ un aperto a chiusura compatta. Allora $H^1(Y, \mathcal{O}(E_{|Y}))$ ha dimensione finita.

Sia $Y' \supseteq \overline{Y}$ un altro aperto a chiusura compatta. Allora possiamo trovare aperti U_i, V_i con $i = 1, \ldots, n$ tali per cui

1. $\overline{V_i} \subseteq U_i$ per ogni i;
2. $\bigcup V_i = Y$ e $\bigcup U_i = Y'$;
3. gli aperti U_i banalizzano E e sono biolomorfi ad aperti limitati di $\mathbb{C}$ (dunque lo stesso vale per i V_i).

Come prima $\mathcal{V} = \{V_i\}$ e $\mathcal{U} = \{U_i\}$ sono ricoprimenti adatti a calcolare la coomologia di Y e Y'.

Sezioni meromorfe

Consideriamo la mappa

$$\phi : C^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E)) \times Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$$

$$(\sigma, \eta) \longmapsto \delta(\sigma) + \beta(\eta)$$

dove $\beta : Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$ è la mappa di restrizione. Poiché $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$ è surgettiva abbiamo che anche lo è anche ϕ.
Ora abbiamo che $\mathcal{O}_E(U_i \cap U_j) \cong \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^r$ e dunque $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) = \prod_{i,j} \mathcal{O}_E(U_i \cap U_j)$ è uno spazio di Fréchet con la topologia prodotto. È immediato che la condizione di cociclo sia chiusa, dunque $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ è a sua volta uno spazio di Fréchet in quanto sottospazio chiuso. Analogamente rendiamo $C^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$ e $Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$ spazi di Fréchet.

Sezioni meromorfe

Le mappe δ e β risultano essere continue rispetto a tali topologie, inoltre per il teorema di Montel β è anche compatta. Dunque anche la mappa

$$\psi : C^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E)) \times Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$$

$$(\sigma, \eta) \longmapsto \beta(\eta).$$

è compatta. Allora abbiamo che

$$\phi - \psi : C^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E)) \times Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$$

$$(\sigma, \eta) \longmapsto \delta(\sigma)$$

è somma di una mappa compatta e una surgettiva, quindi per il teorema di Schwartz si ha che la sua immagine ha codimensione finita. Poiché $\mathrm{im}(\phi - \psi) = B^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E))$ otteniamo che $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(E)) = H^1(Y, \mathcal{O}(E))$ ha dimensione finita.

Sezioni meromorfe

Proposizione

Sia $Y \subseteq X$ aperto a chiusura compatta. Dato un punto qualunque $p \in Y$ esiste una sezione meromorfa di E con un polo in p.

Sezioni meromorfe

Proposizione

Sia $Y \subseteq X$ aperto a chiusura compatta. Dato un punto qualunque $p \in Y$ esiste una sezione meromorfa di E con un polo in p.

Sia $U \subseteq Y$ intorno aperto di p, banalizzante E e dotato di una carta $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ per cui $z(p) = 0$. Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, Y \setminus \{p\}\}$. È immediato verificare che preso $\mathcal{U}'$ raffinamento di $\mathcal{U}$ allora $\dim H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \leq H^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}(E))$ e dunque $k = \dim H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \leq \dim H^1(Y, \mathcal{O}(E)) < \infty$.
Sia quindi $\rho \in H^0(U, \mathcal{O}(E))$ una sezione mai nulla e consideriamo $z^{-j}\rho$ per $j = 1, \dots, k+1$ come elementi di $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) = \mathcal{O}_E(U \setminus \{p\})$.

Sezioni meromorfe

Abbiamo allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}$ non tutti nulli e $\eta \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ ovvero $(\eta_0, \eta_1) \in \mathcal{O}_E(U) \times \mathcal{O}_E(Y \setminus \{p\})$ per cui

$$\left(\frac{\lambda_1}{z} + \cdots + \frac{\lambda_{k+1}}{z^{k+1}}\right)\rho = \delta(\eta) = \eta_1 - \eta_0.$$

Dunque abbiamo ottenuto una sezione meromorfa f che su U coincide con

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_i}{z^i}\right)\rho + \eta_0$$

e con η_1 su $Y \setminus \{p\}$.

Sezioni meromorfe

Corollario

Sia X una superficie di Riemann compatta e $E \longrightarrow X$ un fibrato vettoriale olomorfo. Allora $H^1(X, \mathcal{O}(E))$ ha dimensione finita e esistono sezioni meromorfe di E non identicamente nulle.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Proposizione

Sia $E \longrightarrow \mathbb{C}$ fibrato vettoriale olomorfo. Se E ha una sezione meromorfa non banale allora ammette una sezione olomorfa mai nulla.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Dalla successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^*/\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0$$

e relativa successione esatta lunga

$$H^0(\mathbb{C}, \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^*) \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*) = 0.$$

segue che ogni divisore su $\mathbb{C}$ è divisore associato a una funzione meromorfa. Una sezione meromorfa non banale $f \in H^0(\mathbb{C}, \mathcal{M}(E))$ identifica allora un divisore $(f) \in \mathrm{Div}(\mathbb{C})$, che a sua volta è dato da una funzione meromorfa $\varphi \in H^0(\mathbb{C}, \mathcal{M}_{\mathbb{C}})$.
Dunque f/φ è una sezione olomorfa mai nulla di E.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Teorema

Per ogni $r > 0$ vale $H^1(\mathbb{C}, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})) = 0$. In altre parole ogni fibrato vettoriale olomorfo $E \longrightarrow \mathbb{C}$ è banale.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Teorema

Per ogni $r > 0$ vale $H^1(\mathbb{C}, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})) = 0$. In altre parole ogni fibrato vettoriale olomorfo $E \longrightarrow \mathbb{C}$ è banale.

Procediamo per induzione su $r = \operatorname{rank} E$. Il caso $r = 1$ è già noto, avendo visto che $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*) = 0$.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Supponiamo che E ammetta una sezione olomorfa F_r mai nulla. Possiamo trovare un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X in aperti banalizzanti E. Dunque per ogni $i \in I$ esistono sezioni $F_1^i, \dots, F_{r-1}^i$ su U_i per cui $F_1^i(x), \dots, F_{r-1}^i(x), F_r(x)$ siano linearmente indipendenti per ogni $x \in U_i$. Sulle intersezioni $U_i \cap U_j$ le sezioni cambiano con

$$\begin{pmatrix} F^i \\ F_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{ij} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j \\ F_r \end{pmatrix}$$

dove $F^i =^t (F_1^i, \dots, F_{r-1}^i)$ e G^{ij} è una sezione di $\mathrm{GL}(r-1, \mathcal{O}_{U_i \cap U_j})$.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Sulle intersezioni $U_i \cap U_j \cap U_k$ abbiamo $G^{ij} G^{jk} = G^{ik}$, ovvero le G^{ij} definiscono un cociclo in $Z^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(r-1, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}))$. Per ipotesi induttiva $H^1(X, \mathrm{GL}(r-1, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})) = 0$ dunque esistono $G^i : U_i \longrightarrow \mathrm{GL}(r-1, \mathbb{C})$ olomorfe per cui $G^{ij} = G^i (G^j)^{-1}$. A meno di sostituire F^i con $(G^i)^{-1} F^i$ possiamo supporre che le transizioni siano della forma

$$\begin{pmatrix} F^i \\ F_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & b^{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j \\ F_r \end{pmatrix}$$

dove $b^{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r-1}$.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Ora su $U_i \cap U_j \cap U_k$ abbiamo $b^{ij} + b^{jk} = b^{ik}$ e analogamente, essendo $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{r-1}) = 0$ esistono $b^i : U_i \longrightarrow C^{r-1}$ per cui $b^{ij} = b^i - b^j$ su $U_i \cap U_j$. Sostituendo ora F^i con $F^i - b^i F_r$ otteniamo che

$$\begin{pmatrix} F^i \\ F_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^j \\ F_r \end{pmatrix}$$

su $U_i \cap U_j$, dunque si incollano a sezioni globali. Avendo costruito un frame globale otteniamo che E è banale.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Mostriamo ora che E ammette una sezione olomorfa mai nulla. Sia B_n la successione delle palle aperte di raggio n e centro 0. Abbiamo già visto che per ogni n esiste una sezione meromorfa non banale su B_n, e dunque una sezione olomorfa mai nulla. Allora per quanto appena dimostrato $E_{|B_n}$ è banale per ogni n. In particolare abbiamo che $\mathcal{O}_E(B_n) \cong \mathcal{O}(B_n)^r$ e possiamo porre su ciscuno di questi una distanza compatibile d_n, in modo che valga $d_{n+1}(f,g) \geq d_n(f,g)$ per $f,g \in \mathcal{O}_E(B_{n+1})$.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Per ogni n possiamo approssimare uniformemente sui compatti ogni sezione $\rho : B_n \longrightarrow E$ con sezioni su B_{n+1}. Infatti fissata una trivializzazione di E su B_{n+1} vediamo una sezione su B_n come una mappa olomorfa $B_n \longrightarrow \mathbb{C}^r$. Essendo B_n un disco, ciascuna componente si approssima uniformemente sui compatti dalla sua serie di Laurant, cioè con funzioni estendibili a B_{n+1}. In altre parole possiamo trovare $\rho_j : B_{n+1} \longrightarrow E$ per cui $d_n(\rho_j, \rho) < 2^{-j}$.

Fibrati olomorfi su $\mathbb{C}$

Presa $f_1 \in H^0(B_1, \mathcal{O}(E))$ con $f_1(p) \neq 0$ e preso $0 < \varepsilon < d_1(f_1(p), 0)$ troviamo iterativamente una successione $f_n \in H^0(Y_n, \mathcal{O}(E))$ per cui $d_n(f_n, f_{n+1}) < 2^{-n-1}\varepsilon$. Allora è immediato verificare che per ogni $n > 0$ fissato $\{f_m\}_{m \geq n}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{O}_E(Y_n)$ e dunque è ben definita $F = \lim_n f_n$ come sezione $F : X \longrightarrow E$. Inoltre per costruzione $F(p) \neq 0$. Dunque come già visto, E ammette una sezione su $\mathbb{C}$ mai nulla.

Bibliografia

- *Vector bundles on elliptic curves and factors of automorphy*
  Oleksandr Iena, 2010
- *Tata Lectures on Theta I*
  David Mumford, 1983
- *Raghavan Narsimhan's proof of L. Schwartz's perturbation theorem*
  M. K. Vemuri, 2016
- *Lectures on Riemann Surfaces*
  Otto Foster, 1981
- *Complex Abelian Varieties*
  C. Birkenhake, H. Lange, 1992