Stiefel-Whitney characteristic classes

Alessio Di Prisa

30/11/2021

Fibrati vettoriali

Definizione

Un **fibrato vettoriale** ξ di rango n su B è il dato di una sommersione

$$\pi : E \longrightarrow B$$

tale per cui:

- ogni fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ sia un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale,
- localmente sia un prodotto.

Fibrati vettoriali

Definizione

Un **fibrato vettoriale** ξ di rango n su B è il dato di una sommersione

$$\pi : E \longrightarrow B$$

tale per cui:

- ogni fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ sia un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale,
- localmente sia un prodotto.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ & U \ni p. \end{tikzcd}$$

Fibrati vettoriali

Esempio

Sia M una varietà liscia, allora a questa è associata in modo naturale un fibrato vettoriale detto **fibrato tangente** $TM \longrightarrow M$.

Fibrati vettoriali

Definizione

Due fibrati vettoriali $\pi_j : E_j \longrightarrow B$ per $j = 1, 2$ si dicono **isomorfi** se esiste un omeomorfismo $f : E_1 \longrightarrow E_2$ per cui

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

il diagramma commuti e la restrizione di f ad ogni fibra è un isomorfismo lineare.

Fibrati vettoriali

Definizione

Sia $\pi_Y : E \longrightarrow Y$ un fibrato vettoriale e $f : B \longrightarrow Y$ una mappa continua. Allora

$$f^*E = \{(x, v) \in B \times E \mid f(x) = \pi_Y(v)\}$$

con la proiezione sulla prima componente è in modo naturale un fibrato vettoriale su B, detto **pullback** di E tramite f.

Fibrati vettoriali

Definizione

Sia $\pi_Y : E \longrightarrow Y$ un fibrato vettoriale e $f : B \longrightarrow Y$ una mappa continua. Allora

$$f^*E = \{(x, v) \in B \times E \mid f(x) = \pi_Y(v)\}$$

con la proiezione sulla prima componente è in modo naturale un fibrato vettoriale su B, detto **pullback** di E tramite f.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi_B"'] & E \arrow[d, "\pi_Y"] \\ B \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Fibrati vettoriali

Teorema

Siano $f, g : B \longrightarrow Y$ mappe omotope e $\pi_Y : E \longrightarrow Y$ un fibrato vettoriale. Allora $f^*E \cong g^*E$.

Fibrati vettoriali

Teorema

Siano $f, g : B \longrightarrow Y$ mappe omotope e $\pi_Y : E \longrightarrow Y$ un fibrato vettoriale. Allora $f^*E \cong g^*E$.

Esempio

Sia $f : B \longrightarrow Y$ omotopa ad una mappa costante, allora f^*E è isomorfo al **fibrato banale** $B \times \mathbb{R}^n$.

Fibrati vettoriali

Definizione

Indichiamo con $\mathbb{V}_n(B)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati di rango n su B e con $\mathbb{V}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_n(B)$.

Fibrati vettoriali

Definizione

Indichiamo con $\mathbb{V}_n(B)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati di rango n su B e con $\mathbb{V}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_n(B)$.

Abbiamo quindi dei funtori controvarianti

$$\mathbb{V}_n, \mathbb{V} : hCW \longrightarrow Set.$$

Fibrati vettoriali

Siano dati due fibrati vettoriali di rango n e m di basi B e B':

$$E \longrightarrow B$$

$$E' \longrightarrow B'$$

È facile verificare che $E \times E'$ è un fibrato di rango $n + m$ su $B \times B'$, detto **fibrato prodotto**.

Fibrati vettoriali

Siano dati due fibrati vettoriali di rango n e m di basi B e B':

$$E \longrightarrow B$$

$$E' \longrightarrow B'$$

È facile verificare che $E \times E'$ è un fibrato di rango $n+m$ su $B \times B'$, detto **fibrato prodotto**.

Definizione

Siano $B = B'$ e $\Delta : B \longrightarrow B \times B$ la mappa diagonale. Definiamo il fibrato **somma** come

$$E \oplus E' = \Delta^*(E \times E').$$

Classi di Stiefel-Whitney

Assiomi

Vogliamo associare ad ogni $\xi \in \mathbb{V}(B)$ una classe $w(\xi) \in H^*(B, \mathbb{F}_2)$, detta **classe totale di Stiefel-Whitney**, che soddisfi i seguenti assiomi:

- $w_0(\xi) = 1$ e $w_i(\xi) = 0$ per $i > \mathrm{rank}(\xi)$,
- $f^*(w(\xi)) = w(f^*(\xi))$ per ogni $f : Y \longrightarrow B$,
- $w(\xi \times \eta) = w(\xi) \times w(\eta) \in H^*(B \times B')$, per $\eta \in \mathbb{V}(B')$,
- $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$, con γ_1^1 fibrato tautologico su $\mathbb{RP}^1$.

Quadrati di Steenrod

Definizione

I **quadrati di Steenrod** sono trasformazioni naturali

$$Sq^k : H^*(-, \mathbb{F}_2) \Longrightarrow H^{*+k}(-, \mathbb{F}_2)$$

che soddisfano i seguenti assiomi:

- Sq^k sono mappe additive,
- Sq^0 è l'identità,
- $Sq^n(\alpha) = \alpha \smile \alpha$ per ogni α con $\deg(\alpha) = n$,
- se $k > \deg(\alpha)$ allora $Sq^k(\alpha) = 0$,
- $Sq^k(\alpha \times \beta) = \sum_{i+j=k} Sq^i(\alpha) \times Sq^j(\beta)$.

Teorema di Thom

Teorema di isomorfismo di Thom

Sia $\pi : E \longrightarrow B$ un fibrato vettoriale di rango n e $E_0 = E \setminus B$.
Allora esiste un'unica classe $u \in H^n(E, E_0)$, detta **classe di Thom**, la cui restrizione ad ogni fibra $(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x) \cap E_0)$ è non nulla.
Inoltre la corrispondenza

$$H^k(E) \longrightarrow H^{n+k}(E, E_0)$$

$$x \longmapsto x \smile u$$

definisce un isomorfismo per ogni k.

Teorema di Thom

Step 1: Sia $U \subseteq B$ un aperto banalizzante, per cui che $E_{|U} \cong U \times \mathbb{R}^n$. Per il teorema di Kunneth si ha un isomorfismo

$$H^0(U) \longrightarrow H^n(U \times \mathbb{R}^n, U \times \mathbb{R}^n_0)$$

$$1 \longmapsto 1 \times e^n.$$

La classe $u = 1 \times e^n$ è l'unica la cui restrizione ad ogni fibra $(p \times \mathbb{R}^n, p \times \mathbb{R}^n_0)$ è non nulla.
Analogamente per ogni k abbiamo un isomorfismo

$$H^k(U) \longrightarrow H^{n+k}(U \times \mathbb{R}^n, U \times \mathbb{R}^n_0)$$

$$y \longmapsto y \times e^n = (y \times 1) \smile u,$$

da cui segue la tesi nel caso di E fibrato banale.

Teorema di Thom

Step 2: Siano U, V aperti di B e supponiamo che il teorema valga per le restrizioni $E^U, E^V, E^{U\cap V}$. Per l'unicità, le classi di Thom di E^U e E^V coincidono sull'intersezione con la classe di $E^{U\cap V}$ con $u(U\cap V)$. Dunque si incollano ad una classe u su $E^{U\cup V}$, che sarà la classe di Thom.

Teorema di Thom

Step 2: Siano U, V aperti di B e supponiamo che il teorema valga per le restrizioni $E^U, E^V, E^{U\cap V}$. Per l'unicità, le classi di Thom di E^U e E^V coincidono sull'intersezione con la classe di $E^{U\cap V}$ con $u(U\cap V)$. Dunque si incollano ad una classe u su $E^{U\cup V}$, che sarà la classe di Thom.

$$H^*(E^{U\cup V}) \longrightarrow H^*(E^U) \oplus H^*(E^V) \longrightarrow H^*(E^{U\cap V})$$

$$H^*((E,E_0)^{U\cup V}) \longrightarrow H^*((E,E_0)^U) \oplus H^*((E,E_0)^V) \longrightarrow H^*((E,E_0)^{U\cap V})$$

Teorema di Thom

Step 3: Per induzione su n si mostra che se il risultato è vero per aperti U_i, $i = 1, \ldots, n$ e per le intersezioni tra questi allora vale anche per $\bigcup_i U_i$.

Teorema di Thom

Step 3: Per induzione su n si mostra che se il risultato è vero per aperti U_i, $i = 1, \ldots, n$ e per le intersezioni tra questi allora vale anche per $\bigcup_i U_i$.
Step 4: Nel caso in cui B sia compatto è sufficiente prendere un suo ricoprimento finito di aperti banalizzanti per concludere.

Esistenza di $w(\xi)$

Teorema

Per ogni fibrato vettoriale $\xi := E \xrightarrow{\pi} B$ di rango n esiste una successione di classi $w_i(\xi)$ che soddisfa gli assiomi delle classi di Stiefel-Whitney.

Esistenza di $w(\xi)$

Sia $u \in H^n(E, E_0)$ la classe di Thom e indichiamo con

$$\phi_k : H^{n+k}(E, E_0) \longrightarrow H^k(E)$$

l'inverso dell'isomorfismo indotto dal cup product con u.
Definiamo allora

$$w_k(\xi) = \phi_k Sq^k(u).$$

Esistenza di $w(\xi)$

Dalla definizione della classe di Thom segue subito che

$$w_0(\xi) = \phi_0 Sq^0(u) = \phi_0(u) = 1$$

e se $k > n = \deg(u)$, si ha $Sq^k(u) = 0$ e dunque $w_k(\xi) = 0$.

Esistenza di $w(\xi)$

Dalla definizione della classe di Thom segue subito che

$$w_0(\xi) = \phi_0 Sq^0(u) = \phi_0(u) = 1$$

e se $k > n = \deg(u)$, si ha $Sq^k(u) = 0$ e dunque $w_k(\xi) = 0$.
Sia ora $f : Y \longrightarrow B$ una mappa continua e consideriamo il pullback

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

Esistenza di $w(\xi)$

Poiché la mappa tra i fibrati è un isomorfismo lineare sulle fibre, per l'unicità la classe di Thom di $f^*(E)$ è $f^*(u)$. Abbiamo dunque un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H^*(E) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "-\smile u"] & H^*(f^*(E)) \arrow[d, "-\smile f^*u"] \\ H^{*+n}(E, E_0) \arrow[r, "f^*"] & H^{*+n}(f^*(E), f^*(E)_0) \end{tikzcd}$$

Dalla naturalità dei quadrati di Steenrod si ha che $f^*Sq^k(u) = Sq^k(f^*u)$, e dunque $f^*(w(\xi)) = w(f^*(\xi))$.

Esistenza di $w(\xi)$

Dato ora un altro fibrato $\eta := E' \longrightarrow B'$, con classe di Thom u', osserviamo che la classe di Thom di $E \times E' \longrightarrow B \times B'$ è data dal cross product $u \times u' = (u \times 1) \smile (1 \times u')$. Di conseguenza, dalle proprietà dei quadrati di Steenrod si ha

$$w(\xi \times \eta) = w(\xi) \times w(\eta).$$

Esistenza di $w(\xi)$

Sia ora $E \longrightarrow \mathbb{RP}^1$ il line bundle tautologico. Osserviamo che la coppia (E, E_0) è omotopicamente equivalente a $(M, \partial M)$ con M nastro di Möbius. Inoltre che $\mathbb{RP}^2 = M \cup D^2$, dunque per escissione abbiamo

$$H^*(M, \partial M) \cong H^*(\mathbb{RP}^2, D^2).$$

Possiamo quindi considerare la classe di Thom di E come la classe non nulla $u \in H^1(\mathbb{RP}^2, D^2)$.

Esistenza di $w(\xi)$

Per vedere che $w_1(E) \neq 0$ è sufficiente mostrare che $Sq^1(u) = u^2 \neq 0$. D'altra parte dalla successione esatta della coppia

$$H^0(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\cong} H^0(D^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{RP}^2, D^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow H^1(D^2)$$

vediamo che u corrisponde al generatore $a \in H^1(\mathbb{RP}^2)$. Per naturalità allora

$$Sq^1(u) \longmapsto Sq^1(a) = a \smile a \neq 0.$$

Grassmanniana

Definizione

Indichiamo con $\mathcal{G}_{n,m}$ la **varietà grassmanniana** degli n-piani di $\mathbb{R}^m$. Ricordiamo che su $\mathcal{G}_{n,m}$ abbiamo il **fibrato tautologico** γ_m^n definito da

$$E_m^n = \{(p, v) \in \mathcal{G}_{n,m} \times \mathbb{R}^m \mid v \in p\} \longrightarrow \mathcal{G}_{n,m}.$$

Grassmanniana

Il limite delle inclusioni naturali

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & E^n_m \arrow[r] \arrow[d] & E^n_{m+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \mathcal{G}_{n,m} \arrow[r] & \mathcal{G}_{n,m+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

definisce il fibrato tautologico

$$\gamma^n := E_n \longrightarrow \mathcal{G}_n$$

sulla **grassmanniana limite** $\mathcal{G}_n$.

Fibrati vettoriali

Teorema di classificazione

Per ogni spazio B paracompatto la mappa

$$[B, \mathcal{G}_n] \longrightarrow \mathbb{V}_n(B)$$

$$[f] \longmapsto [f^*\gamma^n]$$

è una bigezione naturale.

Fibrati vettoriali

Teorema di classificazione

Per ogni spazio B paracompatto la mappa

$$[B, \mathcal{G}_n] \longrightarrow \mathbb{V}_n(B)$$

$$[f] \longmapsto [f^*\gamma^n]$$

è una bigezione naturale.

In altre parole il funtore $\mathbb{V}_n(-)$ è rappresentato da $[-, \mathcal{G}_n]$.

Grassmanniana

Teorema

La grassmanniana limite $\mathcal{G}_n$ ammette una struttura di CW-complesso con $p(k, n)$ celle di dimensione k.

Grassmanniana

Idea: Dato un n-piano $V \subseteq \mathbb{R}^m$ possiamo considerare la successione di interi

$$0 = \dim(V \cap \mathbb{R}^0) \leq \cdots \leq \dim(V \cap \mathbb{R}^i) \leq \cdots \leq \dim(V \cap \mathbb{R}^m) = n,$$

da cui ricaviamo il **simbolo di Schubert** di V $\sigma = (\sigma(1), \ldots \sigma(n))$, dove

$$\dim(V \cap \mathbb{R}^{\sigma(i)}) = i, \quad \dim(V \cap \mathbb{R}^{\sigma(i)-1}) = i - 1.$$

Indicheremo con $e(\sigma)$ l'insieme dei $V \in \mathcal{G}_{n,m}$ di simbolo σ. Osserviamo che ogni tale V ammette un'unica base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tale che

$$v_i \cdot e_{\sigma(j)} = \delta_{i,j}$$

$$v_i \cdot e_j = 0 \text{ per } j > \sigma(i).$$

Grassmanniana

In altre parole V è span delle righe di un'unica matrice della forma

$$\begin{pmatrix} *\cdots* & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \\ *\cdots* & 0 & *\cdots* & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 1 & 0\cdots0 \end{pmatrix}$$

Vediamo allora che $e(\sigma)$ è parametrizzato da $\mathbb{R}^k$ dove $k = \sum_{i=1}^{n}(\sigma(i) - i)$. Fissato k è possibile verificare che il numero di simboli σ per cui $\dim e(\sigma) = k$ coincide con il numero di modi di scrivere k come somma di al più n interi, ciascuno al più uguale a $m - n$.

Unicità delle classi $w(\xi)$

Teorema

L'anello di coomologia $H^*(\mathcal{G}_n)$ è l'algebra polinomiale libera su $\mathbb{F}_2$ generata dalle classi di Stiefel-Whitney $w_0(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)$.

Unicità delle classi $w(\xi)$

Consideriamo $X = (\mathbb{RP}^\infty)^n$ e il fibrato di rango n $\xi = \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^1$ su questo.
Notiamo che

$$H^*(X) = H^*(\mathbb{RP}^\infty) \otimes \cdots \otimes H^*(\mathbb{RP}^\infty) \cong \mathbb{F}_2[a_1, \ldots, a_n]$$

dove $a_i = \pi_i^*(a)$ e $H^*(\mathbb{RP}^\infty) = \mathbb{F}_2[a]$.

Unicità delle classi $w(\xi)$

Consideriamo $X = (\mathbb{RP}^\infty)^n$ e il fibrato di rango n $\xi = \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^1$ su questo.
Notiamo che

$$H^*(X) = H^*(\mathbb{RP}^\infty) \otimes \cdots \otimes H^*(\mathbb{RP}^\infty) \cong \mathbb{F}_2[a_1, \ldots, a_n]$$

dove $a_i = \pi_i^*(a)$ e $H^*(\mathbb{RP}^\infty) = \mathbb{F}_2[a]$.
Poiché $w(\gamma^1) = 1 + a$, segue subito che

$$w(\xi) = (1 + a_1) \ldots (1 + a_n).$$

Dunque $w_k(\xi) = e_k(a_1, \ldots, a_n)$. In particolare $\{w_i(\xi)\}_{i=1,\ldots,n}$ sono algebricamente indipendenti.

Unicità delle classi $w(\xi)$

Per il teorema di classificazione esiste $\Phi_n : X \longrightarrow \mathcal{G}_n$ per cui $\Phi_n^*(\gamma^n) = \xi$, e dunque $w_i(\xi) = \Phi_n^* w_i(\gamma^n)$.
Segue allora che $w_0(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)$ sono algebricamente indipendenti in $H^*(\mathcal{G}_n)$. Indichiamo con $\mathcal{A}$ la sottoalgebra generata da questi.
Abbiamo allora che

$$p(k,n) = \dim(\mathcal{A}^k) \leq \dim(H^k(\mathcal{G}_n)) \leq p(k,n),$$

da cui $\mathcal{A} = H^*(\mathcal{G}_n)$.

Unicità delle classi $w(\xi)$

Teorema

Esiste un'unica trasformazione naturale $\mathbb{V} \Longrightarrow H^*$ che soddisfa gli assiomi delle classi di Stiefel-Whitney.

Unicità delle classi $w(\xi)$

Supponiamo che w e $\widetilde{w}$ soddisfino gli assioni. Allora $w(\gamma_1^1) = 1 + a = \widetilde{w}(\gamma_1^1) \in H^*(\mathbb{RP}^1)$.
Per naturalità inoltre $w(\gamma^1) = \widetilde{w}(\gamma^1) \in H^*(\mathbb{RP}^\infty)$.
Da quanto visto prima $\Phi_n^* : H^*(\mathcal{G}_n) \longrightarrow H^*(X)$ è iniettiva e vale

$$\Phi_n^* w(\gamma^n) = w(\gamma^1 \times \cdots \times \gamma^1) = \widetilde{w}(\gamma^1 \times \cdots \times \gamma^1) = \Phi_n^* \widetilde{w}(\gamma^n)$$

da cui quindi $w(\gamma^n) = \widetilde{w}(\gamma^n)$.
Per naturalità abbiamo allora che $w = \widetilde{w}$.

Coomologia

Sia ora B uno spazio con $H^i(B) = 0$ per $i > n$.
Le unità di $H^*(B)$ sono gli elementi $\sum_{i=0}^n a_i$, con $a_i \in H^i(B)$ e $a_0 = 1$: il loro inverso $\sum_{i=0}^n \overline{a}_i$ può essere calcolato induttivamente come

$$\overline{a}_0 = 1, \quad \overline{a}_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \overline{a}_{k-j}.$$

In particolare per $\xi \in \mathbb{V}(B)$, $w(\xi)$ è un'unità di $H^*(B)$.
Indichiamo il suo inverso con $\overline{w}(\xi) \in H^*(B)$.

Applicazioni

Proposizione

Sia $\varepsilon^n \in \mathbb{V}(B)$ un fibrato banale, allora $w(\varepsilon^n) = 1$.

Applicazioni

Proposizione

Sia $\varepsilon^n \in \mathbb{V}(B)$ un fibrato banale, allora $w(\varepsilon^n) = 1$.

Corollario

Siano $\xi, \eta \in \mathbb{V}(B)$ tali per cui $\xi \oplus \eta$ sia banale, allora $w(\xi) = \overline{w}(\eta)$.

Applicazioni

Proposizione

Sia $\varepsilon^n \in \mathbb{V}(B)$ un fibrato banale, allora $w(\varepsilon^n) = 1$.

Corollario

Siano $\xi, \eta \in \mathbb{V}(B)$ tali per cui $\xi \oplus \eta$ sia banale, allora $w(\xi) = \overline{w}(\eta)$.

Proposizione

Sia $\xi \in \mathbb{V}(B)$ un fibrato di rango n che ammette k sezioni puntualmente linearmente indipendenti.
Allora $w_i(\xi) = 0$ per $i > n - k$.

Applicazioni

Definizione

Data M varietà liscia, indichiamo con $w(M)$ la classe di Stiefel-Whitney del fibrato tangente di M.

Applicazioni

Definizione

Data M varietà liscia, indichiamo con $w(M)$ la classe di Stiefel-Whitney del fibrato tangente di M.

Proposizione

Sia M una n-varietà liscia e supponiamo che esista un'immersione di M in $\mathbb{R}^{n+k}$. Allora $\overline{w}_i(M) = 0$ per $i > k$.

Applicazioni

Proposizione

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ una n-varietà liscia embedded come chiuso in $\mathbb{R}^{n+k}$. Indicando con ν il fibrato $E \longrightarrow M$ normale a M in $\mathbb{R}^{n+k}$, allora si ha $w_k(\nu) = 0$.

Applicazioni

Sia $N \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ un intorno chiuso di M e $N_0 = N \setminus M$.
Considerando allora il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H^k(N, N_0) \arrow[d] & u \arrow[d, mapsto] \\
H^k(\mathbb{R}^{n+k}) \arrow[r] & H^k(N) & w_k(\nu)
\end{tikzcd}$$

concludiamo che $w_k(\nu) = 0$.

Applicazioni

Corollario

Sia M una n-varietà liscia. Allora se $\overline{w}_k(M) \neq 0$ non esistono embedding chiusi di M in $\mathbb{R}^{n+k}$.

Applicazioni

Proposizione

Sia τ^n il fibrato tangente di $\mathbb{RP}^n$. Allora

$$\tau^n \oplus \varepsilon^1 \cong \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1.$$

Applicazioni

Proposizione

Sia τ^n il fibrato tangente di $\mathbb{RP}^n$. Allora

$$\tau^n \oplus \varepsilon^1 \cong \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1.$$

Corollario

$$w(\mathbb{RP}^n) = w(\tau^n \oplus \varepsilon^1) = w(\gamma_n^1)^{n+1} = (1+a)^{n+1} \in H^*(\mathbb{RP}^n).$$

Applicazioni

1

1 1

P^1: 1 0 1

P^2: 1 1 1 1

P^3: 1 0 0 0 1

P^4: 1 1 0 0 1 1

P^5: 1 0 1 0 1 0 1

P^6: 1 1 1 1 1 1 1 1

P^7: 1 0 0 0 0 0 0 0 1

P^8: 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1

P^9: 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1

P^{10}: 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1

P^{11}: 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1

P^{12}: 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1

P^{13}: 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

P^{14}: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Applicazioni

Corollario

La classe totale di Stiefel-Whitney $w(\mathbb{RP}^n)$ è 1 se e solo se $n + 1 = 2^k$ per qualche k.
In particolare gli unici spazi proiettivi potenzialmente parallelizzabili hanno dimensione $2^k - 1$.

Applicazioni

Proposizione

Supponiamo $\mathbb{R}^n$ ammetta una struttura di algebra di divisione. Allora $\mathbb{RP}^{n-1}$ è parallelizzabile.

Applicazioni

Proposizione

Supponiamo $\mathbb{R}^n$ ammetta una struttura di algebra di divisione. Allora $\mathbb{RP}^{n-1}$ è parallelizzabile.

In particolare $\mathbb{RP}^1$, $\mathbb{RP}^3$ e $\mathbb{RP}^7$ sono parallelizzabili.

Bibliography

Characteristic Classes
J. Milnor, J. Stasheff, 1962

Algebraic Topology
E. H. Spanier, 1966