Stable commutator length e Teorema di Bavard

Candidato: Alessio Di Prisa Relatore: Prof. Roberto Frigerio

10 luglio 2020

Superfici

Definizione

Sia $S_{g,p}$ la somma connessa di g tori con p dischi rimossi.

Superfici

Definizione

Sia $S_{g,p}$ la somma connessa di g tori con p dischi rimossi.

Teorema (Classificazione delle superfici)

Ogni superficie compatta, connessa e orientabile è omeomorfa a $S_{g,p}$ per qualche $g, p \geq 0$, e $S_{g,p} \cong S_{g',p'}$ se e solo se $g = g'$ e $p = p'$.

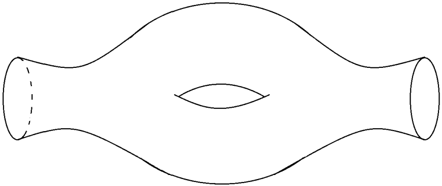

Figura: Esempio: superficie $S_{1,2}$

Commutator length

Definizione

Sia G un gruppo. La commutator length di $g \in [G, G]$, denotata con $\mathrm{cl}(g)$, è il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui g è prodotto di n commutatori.

Commutator length

Definizione

Sia G un gruppo. La commutator length di $g \in [G, G]$, denotata con $\mathrm{cl}(g)$, è il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui g è prodotto di n commutatori.

Osservazione

Se $f : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo vale

$$\mathrm{cl}_H(f(g)) \leq cl_G(g)$$

per ogni $g \in G$.

Superfici

Siano X uno spazio e $\gamma \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Sono equivalenti:

- γ è prodotto di g commutatori;
- esiste $f : S_{g,1} \longrightarrow X$ con $\partial S_{g,1}$ mappato in γ.

Superfici

Siano X uno spazio e $\gamma \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Sono equivalenti:

- γ è prodotto di g commutatori;
- esiste $f : S_{g,1} \longrightarrow X$ con $\partial S_{g,1}$ mappato in γ.

Infatti:
$(\Leftarrow)$ $\partial S_{g,1}$ è prodotto di g commutatori in $\pi_1(S_{g,1})$, quindi $\mathrm{cl}(\gamma) \leq g$;

Siano X uno spazio e $\gamma \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Sono equivalenti:

- γ è prodotto di g commutatori;
- esiste $f : S_{g,1} \longrightarrow X$ con $\partial S_{g,1}$ mappato in γ.

Infatti:
($\Leftarrow$) $\partial S_{g,1}$ è prodotto di g commutatori in $\pi_1(S_{g,1})$, quindi $\mathrm{cl}(\gamma) \leq g$;
($\Rightarrow$) se $\gamma = [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ possiamo costruire $f : S_{g,1} \longrightarrow X$, a partire da un poligono con $4g + 1$ lati.

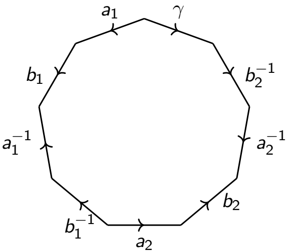

Figura: Esempio per $g = 2$

Stable commutator length

Definizione

Sia $g \in [G, G]$. La stable commutator length di g è definita da

$$\mathrm{scl}(g) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{cl}(g^n)}{n}.$$

Stable commutator length

Definizione

Sia $g \in [G, G]$. La stable commutator length di g è definita da

$$\mathrm{scl}(g) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{cl}(g^n)}{n}.$$

Osservazione

Se $f : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo vale

$$\mathrm{scl}_H(f(g)) \leq \mathrm{scl}_G(g)$$

per ogni $g \in G$.

Superfici

Definizione

Dati uno spazio X e un loop $\gamma : S^1 \longrightarrow X$. Una superficie S con bordo, compatta, orientata, con una mappa $f : S \longrightarrow X$ è ammissibile per γ se esiste una $\partial f : \partial S \longrightarrow S^1$ per cui il diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} \partial S \arrow[r] \arrow[d, "\partial f"'] & S \arrow[d, "f"] \\ S^1 \arrow[r, "\gamma"'] & X. \end{tikzcd}$$

Superfici

Definizione

Dati uno spazio X e un loop $\gamma : S^1 \longrightarrow X$. Una superficie S con bordo, compatta, orientata, con una mappa $f : S \longrightarrow X$ è ammissibile per γ se esiste una $\partial f : \partial S \longrightarrow S^1$ per cui il diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} \partial S \arrow[r] \arrow[d, "\partial f"'] & S \arrow[d, "f"] \\ S^1 \arrow[r, "\gamma"'] & X. \end{tikzcd}$$

Definiamo

- $n(S) = \deg(\partial f)$
- $\chi^-(S) = \sum_{i=1}^{k} \min(\chi(S_i), 0)$ con S_i componenti connesse di S.

Stable commutator length

Teorema

Sia X uno spazio e sia $\gamma \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Allora vale

$$\mathrm{scl}(\gamma) = \inf_S \frac{-\chi^-(S)}{2n(S)}$$

dove l'estremo inferiore è preso al variare delle superfici ammissibili per γ.

Coomologia limitata

Definizione

Sia G un gruppo. Definiamo il bar complex $C_*(G)$ come il complesso dato da

- $C_n(G) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(G^n)$ in dimensione n
- mappe di bordo ∂ definite da

$$\partial(g_1, \dots, g_n) = (g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (g_1, \dots, g_i \cdot g_{i+1}, \dots, g_n) + \\ + (-1)^n (g_1, \dots, g_{n-1}).$$

Coomologia limitata

Definizione

Sia G un gruppo. Definiamo il bar complex $C_*(G)$ come il complesso dato da

- $C_n(G) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(G^n)$ in dimensione n
- mappe di bordo ∂ definite da

$$\partial(g_1, \dots, g_n) = (g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (g_1, \dots, g_i \cdot g_{i+1}, \dots, g_n) + \\ + (-1)^n (g_1, \dots, g_{n-1}).$$

Su $C_n(G)$ poniamo la norma $||\cdot||_1$ data da

$$\left|\left|\sum a_i(g_1^i, \dots, g_n^i)\right|\right|_1 = \sum |a_i|.$$

Coomologia limitata

Definizione

Siano $C^*(G)$ e $C_b^*(G)$ i complessi dati da:

- $C^n(G) = \{f : C_n(G) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineare } \}$
- $C_b^n(G) = \{f : C_n(G) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineare e continua}\}$

con le naturali mappe di cobordo indotte.
Definiamo per G

- la sua coomologia $H^*(G)$ come l'omologia di $C^*(G)$
- la sua coomologia limitata $H_b^*(G)$ come l'omologia di $C_b^*(G)$.

Coomologia limitata

Definizione

Siano $C^*(G)$ e $C_b^*(G)$ i complessi dati da:

- $C^n(G) = \{f : C_n(G) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineare } \}$
- $C_b^n(G) = \{f : C_n(G) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineare e continua}\}$

con le naturali mappe di cobordo indotte.
Definiamo per G

- la sua coomologia $H^*(G)$ come l'omologia di $C^*(G)$
- la sua coomologia limitata $H_b^*(G)$ come l'omologia di $C_b^*(G)$.

Ogni $C_b^n(G)$ ha la norma $||\cdot||_\infty$ duale a $||\cdot||_1$ su $C_n(G)$.
Questa induce su $H_b^n(G)$ una pseudonorma, definita da

$$||\alpha||_\infty = \inf ||\sigma||_\infty$$

con σ cocicli che rappresentano $\alpha \in H_b^n(G)$

Coomologia limitata

Definizione

Definiamo la boundary norm su $B_1(G)$ ponendo per ogni $a \in B_1(G)$

$$||a||_B = \inf ||A||_1$$

al variare di $A \in C_2(G)$ con $\partial A = a$.

Coomologia limitata

Definizione

Definiamo la boundary norm su $B_1(G)$ ponendo per ogni $a \in B_1(G)$

$$||a||_B = \inf ||A||_1$$

al variare di $A \in C_2(G)$ con $\partial A = a$.

La boundary norm è indotta da $||\cdot||_1$ sul quoziente $B_1(G) = C_2(G)/Z_2(G)$.

Coomologia limitata

Sia $C_*(X)$ il complesso delle catene singolari a coefficienti reali. Possiamo definire analogamente

- la norma $||\cdot||_1$ su $C_n(X)$, rispetto alla base degli n-simplessi singolari
- la boundary norm $||\cdot||_B$ sullo spazio $B_1(X)$ degli 1-bordi
- il complesso $C_b^*(X)$, con la norma $||\cdot||_\infty$ in ogni dimensione
- la coomologia limitata $H_b^*(X)$ come l'omologia di $C_b^*(X)$, con la pseudonorma indotta da $||\cdot||_\infty$.

Coomologia limitata

Teorema (Gromov)

Sia X un CW-complesso numerabile con $\pi_1(X) = G$. Allora $H^n_b(X)$ è isometricamente isomorfo a $H^n_b(G)$.

Coomologia limitata

Teorema (Gromov)

Sia X un CW-complesso numerabile con $\pi_1(X) = G$. Allora $H_b^n(X)$ è isometricamente isomorfo a $H_b^n(G)$.

Proposizione

Sia X uno spazio $K(G,1)$. Allora $B_1(G)$ si immerge in $B_1(X)$ isometricamente rispetto alla boundary norm.

Proposizione

Considerando gli elementi di G come 1-catene si ha $[G, G] \subseteq B_1(G)$.

Coomologia limitata

Proposizione

Considerando gli elementi di G come 1-catene si ha $[G, G] \subseteq B_1(G)$.

Proposizione

Per ogni $g \in [G, G]$ vale l'uguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||g^n||_B}{n} = 4\,\mathrm{scl}(g).$$

Quasimorfismi

Definizione

Sia G un gruppo. Un quasimorfismo su G è una mappa $\phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui esiste una costante $D \geq 0$ con

$$|\phi(ab) - \phi(a) - \phi(b)| \leq D$$

per ogni $a, b \in G$. La minima di tali costanti D è detta difetto di ϕ e si indica con $D(\phi)$.

Indichiamo con $\widehat{Q}(G)$ lo spazio dei quasimorfismi su G.

Quasimorfismi

Teorema

Sia G un gruppo. La successione

$$0 \longrightarrow C_b^1(G) \oplus H^1(G) \longrightarrow \widehat{Q}(G) \longrightarrow H_b^2(G) \longrightarrow H^2(G)$$

è esatta.

Quasimorfismi

Teorema

Sia G un gruppo. La successione

$$0 \longrightarrow C_b^1(G) \oplus H^1(G) \longrightarrow \widehat{Q}(G) \longrightarrow H_b^2(G) \longrightarrow H^2(G)$$

è esatta.

La mappa $H_b^2(G) \longrightarrow H^2(G)$ è detta mappa di confronto.

Il suo kernel $EH_b^2(G)$ è la coomologia limitata esatta in dimensione 2 ed è isomorfo a $\widehat{Q}(G)/(C_b^1(G) \oplus H^1(G))$.

Quasimorfismi

Definizione

Un quasimorfismo ϕ è omogeneo se per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha $\phi(g^n) = n\phi(g)$.

Indichiamo i quasimorfismi omogenei su G con $Q(G)$.

Quasimorfismi

Definizione

Un quasimorfismo ϕ è omogeneo se per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha $\phi(g^n) = n\phi(g)$.

Indichiamo i quasimorfismi omogenei su G con $Q(G)$.

Proposizione

Sia $\phi \in \widehat{Q}(G)$, allora posto

$$\overline{\phi}(g) = \lim_{n \to \infty} \frac{\phi(g^n)}{n}$$

per ogni $g \in G$ si ha $\overline{\phi} \in Q(G)$.
Inoltre $\phi - \overline{\phi} \in C_b^1(G)$ e quindi $\widehat{Q}(G)/C_b^1(G) = Q(G)$.

Proposizione

Il duale topologico di $(B_1(G), ||\cdot||_B)$ è lo spazio $\widehat{Q}(G)/H^1(G)$ con la norma data dal difetto $D(\cdot)$.

Corollario

Per ogni $g \in [G, G] \subseteq B_1(G)$ vale

$$||g||_B = \sup_{\phi \in \widehat{Q}(G)/H^1(G)} \frac{|\phi(g)|}{D(\phi)}.$$

Teorema di Bavard

Teorema di dualità Bavard

Sia G un gruppo. Per ogni $g \in [G, G]$ vale

$$\mathrm{scl}(g) = \frac{1}{2} \sup_{\phi \in Q(G)/H^1(G)} \frac{|\phi(g)|}{D(\phi)}.$$

Applicazioni

Proposizione (Rolli)

Sia F_2 il gruppo libero di rango 2. Allora $EH_b^2(F_2)$ ha dimensione infinita.

Applicazioni

Proposizione (Rolli)

Sia F_2 il gruppo libero di rango 2. Allora $EH_b^2(F_2)$ ha dimensione infinita.

Quindi F_2 ha elementi con $\mathrm{scl}(\cdot)$ non nulla.

Se si ha un epimorfismo $G \longrightarrow F_2$, allora esiste $g \in [G, G]$ con $\mathrm{scl}(g) > 0$.

Applicazioni

Definizione

Si dice che un gruppo G soddisfa una legge se esiste un gruppo libero F e una parola non banale ω nei generatori di F tale per cui per ogni omomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ vale $\varphi(\omega) = 1$.

Applicazioni

Definizione

Si dice che un gruppo G soddisfa una legge se esiste un gruppo libero F e una parola non banale ω nei generatori di F tale per cui per ogni omomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ vale $\varphi(\omega) = 1$.

Teorema (Calegari)

Sia G un gruppo che soddisfa una legge. Allora per ogni $g \in [G, G]$ vale $\mathrm{scl}(g) = 0$.

Applicazioni

Definizione

Si dice che un gruppo G soddisfa una legge se esiste un gruppo libero F e una parola non banale ω nei generatori di F tale per cui per ogni omomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ vale $\varphi(\omega) = 1$.

Teorema (Calegari)

Sia G un gruppo che soddisfa una legge. Allora per ogni $g \in [G, G]$ vale $\mathrm{scl}(g) = 0$.

Esempio

I gruppi finiti, abeliani, nilpotenti e risolubili sono tutti esempi di gruppi che soddisfano una legge.

Grazie per l'attenzione!