Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

# Stable commutator length e Teorema di Bavard

Relatore:
Prof. Roberto Frigerio

Candidato:
Alessio Di Prisa

Anno Accademico 2019/2020

# Introduzione

Molti problemi che sorgono naturalmente in ambito geometrico e topologico possono essere ricondotti alla ricerca di una superficie di genere minimo, in un'opportuna classe di superfici in uno spazio $X$.
Seguendo in buona parte il lavoro svolto da Calegari in [Cal09b], iniziamo descrivendo un problema algebrico analogo a questo: dato un gruppo $G$ e un elemento $g$ nel derivato $[G, G]$, determinare la sua *commutator length* $\mathrm{cl}(g)$ ovvero il minimo intero $n$ per cui $g$ può essere scritto come prodotto di $n$ commutatori.
Siano infatti $X$ uno spazio topologico con gruppo fondamentale isomorfo a $G$ e $\gamma$ un laccio in $X$ che rappresenta $g$ in $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Allora la commutator length di $g$ può essere interpretata come il minimo genere di una superficie $S$ connessa, compatta, orientabile e con una componente di bordo per la quale esiste un'applicazione continua $S \longrightarrow X$ per cui $\partial S$ viene mappato in $\gamma$.
Calcolare la commutator length di un elemento è non banale anche nel caso di gruppi finiti. Un problema più agilmente affrontabile è determinare la *stable commutator length*, definita come

$$\mathrm{scl}(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(g^n)}{n}.$$

In termini topologici, con le notazioni precedenti, risulta che

$$\mathrm{scl}(g) = \inf \frac{-\chi^-(S)}{2n(S)}$$

dove $-\chi^-(\cdot)$ è una funzione della caratteristica di Eulero di $S$ e l'estremo inferiore è preso al variare delle superfici $S$ compatte e orientate, non necessariamente connesse, per le quali esiste un'applicazione $S \longrightarrow X$ che mappi l'$i$-esima componente di bordo di $S$ in una potenza $\gamma^{k_i}$, e $n(S) = \sum k_i$.
Tale problema risulta essere strettamente legato ad uno di natura omologica: preso $b$ nello *spazio* $B_1(G)$ *degli 1-bordi* del *bar complex* di $G$ o, equivalentemente, nello spazio degli 1-bordi singolari o simpliciali di uno spazio $K(G, 1)$, calcolarne la *boundary norm*, che può essere vista come la "minima complessità" di una 2-catena $C$ il cui bordo sia $b$.
Il problema in linguaggio omologico ha un'interpretazione duale nei termini della *coomologia limitata* e dei *quasimorfismi*. Questi sono funzioni $\phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui esiste una costante $D \geq 0$ con

$$|\phi(g_1 g_2) - \phi(g_1) - \phi(g_2)| \leq D$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$. La minima di tali costanti $D$ per cui vale la disuguaglianza è detto *difetto* di $\phi$ e lo si indica con $D(\phi)$.
Il risultato principale che arriveremo a mostrare è Teorema di dualità di Bavard, da [Bav91], che precisa il legame di quest'ultimo punto di vista con la stable commutator length: posto $Q(G)$ lo spazio dei quasimorfismi *omogenei*, cioè dei quasimorfismi $\phi$ per cui $\phi(g^n) = n\phi(g)$ per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$, e $H^1(G)$ quello degli omomorfismi da $G$ in $\mathbb{R}$, il difetto $D(\cdot)$ induce una norma su $Q(G)/H^1(G)$ e vale

$$\mathrm{scl}(a) = \frac{1}{2} \sup_{\phi \in Q(G)/H^1(G)} \frac{|\phi(a)|}{D(\phi)}.$$

Infine descriveremo un'applicazione del Teorema di Bavard al calcolo della stable commutator length nel caso di gruppi che *soddisfano una legge*, per i quali $\mathrm{scl}(\cdot)$ risulta essere identicamente nulla sul sottogruppo dei commutatori.

# Capitolo 1

# Nozioni preliminari

Richiamiamo brevemente alcune definizioni e risultati classici che utilizzeremo in seguito, di cui omettiamo la dimostrazione.

**Definizione 1.1.** Diciamo che uno spazio topologico $M$, di Hausdorff e a base numerabile, è una *varietà* (rispettivamente una *varietà con bordo*) di dimensione $n$ se ogni suo punto ammette un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ (rispettivamente ad un aperto di $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$).
Per una $n$-varietà con bordo $M$ denotiamo con $int(M)$ i punti di $M$ che hanno un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, detti *punti interni*. Il complementare di $int(M)$ è detto *bordo* di $M$ e si indica con $\partial M$.

Osservazione. Il bordo di una $n$-varietà con bordo è in modo naturale una $n-1$-varietà senza bordo.

Nel seguito ci riferiremo a una 2-varietà (con o senza bordo) con il termine di *superficie*. Notiamo che se $S$ è una superficie con bordo allora $\partial S$ è unione disgiunta, al più numerabile, di copie omeomorfe a $\mathbb{R}$ e $S^1$.

**Definizione 1.2.** Siano $\phi, \psi : M \longrightarrow N$ omeomorfismi tra due varietà. Diciamo che una mappa $H : M \times [0,1] \longrightarrow N$ è un'*isotopia* tra $\phi, \psi$ se $H(\cdot, t)$ è un omeomorfismo per ogni $t \in [0,1]$ e vale $H(\cdot, 0) = \phi$, $H(\cdot, 1) = \psi$.

**Definizione 1.3** (Incollamento lungo il bordo)**.** Siano $B$,$B'$ due componenti di bordo rispettivamente di due superfici $S$ e $S'$ e sia $\varphi : B \longrightarrow B'$ un omeomorfismo. Definiamo la *l'incollamento* di $S$ e $S'$ tramite $\varphi$ come la superficie $S \cup_\varphi S'$ ottenuta quozientando $S \sqcup S'$, identificando ogni $x \in B$ con $\varphi(x) \in B'$.
Osserviamo che se $S$ e $S'$ sono superfici orientate e $\varphi$ è un omeomorfismo che inverte l'orientazione (considerando su $B$ e $B'$ le orientazioni indotte) allora la superficie ottenuta ha un'orientazione naturale tale per cui le inclusioni $S, S' \longrightarrow S \cup_\varphi S'$ preservano l'orientazione.

Si verifica che la definizione dell'incollamento dipende solo dalla classe di isotopia dell'omeomorfismo $\varphi$.

**Definizione 1.4** (Somma connessa)**.** Siano $D \subseteq S$ e $D' \subseteq S'$ dischi compatti contenuti in due superfici e $\phi : D \longrightarrow D'$ un omeomorfismo. Definiamo la somma connessa $S\#S'$ tramite $\phi$ come la superficie ottenuta dall'incollamento di $S \setminus int(D)$ e $S' \setminus int(D')$ lungo le componenti di bordo $\partial D$ e $\partial D'$ dato da $\phi_{|\partial D}$.

**Definizione 1.5.** Per ogni intero $g \geq 0$ definiamo la *superficie di genere* $g$ come la somma connessa
$$S_g = T\# \cdots \#T$$
di $g$ copie del toro $T = S^1 \times S^1$.
Definiamo poi la *superficie di genere* $g$ *con* $p$ *componenti di bordo* come la superficie $S_{g,p}$ ottenuta da $S_g$ rimuovendo $p$ dischi aperti con chiusure disgiunte.

Si può dimostrare che la definizione sopra è ben posta in quanto la somma connessa di tori non dipende, a meno di omeomorfismo, dalla mappa usata per costruirla, e comunque si rimuovano $p$ dischi con chiusure disgiunte da $S_g$ si ottengono superfici omeomorfe.
Inoltre vale che la caratteristica di Eulero di $S_{g,p}$ è $2 - 2g - p$.

**Teorema 1.6** (Classificazione delle superfici)**.** Ogni superficie connessa, compatta e orientabile è omeomorfa a una superficie $S_{g,p}$ di genere $g$ con $p$ componenti di bordo.

Una dimostrazione del Teorema la si può trovare nel libro [BE80].
Segue che le superfici connesse, compatte e orientabili sono determinate univocamente dagli interi $g, p \geq 0$. Infatti se $S_{g,p}$ è omeomorfa a $S_{g',p'}$ allora il numero delle componenti connesse di bordo deve coincidere, ovvero $p = p'$, e poiché $\chi(S_{g,p}) = \chi(S_{g',p'})$ si ha $g = g'$.

**Definizione 1.7.** Sia $X$ uno spazio topologico. Due curve chiuse $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ si dicono *liberamente omotope* se esiste un'omotopia $H : [0,1]^2 \longrightarrow X$ per cui $H(0,\cdot) = \alpha$, $H(1,\cdot) = \beta$ e $H(s,0) = H(s,1)$ per ogni $s \in [0,1]$.

In particolare dati $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ e $[\beta] \in \pi_1(X, x_1)$ esiste una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ con $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$ tale per cui $[\gamma * \beta * \gamma^{-1}] = [\alpha]$ se e solo se $\alpha$ e $\beta$ sono liberamente omotope, dove con $*$ indichiamo la giunzione di cammini e con $\gamma^{-1}$ la curva inversa di $\gamma$ data da
$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma(1-t). \end{aligned}$$
Dunque due elementi di $\pi_1(X, x_0)$ sono coniugati se e solo se due loro rappresentanti qualunque sono liberamente omotopi.
La definizione del gruppo fondamentale di uno spazio dipende dalla scelta del punto base: dati due punti $x_0, x_1$ di uno spazio $X$, una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ con $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ induce un isomorfismo
$$\begin{aligned} \gamma_\# : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\longrightarrow [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]. \end{aligned}$$
Tale isomorfismo in generale non è canonico, ma lo è a meno di coniugio: presa un'altra curva $\delta : [0,1] \longrightarrow X$ con $\delta(0) = x_0, \delta(1) = x_1$, la composizione $(\delta_\#)^{-1} \circ \gamma_\#$ è l'isomorfismo

di $\pi_1(X, x_0)$ dato dal coniugio per $[\delta * \gamma^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$.
Sia ora $G$ un gruppo e $X$ uno spazio connesso per archi per cui $\pi_1(X, x_0) \cong G$. Per quanto detto sopra possiamo identificare le classi di coniugio di elementi di $G$ e le classi di omotopia libera di curve chiuse in $X$ senza tener conto del punto base $x_0$. Nel seguito studieremo funzioni su gruppi che dipendono unicamente dalla classe di coniugio degli elementi, dunque ometteremo la scelta di un punto base per $\pi_1(X)$, supponendo $X$ connesso per archi, eccetto che quando diversamente necessario.
Ricordiamo infine che dato un gruppo $G$ possiamo costruire uno spazio $X$ (in particolare un CW-complesso) con $\pi_1(X) \cong G$. Nel prosieguo identificheremo spesso elementi di $\pi_1(X)$ con curve chiuse che li rappresentano, ovvero scriveremo $\gamma \in \pi_1(X)$ anziché $[\gamma] \in \pi_1(X)$, inoltre tali curve saranno pensate come mappe $[0,1] \longrightarrow X$ coincidenti agli estremi oppure come mappe $S^1 \longrightarrow X$, a seconda del contesto.

**Definizione 1.8.** (Norme $L^1$ e $L^\infty$) Siano $V$ uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ una sua base fissata. Poniamo su $V$ la *norma* $L^1$ associata a tale base, data da

$$\left|\left|\sum a_i v_i\right|\right|_1 = \sum |a_i|$$

dove la somma è su finiti indici $i \in I$. Questa norma rende $V$ uno spazio vettoriale normato e incompleto, eccetto che nel caso in cui la dimensione di $V$ sia finita.
Consideriamo poi sul duale algebrico di $V$ la norma, possibilmente infinita, data da

$$||f||_\infty = \sup_{i \in I} |f(v_i)|$$

con $f \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$. Le mappe lineari di norma finita sono esattamente gli elementi del duale topologico di $V$, che indichiamo con $V'$, su cui la restrizione $|| \cdot ||_\infty$ dà la *norma* $L^\infty$ duale a $|| \cdot ||_1$. Lo spazio $V'$ con la norma $|| \cdot ||_\infty$ risulta sempre essere uno spazio di Banach.

**Teorema 1.9** (Hahn-Banach)**.** Siano $V$ uno spazio vettoriale reale e $W$ un suo sottospazio. Dati una pseudonorma $p$ su $V$ e un funzionale lineare $f$ su $W$ per cui si abbia $|f(v)| \leq p(v)$ per ogni $v \in W$, si ha che $f$ si estende ad un funzionale lineare $\widetilde{f}$ su $V$ tale per cui per ogni $v \in V$ valga

$$|\widetilde{f}(v)| \leq p(v).$$

Dal Teorema 1.9, di cui è possibile trovare una dimostrazione in [Rud74], segue immediatamente il seguente risultato.

**Corollario 1.10.** *Sia* $(V, || \cdot ||)$ *uno spazio normato e sia* $(V', || \cdot ||')$ *il suo duale. Allora per ogni* $v \in V$ *vale*

$$||v|| = \sup_{f \in V' \setminus \{0\}} \frac{|f(v)|}{||f||'}.$$

**Definizione 1.11.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e sia $V_{\mathbb{Q}}$ un dato spazio vettoriale razionale tale per cui $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$. Un sottospazio $W \subseteq V$ è detto *razionale* rispetto a $V_{\mathbb{Q}}$

se è della forma $W = W_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$, con $W_{\mathbb{Q}} = W \cap V_{\mathbb{Q}}$.
Se $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ e $W = W_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ sono spazi vettoriali reali, $f : V \longrightarrow W$ è un'*applicazione lineare razionale* se $f = f_{\mathbb{Q}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ per qualche applicazione lineare $f_{\mathbb{Q}} : V_{\mathbb{Q}} \longrightarrow W_{\mathbb{Q}}$. Osserviamo che kernel e immagine di un'applicazione lineare razionale sono razionali.

# Capitolo 2

# Stable commutator length

Introduciamo la *commutator length* e la *stable commutator length* e vediamo come queste funzioni siano legate alle superfici, e come quindi sia possibile studiarle da un punto di vista geometrico.

**Definizione 2.1.** Sia $G$ un gruppo e sia $g \in [G, G]$ nel derivato. Definiamo la *commutator length* di $g$, denotata con $\mathrm{cl}(g)$, come il minimo intero $n \in \mathbb{N}$ per cui $g$ è prodotto di $n$ commutatori.
Per convenzione poniamo $\mathrm{cl}(g) = \infty$ per $g \notin [G, G]$.

**Definizione 2.2.** Sia $g \in [G, G]$, definiamo la *stable commutator length* di $g$ come

$$\mathrm{scl}(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(g^n)}{n}.$$

Se per qualche $n \in \mathbb{N}$ si ha $g^n \in [G, G]$ poniamo $\mathrm{scl}(g) = \mathrm{scl}(g^n)/n$, mentre $\mathrm{scl}(g) = \infty$ se nessuna potenza di $g$ è nel derivato di $G$.

Vediamo che fissato $g$ la funzione $n \mapsto \mathrm{cl}(g^n)$ è non-negativa e subadditiva, ovvero $\mathrm{cl}(g^{n+m}) \leq \mathrm{cl}(g^n) + \mathrm{cl}(g^m)$, dunque il limite sopra esiste per seguente lemma [Fek23]

**Lemma 2.3** (Fekete)**.** *Sia $a_n$ una successione di numeri reali non negativi che sia subadditiva. Allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ esiste e coincide con $L = \inf_{n>0} \frac{a_n}{n}$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $n > 0$ per cui $\frac{a_n}{n} < L + \varepsilon$. Sia poi $M = \max_{i<n} a_i$. Preso $m \geq n$ scriviamo $m = qn + r$ con $0 \leq r < n$. Essendo la successione subadditiva abbiamo $a_{qn+r} \leq qa_n + a_r \leq qa_n + M$, dunque per $m$ sufficientemente grande

$$L \leq \frac{a_m}{m} \leq \frac{qa_n}{m} + \frac{M}{m} \leq L + 2\varepsilon$$

poiché per $m \to \infty$ abbiamo $\frac{q}{m} \to \frac{1}{n}$ e $\frac{M}{m} \to 0$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ segue che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L$. □

Dalle definizioni seguono immediatamente le proprietà di monotonia di cl e scl per omomorfismi:

**Proposizione 2.4.** *Sia* $\varphi : G \longrightarrow H$ *un omomorfismo di gruppi. Allora* $\mathrm{cl}_H(\varphi(g)) \leq \mathrm{cl}_G(g)$ *e* $\mathrm{scl}_H(\varphi(g)) \leq \mathrm{scl}_G(g)$.

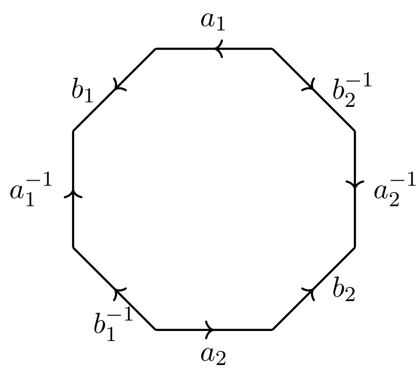
*Dimostrazione.* Poiché l'immagine di un commutatore di $G$ tramite $\varphi$ è un commutatore di $H$ segue che $\mathrm{cl}_H(\varphi(g)) \leq \mathrm{cl}_G(g)$ e di conseguenza $\mathrm{scl}_H(\varphi(g)) \leq \mathrm{scl}_G(g)$. □

**Corollario 2.5.** cl *e* scl *sono costanti sulle orbite dell'azione di* $\mathrm{Aut}(G)$.

**Corollario 2.6.** *Se* $\varphi : G \longrightarrow H$ *ammette un'inversa destra* $\psi : H \longrightarrow G$ *allora* $\mathrm{scl}_G(g) = \mathrm{scl}_G(\varphi(g))$ *per ogni* $g \in G$.

Sia ora $S$ una superficie compatta e orientata di genere $g > 0$. Ricordiamo che $S$ può essere ottenuta come quoziente di un poligono $P$ con $4g$ lati, incollando a due a due i lati come segue: indicandoli ordinatamente come $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g^{-1}, b_g^{-1}$, identifichiamo $a_i \sim a_i^{-1}$ e $b_i \sim b_i^{-1}$, come nell'esempio in figura per il caso $g = 2$. Confondendo i lati $a_i, b_i$ con le corrispondenti classi in $\pi_1(S)$, abbiamo che la presentazione "standard" del gruppo fondamentale di $S$ è data da

$$\pi_1(S) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] \rangle.$$




Analogamente, identificando a coppie i lati di un poligono con $4g + 1$ lati, escludendone uno, otteniamo la superficie compatta, orientata di genere $g$ con una componente di bordo data dal lato escluso. Siano i lati indicati come nel caso precedente e sia $l$ quello escluso, la presentazione standard di $\pi_1(S)$ è data da

$$\pi_1(S) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, l \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = l \rangle.$$

Più in generale data una superficie $S$ compatta, orientata di genere $g$ con $p$ componenti di bordo, indicando con $\gamma_i$ parametrizzazioni delle componenti di bordo e con $t_i$ una curva qualunque dal punto base di $S$ all'$i$-esima componente di bordo, come in figura 2.1, abbiamo che

$$t_1 * \gamma_1 * t_1^{-1} * \dots * t_2 * \gamma_2 * t_2^{-1}$$

è prodotto di $g$ commutatori in $\pi_1(S)$, in quanto è omotopa a $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$.

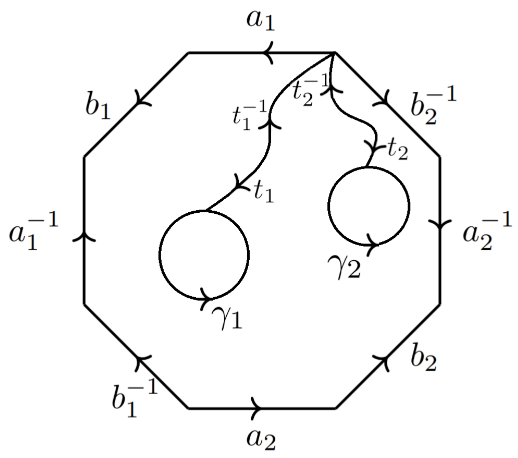



Figura 2.1: Il prodotto di coniugati delle parametrizzazioni delle componenti di bordo è prodotto di genus($S$) commutatori.

**Proposizione 2.7.** *Siano $X$ uno spazio topologico connesso per archi e $\gamma \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$ con $\gamma = [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g]$. Allora esistono una superficie orientata $S$, compatta di genere $g$ con una componente di bordo e una mappa $f : S \longrightarrow X$ per cui $f|_{\partial S} = \gamma$.*

*Dimostrazione.* Sia $P$ un poligono con $4g + 1$ lati, che indichiamo ordinatamente come

$$l, a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g^{-1}, b_g^{-1}.$$

Costruiamo dunque una mappa $f : \partial P \longrightarrow X$ definendola come $\gamma^{-1}$ sul lato $l$, $\alpha_i$ su $a_i$, $\beta_i$ su $b_i$ (e analogamente su $a_i^{-1}$ e $b_i^{-1}$). Per costruzione $f$ è omotopicamente banale, dunque si estende ad una mappa $f : P \longrightarrow X$; identificando ora i lati a due a due come nella costruzione richiamata prima, otteniamo una mappa $\overline{f} : S \longrightarrow X$ tale per cui $\overline{f}|_{\partial S} = \gamma$ (con l'opportuna orientazione di $S$), dove $S$ è una superficie orientata e compatta di genere $g$, con la componente di bordo data dal lato escluso $l$. $\square$

Segue che se $\pi_1(X) \cong G$, dato $a \in G$ si ha che $\mathrm{cl}(a)$ è il minimo genere di una superficie $S$ compatta orientabile con una componente di bordo per cui esiste una mappa $f : S \longrightarrow X$ tale che la classe di omotopia libera di $f|_{\partial S}$ rappresenti la classe di coniugio di $a$. Infatti dalla Proposizione 2.7 appena dimostrata abbiamo che $\mathrm{cl}(a) \geq \min(\mathrm{genus}(S))$ (dove il minimo è preso sulle superfici descritte sopra); viceversa data una tale mappa $f : S \longrightarrow X$, abbiamo che la presentazione standard di $S$ esprime $\partial S \in \pi_1(S)$ come prodotto di $g$ commutatori, dove $g = \mathrm{genus}(S)$; indicata dunque con $f_* : \pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(X)$ la mappa indotta da $f$ abbiamo $\mathrm{cl}(\gamma) = \mathrm{cl}(f_*(\partial S)) \leq g$ in $\pi_1(X)$.
Vogliamo legare in modo analogo scl allo studio del genere di un'opportuna classe di superfici; introduciamo dunque alcune definizioni.

**Definizione 2.8.** Sia $S$ una superficie compatta e orientata, e siano $S_1, \dots, S_k$ le sue componenti connesse. Definiamo

$$-\chi^-(S) = \sum_{i=1}^{k} \max(-\chi(S_i), 0).$$

**Definizione 2.9.** Dati uno spazio $X$ e un loop $\gamma : S^1 \longrightarrow X$, diciamo che una mappa $f : S \longrightarrow X$, con $S$ superficie compatta, orientata con bordo è *ammissibile* per $\gamma$ se esiste una $\partial f : \partial S \longrightarrow S^1$ per cui il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} \partial S \arrow[r] \arrow[d, "\partial f"'] & S \arrow[d, "f"] \\ S^1 \arrow[r, "\gamma"'] & X. \end{tikzcd}$$

Indichiamo con $[\partial S]$ la somma in $H_1(\partial S)$ delle classi fondamentali delle componenti di $\partial S$, con l'orientazione indotta da $S$, e con $\left[S^1\right]$ la classe fondamentale di $S^1$. Se $\partial f_* : H_1(\partial S) \longrightarrow H_1(S^1)$ è la mappa indotta da $\partial f$ sui gruppi di omologia, definiamo $n(S, f)$ come l'intero per cui $\partial f_*([\partial S]) = n(S, f)\left[S^1\right]$. Osserviamo che $n(S, f)$ è semplicemente il grado fra varietà orientate della mappa $\partial f$. A meno di cambiare l'orientazione di $S$ supporremo sempre $n(S, f) \geq 0$. In seguito ometteremo la dipendenza da $f$ e useremo come notazione $n(S) = n(S, f)$.

Notiamo che, come la caratteristica di Eulero, le quantità $-\chi^-(\cdot)$ e $n(\cdot)$ appena definite sono moltiplicative rispetto a rivestimenti finiti; ovvero, se $p : S_m \longrightarrow S$ è un rivestimento di grado $m$ e $f : S \longrightarrow X$ è ammissibile, allora $f \circ p$ è ammissibile, e valgono $-\chi^-(S_m) = m \cdot (-\chi^-(S))$ e $n(S_m) = m \cdot n(S)$.

**Lemma 2.10.** *Sia $S$ una superficie compatta, connessa e orientata con $p > 1$ componenti di bordo. Per ogni $m > 1$ coprimo con $p - 1$ esiste un rivestimento ciclico a $m$ fogli $S_m \longrightarrow S$ con $p$ componenti di bordo, tale per cui, indicate con $\partial_i S_m$ e $\partial_i S$ le componenti di bordo delle due superfici per $i = 1, \dots, p$ la restrizione $\partial_i S_m \longrightarrow \partial_i S$ è un rivestimento ciclico a $m$ fogli.*

*Dimostrazione.* Vediamo $S$ come quoziente di un poligono $P$ con $4g$ lati e $p$ dischi aperti rimossi dalla sua parte interna. Consideriamo un ricoprimento di $P$ dato da due aperti $U, V$ in modo che $U$ sia uguale a tutto $P$ meno la componente di bordo "esterna" e $V$ sia un intorno regolare della componente "esterna" di $\partial P$, in modo che $U \cap V$ sia omeomorfo a $S^1 \times (0, 1)$. Per semplicità denotiamo con $U, V$ i corrispondenti aperti di $S$. Siano ora $e_1, \dots, e_p$ le classi di omologia rappresentanti le componenti di bordo di $S$, con segno concorde all'orientazione di $S$. Per induzione su $p$ è immediato verificare che l'inclusione $\partial S \longrightarrow U$ induce un isomorfismo $H_1(\partial S) \cong H_1(U) \cong \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbb{Z}e_i$; inoltre essendo $H_1(V)$ l'abelianizzato di $\pi_1(V)$ vale $H_1(V) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Abbiamo ora $H_1(U \cap V) = \langle \sum_{i=1}^{p} e_i \rangle$ e per Mayer-Vietoris otteniamo la successione esatta

$$H_1(U \cap V) \longrightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \longrightarrow H_1(S) \longrightarrow \widetilde{H}_0(U \cap V) = 0.$$

Dunque,

$$H_1(S) = \frac{\bigoplus_{i=1}^p e_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2g}}{\langle \sum_{i=1}^p e_i \rangle}.$$

Possiamo quindi completare $e_1, \dots, e_{p-1}$ a base di $H_1(S)$ e definire un omomorfismo $\alpha : H_1(S) \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in modo che si abbia $\alpha(e_i) = 1$ per $i = 1, \dots, p-1$. Ora, se $(m, p-1) = 1$ abbiamo che anche $\alpha(e_p)$ è un elemento primitivo di $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Abbiamo dunque che associato al kernel $K$ della composizione surgettiva $\pi_1(S) \to H_1(S) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ vi è un rivestimento $S_m$ tale per cui

$$0 \longrightarrow \pi_1(S_m) \longrightarrow \pi_1(S) \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

è esatta. Mostriamo ora che il rivestimento così ottenuto è quello cercato. Se $\partial_i S_m$ è una componente di bordo di $S_m$ che viene mappata sulla componente $\partial_i S$ di $\partial S$, abbiamo che $\partial_i S_m \cong S^1 \longrightarrow \partial_i S \cong S^1$ è un rivestimento a $k$ fogli con $k \leq m$. Sia $f_i$ un generatore di $\pi_1(\partial_i S_m)$; allora, $f_i$ viene mappato in $\pm k e_i$ in $\pi_1(S)$, e dunque in $\pm k\alpha(e_i) = 0 \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ per cui $m|k$, essendo $\alpha(e_i)$ primitivo. Segue che $m = k$ e perciò $\partial_i S_m$ è l'unica componente mappata in $\partial_i S$. □

**Proposizione 2.11.** *Sia $X$ uno spazio per cui $\pi_1(X) = G$ e sia $\gamma : S^1 \longrightarrow X$ un loop che rappresenta la classe di coniugio di $a \in G$. Allora vale*

$$\mathrm{scl}(a) = \inf_S \frac{-\chi^-(S)}{2n(S)}$$

*dove l'estremo inferiore è preso su tutte le superfici ammissibili per $\gamma$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathrm{cl}(a^n) = g$, allora esistono una superficie $S$ compatta e orientabile di genere $g$ con 1 componente di bordo e una mappa $f : S \longrightarrow X$ ammissibile per $\gamma$ con $n(S) = n$. Ora $-\chi^-(S) = 2g - 1$ quindi $\mathrm{cl}(a^n)/n \geq -\chi^-(S)/2n(S)$ e dunque $\mathrm{scl}(a) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{cl}(a^n)/n \geq \inf_S -\chi^-(S)/2n(S)$.
Viceversa sia $f : S \longrightarrow X$ una superficie ammissibile per $\gamma$ e siano $S_i$ per $i = 1, \dots, k$ le sue componenti connesse. A meno di invertire l'orientazione delle singole componenti possiamo supporre $n(S_i) \geq 0$, riducendo così il rapporto $-\chi^-(S)/2n(S)$. Ora se fosse $-\chi^-(S_i) > -\chi^-(S)n(S_i)/n(S)$ per ogni $i = 1, \dots, k$ sommando al variare degli $i$ otterremmo

$$-\chi^-(S) = \sum_{i=1}^k -\chi^-(S_i) > \sum_{i=1}^k \frac{-\chi^-(S)n(S_i)}{n(S)} = -\chi^-(S)$$

il che è assurdo. Dunque per qualche $i$ vale $-\chi^-(S_i)/2n(S_i) \leq -\chi^-(S)/2n(S)$ e quindi a meno di ridurre ulteriormente il rapporto possiamo supporre $S$ connessa. Possiamo ora supporre che $S$ abbia $p \geq 2$ componenti di bordo: se così non fosse, a meno di escludere il caso banale $g = 0$ e $p = 1$ per cui $S$ sarebbe omeomorfa ad un disco, quindi $\gamma$ omotopicamente banale e $a = \mathrm{id}$, avremmo $g > 0$ e perciò $S$ ammetterebbe un rivestimento a due fogli analogo a quello in Figura 2.2 per il quale il rapporto $\frac{-\chi^-(\cdot)}{2n(\cdot)}$ non cambia.

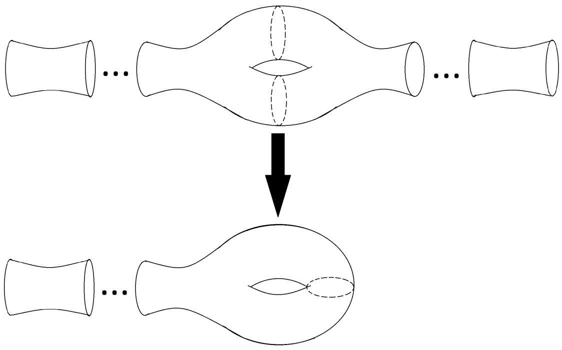


Figura 2.2: Rivestimento dato dall'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per rotazione.

Applicando ora il Lemma 2.10 abbiamo che per ogni $N > 1$ coprimo con $p$ possiamo trovare un rivestimento $p_N : S_N \longrightarrow S$ di grado $N$ con $p$ componenti di bordo; $f_N = f \circ p_N$ è ancora una mappa ammissibile e la quantità $\frac{-\chi^-(\cdot)}{2n(\cdot)}$ è inalterata. Siano ora $\partial_i S_N$ e $\partial_j S_N$ due componenti di bordo di $S_N$, tali da essere mappate rispettivamente in $\gamma^n$ e $\gamma^m$ in $X$, con $m, n \in \mathbb{Z}$. Allora possiamo incollare un paio di pantaloni a $\partial_i S_N, \partial_j S_N$, in modo da ottenere una superficie con genere aumentato di uno, con una componente di bordo in meno (dunque $-\chi^-(\cdot)$ aumenta di 1) e tale per cui la mappa verso $X$ si estenda ad una mappa ammissibile, con la nuova componente di bordo mandata in $\gamma^{n+m}$. Sia infatti $x_0$ il punto base della curva $\gamma$. Consideriamo un poligono sul cui bordo è definita una mappa come in Figura 2.3, dove $x_0$ è la mappa costante, che essendo omotopicamente banale si estende a tutto il poligono. Identificando i lati come indicato, si ottiene il paio di pantaloni voluto, con due delle componenti di bordo mappate in $\gamma^n$ e $\gamma^m$ e l'altra in $\gamma^{m+n}$.

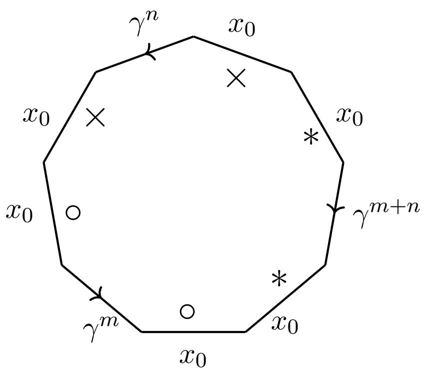



Figura 2.3: Poligono per la costruzione dei pantaloni

Ripetendo il procedimento otteniamo una superficie ammissibile $\widetilde{S}_N \longrightarrow X$ con esattamente una componente di bordo, tale per cui $-\chi^-(\widetilde{S}_N) = -\chi^-(S_N) + p - 1$ e $n(\widetilde{S}_N) =$

$n(S_N)$. Dunque abbiamo

$$\frac{-\chi^-(\widetilde{S}_N)}{2n(\widetilde{S}_N)} = \frac{-\chi^-(S_N)+p-1}{2n(S_N)} = \frac{1-p-N\chi^-(S)}{2Nn(S)}.$$

Poiché $\widetilde{S}_N$ ha una sola componente di bordo abbiamo che $\mathrm{cl}(a^{n(\widetilde{S}_N)}) \leq \mathrm{genus}(\widetilde{S}_N) = -\chi(\widetilde{S}_N)/2+1$ e quindi

$$\frac{\mathrm{cl}(a^{n(\widetilde{S}_N)})}{n(\widetilde{S}_N)} \leq \frac{3-p-N\chi^-(S)}{2Nn(S)}.$$

Ora data $S$ il numero $p$ di componenti di bordo è fissato, mentre $N$ e di conseguenza $n(\widetilde{S}_N)$ possono essere presi grandi a piacere, ottenendo così

$$\mathrm{scl}(a) \leq \frac{-\chi^-(S)}{2n(S)}$$

da cui prendendo l'estremo inferiore nel termine di destra otteniamo la tesi. $\square$

# Capitolo 3

# Coomologia limitata

Introduciamo ora le nozioni di *coomologia limitata* di gruppi e *coomologia limitata singolare o simpliciale* di spazi topologici o $\Delta$-complessi. Le definizioni e gli enunciati sono dati nel caso di coefficienti reali per semplificare l'esposizione, ma buona parte di questi può essere facilmente generalizzata al caso di coefficienti in un arbitrario modulo normato.

Consideriamo un gruppo fissato $G$.
Definiamo il *bar complex* $C_*(G)$ come il complesso dato in dimensione $n$ dall'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale generato dalle $n$-uple $(g_1, \ldots, g_n)$, con $g_i \in G$, dotato della norma $L^1$ associata alla base fornita dalle $n$-uple. Le mappe di bordo $\partial$ sono definite da

$$\partial(g_1, \ldots, g_n) = (g_2, \ldots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (g_1, \ldots, g_i \cdot g_{i+1}, \ldots, g_n) + (-1)^n (g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

In dimensione zero poniamo $C_0(G) = \mathbb{R}$, con operatore di bordo la mappa nulla. Osserviamo che, se $x \in C_n(G)$, vale $||\partial x||_1 \leq (n+1)||x||_1$, dunque i differenziali sono operatori continui.
Denotiamo poi rispettivamente con $B_n(G)$ lo spazio immagine dell'operatore di bordo $\partial : C_{n+1}(G) \longrightarrow C_n(G)$ e con $Z_n(G)$ il kernel di $\partial : C_n(G) \longrightarrow C_{n-1}(G)$. Osserviamo che, essendo le mappe di bordo continue, si ha che $Z_n(G) = \partial^{-1}(0)$ è un chiuso. Poniamo su $B_n(G)$ la *boundary norm* definita da

$$||a||_B = \inf_{\partial A = a} ||A||_1.$$

Poiché il kernel di $\partial : C_{n+1}(g) \longrightarrow B_n(G)$ è $Z_{n+1}(G)$, che è chiuso, $|| \cdot ||_B$ è effettivamente una norma.
In dimensione 1 la boundary norm su $B_1(G)$ è anche detta *norma di Gersten.*
Definiamo poi $C^*(G) = \mathrm{Hom}(C_*(G), \mathbb{R})$ come il duale algebrico di $C_*(G)$, con $\delta$ l'operatore di cobordo indotto da $\partial$ e i *gruppi di coomologia di* $G$ *a coefficienti in* $\mathbb{R}$ come i gruppi di omologia di tale complesso, che indichiamo con $H^*(G)$.
Analogamente, sia $C_b^*(G)$ il duale topologico di $C_*(G)$, le cui cocatene sono dette *limitate* e definiamo la *coomologia limitata di* $G$ a coefficienti reali come l'omologia del complesso

$C_b^*(G)$, che denotiamo con $H_b^*(G)$.
Osserviamo che la norma $||\cdot||_\infty$ induce su $H_b^n(G)$ una pseudonorma, definita per $\alpha \in H_b^n(G)$ come

$$||\alpha||_\infty = \inf ||\sigma||_\infty$$

al variare dei cocicli $\sigma$ che rappresentano $\alpha$.

Definizioni analoghe si possono dare nel caso dei complessi a coefficienti reali di omologia singolare o simpliciale di spazi topologici o $\Delta$-complessi, considerando sempre sui loro termini la norma $L^1$ associata alle basi date dai simplessi singolari o simpliciali e sugli spazi dei bordi la rispettiva boundary norm. Allo stesso modo possiamo dotare della norma $L^\infty$ i complessi ottenuti prendendo i duali topologici, e definire la loro coomologia limitata, con la pseudonorma indotta.

Ora, al gruppo $G$ associamo il $\Delta$-complesso $BG$ costruito come segue: consideriamo $G$ con la topologia discreta come 0-scheletro e aggiungiamo induttivamente un $n$-simplesso per ogni $(n+1)$-upla ordinata di elementi di $G$, incollando ogni faccia all'$(n-1)$-simplesso corrispondente. Vediamo che $BG$ è contrattile tramite l'omotopia che sposta ogni punto $x$ del simplesso $[g_1, \ldots, g_n]$ lungo il segmento da $x$ a $[1]$ in $[1, g_1, \ldots, g_n]$. Tale omotopia è effettivamente ben definita, in quanto restringendosi alla faccia $[g_1, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n]$ si ottiene la stessa deformazione lineare verso $[1]$ in $[1, g_1, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n]$.
C'è un'azione naturale di $G$ su $BG$, ottenuta estendendo linearmente ai simplessi l'azione per moltiplicazione a sinistra di $G$ sull'insieme dei vertici di $BG$. Poiché tale azione è libera e propriamente discontinua, indicando con $X_G$ lo spazio quoziente otteniamo che la proiezione $p : BG \longrightarrow X_G$ è un rivestimento. Dato che $BG$ è semplicemente connesso, risulta essere il rivestimento universale di $X_G$. Inoltre, dal momento che l'azione di $G$ è simpliciale, $X_G$ eredita naturalmente una struttura di $\Delta$-complesso con un solo vertice (l'azione sui vertici di $BG$ è transitiva). Abbiamo quindi che $\pi_1(X_G) = G$ e $\pi_i(X_G) = 0$ per $i > 1$, ovvero che $X_G$ è un $K(G, 1)$. L'unico vertice di $X_G$ fornisce poi una scelta privilegiata del punto base per $\pi_1(X_G)$. Con questa scelta, ogni classe di omotopia di loop in $\pi_1(X_G)$ ha un rappresentante canonico, che permette di esplicitare l'isomorfismo con $G$ nel modo seguente. Dato $g \in G$ gli associamo la classe di omotopia di $p([1, g])$ e vediamo che la giunzione di cammini $p([1, g]) * p([1, h])$ è sollevata in $BG$ alla curva $[1, g] * [g, gh]$, che è omotopa a $[1, gh]$, in quanto $[1, g], [g, gh], [1, gh]$ sono le facce del simplesso $[1, g, gh]$. Dunque il loop $p([1, g]) * p([1, h])$ è nella stessa classe di omotopia di $p([1, gh])$.

**Proposizione 3.1.** *Sia $C_*^\Delta(X_G)$ il complesso delle catene simpliciali a coefficienti reali di $X_G$. Questo è isometricamente isomorfo a $C_*(G)$ in modo canonico.*

*Dimostrazione.* Se indichiamo con $C_*^\Delta(BG)$ il complesso delle catene simpliciali di $BG$, la mappa di proiezione $p : BG \longrightarrow X_G$ induce un morfismo di complessi $p_* : C_*^\Delta(BG) \longrightarrow C_*^\Delta(X_G)$, ottenuto associando ad ogni simplesso la sua proiezione al quoziente. Inoltre vi è una naturale immersione di complessi $C_*(G)$ in $C_*^\Delta(BG)$, data in dimensione $n$ dalla mappa che associa ad ogni $n$-upla $(g_1, \ldots, g_n)$ l'$n$-simplesso $[1, g_1, g_1 \cdot g_2, \ldots, g_1 \cdots g_n]$. Poiché l'immagine delle $n$-uple secondo questa mappa interseca le orbite degli $n$-simplessi per l'azione di $G$ in uno e un solo elemento, la composizione delle due mappe $C_*(G) \longrightarrow C_*^\Delta(BG) \longrightarrow C_*^\Delta(X_G)$ risulta essere un isomorfismo isometrico, in quanto dà in ogni dimensione una bigezione tra le basi che inducono la norma $||\cdot||_1$ sui termini dei due complessi. □

**Corollario 3.2.** *I rispettivi complessi duali $C^*(G)$ e $C^{*,\Delta}(X_G)$ sono isomorfi e dunque la coomologia di $G$ coincide con quella (simpliciale e dunque anche singolare) di $X_G$. Analogamente i duali topologici $C_b^*(G)$ e $C_b^{*,\Delta}(X_G)$ sono isometricamente isomorfi, dunque la coomologia limitata di $G$ e la coomologia limitata simpliciale di $X_G$ sono isomorfe e le relative pseudonorme coincidono.*

**Proposizione 3.3.** *L'inclusione $C_*^\Delta(X_G) \xrightarrow{i} C_*(X_G)$, data considerando ogni simplesso come un simplesso singolare, è un'equivalenza omotopica.*

*Dimostrazione.* Vogliamo definire una retrazione $C_*(X_G) \xrightarrow{r} C_*^\Delta(X_G)$ con questa idea. Dato un simplesso singolare, ne consideriamo il sollevamento a $BG$ e facciamo una media tra i simplessi di $BG$ che hanno l'$i$-esimo vertice sul simplesso minimale contenente l'$i$-esimo vertice del sollevamento, per poi portare questa catena in $X_G$ tramite la proiezione $p$. Più precisamente, per ogni $n$, data $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X_G$, sia $\widetilde{\sigma} : \Delta^n \longrightarrow BG$ un suo sollevamento al rivestimento universale. Se $v_0, \ldots, v_n$ sono i vertici di $\Delta^n$, per ogni $i = 0, \ldots, n$ sia $[w_{i,0}, \ldots, w_{i,k_i}]$ il più piccolo simplesso di $BG$ contenente $\widetilde{\sigma}(v_i)$. Poniamo quindi

$$r(\sigma) = \frac{1}{\prod_{i=0}^n (k_i + 1)} \sum p_* \left([w_{0,h_0}, \ldots, w_{0,h_n}]\right)$$

dove la somma è al variare di $0 \leq h_i \leq k_i$ e $p_* : C_n^\Delta(BG) \longrightarrow C_n^\Delta(X_G)$ è la mappa indotta dalla proiezione. Osserviamo che $r$ è ben definita in quanto non dipende dal sollevamento scelto: un altro sollevamento di $\sigma$ è della forma $g\widetilde{\sigma}$ con $g \in G$ quindi il più piccolo simplesso contenente $g\widetilde{\sigma}(v_i)$ è $[gw_{i,0}, \ldots, gw_{i,k_i}]$ pertanto una volta applicata $p_*$ si ottiene la stessa catena.
Inoltre, se $\sigma \in C_*^\Delta(X_G)$ allora $r \circ i(\sigma) = \sigma$ in quanto il simplesso minimale contentente ciascun vertice di $\widetilde{\sigma}$ è il vertice stesso. Si verifica facilmente che $r$ definisce un morfismo di complessi.
Ora la composizione $i \circ r$ è l'identità di $C_*^\Delta(X_G)$, mentre si può verificare che la mappa $i \circ r$ è omotopa all'identità di $C_*(X_G)$. Infatti dato un simplesso singolare $\sigma \in C_n(X_G)$, se $\widetilde{\sigma}$ è il suo sollevamento, per ogni scelta di $[w_{0,h_0}, \ldots, w_{0,h_n}]$, come nella definizione di $r$, esiste un simplesso di $BG$ sufficientemente grande da contenere sia $[w_{0,h_0}, \ldots, w_{0,h_n}]$ che l'immagine di $\widetilde{\sigma}$. All'interno di questo possiamo definire l'omotopia $H^{h_0,\ldots,h_n} : \Delta^n \times [0,1] \longrightarrow BG$ come combinazione convessa tra $\widetilde{\sigma}$ e $[w_{0,h_0}, \ldots, w_{0,h_n}]$. Osserviamo che da questa si ottiene per restrizione l'omotopia fra le $i$-esime facce dei due simplessi definita in modo analogo. Indichiamo con $v_0, \ldots, v_n$ e $u_0, \ldots, u_n$ rispettivamente i vertici di $\Delta^n \times \{0\}$ e $\Delta^n \times \{1\}$ e consideriamo $[v_0, \ldots, v_i, u_i, \ldots, u_n]$ come un $(n+1)$-simplesso in $\Delta^n \times [0,1]$ al variare di $i$. Poniamo quindi

$$k_n(\sigma) = \frac{1}{\prod_{i=0}^n (k_i + 1)} \sum_{h_0,\ldots,h_n} \sum_{j=0}^n (-1)^j p_* \left(H^{h_0,\ldots,h_n}|_{[v_0,\ldots,v_j,u_j,\ldots,u_n]}\right).$$

Come per $r$, la definizione di $k_n$ non dipende dal sollevamento scelto. Si verifica che le mappe $k_n$ definiscono l'omotopia di complessi cercata tra $r \circ i$ e l'identità di $C_*(X_G)$.

Osserviamo inoltre che sia $r$ che $i$ sono in ogni dimensione mappe lineari di norma operatore 1 rispetto alle relative norme $L^1$, mentre le mappe di omotopia $k_n$ hanno norma operatore $n+1$, dunque tutte queste sono continue. □

**Corollario 3.4.** *Considerando $C_*^\Delta(X_G)$ come sottocomplesso di $C_*(X_G)$ si ha che*

$$B_n^\Delta(X_G) = B_n(X_G) \cap C_n^\Delta(X_G).$$

**Proposizione 3.5.** *L'inclusione $C_*^\Delta(X_G) \xrightarrow{i} C_*(X_G)$ induce un'immersione di $B_*^\Delta(X_G)$ in $B_*(X_G)$, isometrica rispetto alla boundary norm.*

*Dimostrazione.* Poiché $r$ e $i$ sono morfismi di complessi, in ogni dimensione $n$ abbiamo diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}^\Delta(X_G) & \xrightarrow{i_{n+1}} & C_{n+1}(X_G) & \xrightarrow{r_{n+1}} & C_{n+1}^\Delta(X_G) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ B_n^\Delta(X_G) & \xrightarrow{i_n} & B_n(X_G) & \xrightarrow{r_n} & B_n^\Delta(X_G) \end{array}$$

Ora $i_{n+1}$ ha norma operatore 1, quindi dalla definizione di boundary norm si ha che, per ogni $b \in B_n^\Delta(X_G)$,

$$||i_n(b)||_B = \inf_{\partial A = i_n(b)} ||A||_1 \leq \inf_{\partial A = b} ||i_{n+1}(A)||_1 \leq \inf_{\partial A = b} ||A||_1 = ||b||_B,$$

ovvero $i_n$ è decrescente rispetto alla boundary norm. Analogamente, avendo $r_{n+1}$ norma operatore 1 si verifica che lo stesso vale per $r_n$. Poiché $r_n \circ i_n$ è l'identità di $B_n^\Delta(X_G)$ segue che $||i_n(b)||_B = ||b||_B$. □

**Corollario 3.6.** *La composizione $B_n(G) \longrightarrow B_n^\Delta(X_G) \longrightarrow B_n(X_G)$ è un'immersione isometrica rispetto alla boundary norm. In particolare, per $n = 1$, preso $g \in G \cap B_1(G)$ si ha che $\gamma = p([1, g])$ è il suo corrispondente in $B_1(X_G)$, quindi vale $||g||_B = ||\gamma||_B$.*

**Proposizione 3.7.** *I gruppi di coomologia limitata $H_b^{*,\Delta}(X_G)$ e $H_b^*(X_G)$ sono isomorfi e le relative pseudonorme coincidono.*

*Dimostrazione.* Consideriamo le mappe $i^*, r^*$ indotte da $i, r$ sui duali topologici:

$$C_b^{*,\Delta}(X_G) \xrightarrow{r} C_b^*(X_G) \xrightarrow{i} C_b^{*,\Delta}(X_G).$$

Dal fatto che $r \circ i$ è l'identità di $C_*^\Delta(X_G)$ segue che $i^* \circ r^*$ è l'identità di $C_b^{*,\Delta}(X_G)$. Essendo le mappe di omotopia $k_n : C_n(X_G) \longrightarrow C_{n+1}(X_G)$ fra $i \circ r$ e l'identità continue, le loro duali danno un'omotopia di complessi tra $r^* \circ i^*$ e l'identità di $C_b^*(X_G)$. Dunque $i^* : H_b^*(X_G) \longrightarrow H_b^{*,\Delta}(X_G)$ è un isomorfismo. Inoltre, usando il fatto che $i^*$ e $r^*$ hanno norma operatore 1, come $i$ ed $r$, con un ragionamento analogo a quello della Proposizione 3.5 si conclude che l'isomorfismo preserva la pseudonorma. □

**Proposizione 3.8.** *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'equivalenza omotopica tra spazi topologici. Allora $f$ induce un isomorfismo isometrico tra i loro gruppi di coomologia limitata singolare.*

*Dimostrazione.* Sia $g : Y \longrightarrow X$ una mappa per cui $g \circ f$ e $f \circ g$ siano omotope ripettivamente all'identià di $X$ e di $Y$. Si può verificare facilmente che vi sono omotopie di complessi tra $\mathrm{id}, g_* \circ f_* : C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$ e tra $\mathrm{id}, f_* \circ g_* : C_*(Y) \longrightarrow C_*(Y)$ che sono continue in ogni dimensione rispetto alle norme $L^1$ su questi complessi. Dunque i complessi dati dai duali topologici $C_b^*(X)$ e $C_b^*(Y)$ sono omotopicamente equivalenti tramite le mappe indotte $f^*, g^*$. Ora, le mappe $f_*, g_*$ hanno norma operatore 1 in quanto sono definite in dimensione $n$ come $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$ e $g_*(\eta) = g \circ \eta$ per $\sigma \in C_n(X)$ e $\eta \in C_n(Y)$. Quindi anche i loro duali $f^*, g^*$ hanno norma operatore 1. Ne segue che gli isomorfismi indotti $f^* : H_b^*(Y) \longrightarrow H_b^n(Y)$ e $g^* : H_b^*(X) \longrightarrow H_b^*(X)$ sono decrescenti rispetto alle rispettive pseudonorme. Poiché le composizioni $f^* \circ g^*$ e $g^* \circ f^*$ sono rispettivamente l'identità di $H_b^*(X)$ e $H_b^*(Y)$ segue che in realtà $f^* : H_b^*(Y) \longrightarrow H_b^n(Y)$ e $g^* : H_b^*(X) \longrightarrow H_b^*(X)$ preservano la pseudonorma. $\square$

**Corollario 3.9.** *La coomologia limitata di $G$ è isometricamente isomorfa alla coomologia limitata singolare di un qualunque spazio omotopicamente equivalente a $X_G$, in particolare a quella di un qualunque $K(G,1)$.*

Più in generale vale il seguente risultato dimostrato da Gromov

**Teorema 3.10** ([Gro82],[Iva87])**.** Siano $X$ un CW-complesso numerabile e $G = \pi_1(X)$. Allora $H_b^n(X)$ è canonicamente isometricamente isomorfo a $H_b^n(G)$.

Siano ora $G_1$ e $G_2$ due gruppi e $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un omomorfismo, questo induce una mappa naturale di complessi $\varphi_* : C_*(G_1) \longrightarrow C_*(G_2)$, che sulle $n$-uple è data da $\varphi_*(g_1, \dots, g_n) = (\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_n))$. Prendendo il duale algebrico otteniamo $\varphi^* : C^*(G_2) \longrightarrow C^*(G_1)$, da cui una mappa in coomologia $\varphi^* : H^*(G_2) \longrightarrow H^*(G_1)$. Analogamente, poiché in ogni dimensione $\varphi_*$ ha norma operatore 1 rispetto alle norme $L^1$ introdotte, questa induce un morfismo tra i complessi delle cocatene limitate e quindi delle mappe $\phi^* : H_b^n(G_2) \longrightarrow H_b^n(G_1)$ per ogni $n$, che risultano essere decrescenti rispetto alla pseudonorma. È poi immediato verificare che preso un altro morfismo $\psi : G_2 \longrightarrow G_3$, sia in coomologia che in coomologia limitata vale che $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ e che quindi la coomologia e la coomologia limitata di gruppi sono funtoriali.
Definiamo ora un'importante famiglia di gruppi per i quali la coomologia limitata è banale.

**Definizione 3.11.** Si dice che un gruppo $G$ è *amenabile* se ammette una *media* invariante a sinistra, ovvero un operatore lineare $m : C_b^1(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale per cui per ogni $f \in C_b^1(G)$ vale

$$\inf_{g \in G} f(g) \leq m(f) \leq \sup_{g \in G} f(g)$$

e $m(g \cdot f) = m(f)$ dove $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$.

Notiamo che in particolare che se $f : C_1(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ è tale per cui $f(g) = c$ per ogni $g \in G$ con $c \in \mathbb{R}$ allora $m(f) = c$.

Vediamo facilmente che ogni gruppo finito $G$ è amenabile: una media invariante a sinistra è data ponendo per ogni $f \in C^1_b(G)$

$$m(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

Un importante teorema relativo ai gruppi amenabili è dovuto a von Neumann:

**Teorema 3.12.** ([Neu29]) Ogni gruppo abeliano è amenabile.

Abbiamo poi un risultato, di cui è possibile trovare la dimostrazione in [Fri17], che chiarisce come l'amenabilità si conservi sotto certe ipotesi.

**Proposizione 3.13.** *Siano $G, H$ gruppi amenabili. Allora valgono le seguenti:*

1. *Ogni sottogruppo di $G$ è amenabile.*

2. *Se la successione $1 \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow 1$ è esatta allora $K$ è amenabile.*

3. *L'unione diretta di gruppi amenabili è amenabile.*

Segue quindi facilmente che, in particolare, anche i gruppi nilpotenti e risolubili sono amenabili.
Vediamo ora che la coomologia limitata dei gruppi amenabili è banale.

**Proposizione 3.14.** *Sia $G$ un gruppo amenabile. Allora $H^n_b(G) = 0$ per ogni $n \geq 1$.*

*Dimostrazione.* Siano $m$ una media su $G$ e $\phi \in C^n_b(G)$ un cociclo. Poiché $\delta\phi = 0$ si ha che per ogni $x_1, \dots, x_n, x$ vale

$$\begin{aligned} &(-1)^n \phi(x_1, \dots, x_n) = \delta\phi(x_1, \dots, x_n, x) + (-1)^n \phi(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \left[ \phi(x_2, \dots, x_n, x) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \phi(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_n, x) + (-1)^n \phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n x) \right]. \end{aligned}$$

Fissati $x_1, \dots, x_{n-1}$ consideriamo $\phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ come un'applicazione $C_1(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ nell'ultima variabile $x$ e definiamo $f \in C^{n-1}_b$ ponendo

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = m(\phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x).$$

Si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned}
&\delta f(x_1,\dots,x_n) = \\
&= m(\phi(x_2,\dots,x_n,x)) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m(\phi(x_1,\dots,x_i x_{i+1},\dots,x_n,x)) + (-1)^n m(\phi(x_1,\dots,x_{n-1},x)) = \\
&= m(\phi(x_2,\dots,x_n,x)) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m(\phi(x_1,\dots,x_i x_{i+1},\dots,x_n,x)) + (-1)^n m(\phi(x_1,\dots,x_{n-1},x_n x)) = \\
&= m\left(\phi(x_2,\dots,x_n,x) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \phi(x_1,\dots,x_i x_{i+1},\dots,x_n,x) + (-1)^n \phi(x_1,\dots,x_{n-1},x_n x)\right) = \\
&\qquad\qquad = m((-1)^n \phi(x_1,\dots,x_n)) = (-1)^n \phi(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

ovvero che $\phi$ è un cobordo. Dunque $H_b^n(G) = 0$ per ogni $n \geq 1$. $\square$

# Capitolo 4

# Quasimorfismi

Definiamo ora lo spazio dei quasimorfismi di un gruppo, che dimostreremo essere strettamente legato al secondo gruppo di coomologia limitata e successivamente, con il Teorema di dualità di Bavard, alla stable commutator length.

**Definizione 4.1.** Sia $G$ un gruppo. Un *quasimorfismo* su $G$ è una mappa $\phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui esiste una costante $D \geq 0$ con

$$|\phi(g_1 g_2) - \phi(g_1) - \phi(g_2)| \leq D$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$. La minima di tali costanti $D$ per cui vale la disuguaglianza è detto *difetto* di $\phi$ e lo si indica con $D(\phi)$.

I quasimorfismi su un gruppo $G$ formano uno spazio vettoriale reale, che denotiamo con $\widehat{Q}(G)$. Questo contiene, in modo ovvio, gli omomorfismi da $G$ in $\mathbb{R}$, che costituiscono un sottospazio che indichiamo con $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$. Banalmente anche le funzioni limitate sono un sottospazio dei quasimorfismi, che possiamo identificare in modo canonico con $C_b^1(G)$ associando ad una cocatena $\alpha \in C_b^1(G)$ la mappa $G \longrightarrow \mathbb{R}$ ottenuta per restrizione a $G \subseteq C_1(G)$. Più in generale identificheremo una funzione qualunque $G \longrightarrow \mathbb{R}$, ad esempio un quasimorfismo, con la sua estensione lineare $C_1(G) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Poiché ogni omomorfismo limitato $G \longrightarrow \mathbb{R}$ è nullo osserviamo subito che $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}) \cap C_b^1(G) = 0$.
Notiamo infine che un quasimorfismo è un omomorfismo se e solo se il suo difetto è zero.

**Lemma 4.2.** *Siano $g_i \in G$ per $i = 1, \ldots, n$ elementi di $G$ e sia $g = g_1 \ldots g_n$ il loro prodotto. Allora preso $\phi \in \widehat{Q}(G)$ si ha che*

$$|\phi(g) - \sum_{i=1}^{n} \phi(g_i)| \leq (n-1) D(\phi).$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su $n$: il caso $n = 1$ è banale in quanto $g = g_1$. Supponiamo ora vera la tesi per il prodotto di $n-1$ elementi e poniamo $\tilde{g} = g_1 \ldots g_{n-1}$.

Quindi $g$ si scrive come prodotto $g = \tilde{g} g_n$ e da cui

$$|\phi(g) - \sum_{i=1}^{n} \phi(g_i)| = |\phi(g) - \phi(\tilde{g}) - \phi(g_n) + \phi(\tilde{g}) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi(g_i)| \leq D(\phi) + (n-2)D(\phi) = (n-1)D(\phi).$$

□

**Definizione 4.3.** Un quasimorfismo $\phi \in \widehat{Q}(G)$ è detto *antisimmetrico* se per ogni $g \in G$ si ha

$$\phi(g) = -\phi(g^{-1}).$$

Osserviamo che dato un quasimorfismo $\phi$ è possibile ottenerne uno antisimmetrico $\phi'$ ponendo per ogni $g \in G$

$$\phi'(g) = \frac{1}{2}\left(\phi(g) - \phi(g^{-1})\right).$$

Notiamo che la mappa $\phi \longrightarrow \phi'$ è lineare ed è l'identità sul sottospazio dei quasimorfismi antisimmetrici.

**Lemma 4.4.** *Sia $\phi \in \widehat{Q}(G)$ quasimorfismo e sia $\phi'$ il suo antisimmetrizzato. Allora si ha che $D(\phi') \leq D(\phi)$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $a, b \in G$ si ha

$$|\phi'(ab) - \phi'(a) - \phi'(b)| = \frac{1}{2}|\phi(ab) - \phi(a) - \phi(b) - \phi(b^{-1}a^{-1}) + \phi(b^{-1}) + \phi(a^{-1})| \leq D(\phi)$$

da cui $D(\phi') = \sup_{a,b \in G} |\phi'(ab) - \phi'(a) - \phi'(b)| \leq D(\phi)$. □

Osserviamo che se $\phi$ è un quasimorfismo antisimmetrico, per $a, b \in G$ si ha

$$|\phi([a,b])| = |\phi([a,b]) - \phi(a) - \phi(b) - \phi(a^{-1}) - \phi(b^{-1})| \leq 3D(\phi)$$

e in generale se $g \in G$ è prodotto di $n$ commutatori vale $|\phi(g)| \leq (4n-1)D(\phi)$.

**Definizione 4.5.** Un quasimorfismo $\phi \in \widehat{Q}(G)$ è detto *omogeneo* se per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha $\phi(g^n) = n\phi(g)$. Indichiamo con $Q(G)$ il sottospazio vettoriale dei quasimorfismi omogenei di $G$.

**Lemma 4.6.** *Sia $\phi \in \widehat{Q}(G)$ un quasimorfismo. Per ogni $g \in G$ poniamo*

$$\overline{\phi}(g) = \lim_{n \to \infty} \frac{\phi(g^n)}{n}.$$

*Tale limite esiste e $\overline{\phi}$ è un quasimorfismo omogeneo tale per cui $\sup_{g \in G} |\overline{\phi}(g) - \phi(g)| \leq D(\phi)$, ovvero $\overline{\phi}$ differisce da $\phi$ per una funzione limitata.*

*Dimostrazione.* Fissato $\varepsilon > 0$ sia $n_\varepsilon > 0$ un intero per cui $D(\phi)/n_\varepsilon < \varepsilon$. Ora per $n, m \geq n_\varepsilon$ si ha che

$$|\phi(g^{nm}) - m\phi(g^n)| \leq (m-1)D(\phi)$$

da cui dividendo per $nm$ ambo i termini

$$\left|\frac{\phi(g^{nm})}{nm} - \frac{\phi(g^n)}{n}\right| \leq \frac{m-1}{nm}D(\phi) \leq \frac{D(\phi)}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

e analogamente

$$\left|\frac{\phi(g^{nm})}{nm} - \frac{\phi(g^m)}{m}\right| \leq \varepsilon$$

da cui $\left|\frac{\phi(g^n)}{n} - \frac{\phi(g^m)}{m}\right| \leq 2\varepsilon$ ovvero la successione $\frac{\phi(g^n)}{n}$ è di Cauchy e quindi il limite è ben definito.
Osserviamo che per ogni $g \in G$ vale che

$$\left|\overline{\phi}(g) - \phi(g)\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\phi(g^n)}{n} - \phi(g)\right| \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}D(\phi) \leq D(\phi),$$

dunque $\overline{\phi}$ è un quasimorfismo, essendo $\overline{\phi} - \phi$ limitata.
Inoltre per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\left|\overline{\phi}(g^n) - n\overline{\phi}(g)\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\phi(g^{nm})}{m} - n\frac{\phi(g^m)}{m}\right| \leq \lim_{m\to\infty}\frac{n-1}{m}D(\phi) = 0$$

dunque $\overline{\phi}$ è omogeneo. □

Notiamo che banalmente vale anche il viceversa: se $\phi - \psi$ è una funzione limitata allora omogeneizzando si ottiene $\overline{\phi} = \overline{\psi}$.

Osservazione. Sia $\phi$ un quasimorfismo omogeneo su $G$. Allora per ogni $a, b \in G$ si ha

$$|\phi(aba^{-1}) - \phi(b)| = \frac{1}{n}|\phi(ab^na^{-1}) - \phi(b^n)| \leq 2D(\phi)/n$$

per ogni $n$ intero positivo, dunque $\phi(aba^{-1}) = \phi(b)$, ovvero $\phi$ è costante sulle classi di coniugio di $G$.

**Lemma 4.7.** *Sia $\phi$ un quasimorfismo omogeneo su $G$, allora*

$$\sup_{a,b\in G}|\phi([a,b])| = D(\phi).$$

*Dimostrazione.* Notiamo subito che per $a, b \in G$ si ha

$$|\phi([a,b])| = \left|\phi([a,b]) - \phi(aba^{-1}) - \phi(b^{-1})\right| \leq D(\phi).$$

Per provare quindi che $D(\phi)$ è l'estremo superiore, ricordiamo che per $a, b \in G$ l'elemento $a^{2n}b^{2n}(ab)^{-2n}$ può essere scritto come prodotto di $n$ commutatori. Siano quindi $a, b \in G$ per cui $|\phi(ab) - \phi(a) - \phi(b)| \geq D(\phi) - \varepsilon$. Allora essendo $\phi$ omogeneo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|\phi((ab)^{2n}) - \phi(a^{2n}) - \phi(b^{2n})| \geq 2n(D(\phi) - \varepsilon).$$

Poiché possiamo scrivere $(ab)^{2n} = c_1 \cdots c_n a^{2n} b^{2n}$ con $c_i$ commutatori abbiamo che

$$\left| \phi((ab)^{2n}) - \phi(a^{2n}) - \phi(b^{2n}) - \sum_{i=1}^{n} \phi(c_i) \right| \leq (n+1)D(\phi).$$

Quindi per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \phi(c_i) \right| \geq (n-1)D(\phi) - 2n\varepsilon$$

e se $1 \leq i \leq n$ è l'indice per cui $|\phi(c_i)|$ è massimo si ha $|\phi(c_i)| \geq \frac{n-1}{n}D(\phi) - 2\varepsilon$, ovvero vi sono commutatori $c_i$ per cui $|\phi(c_i)|$ è arbitrariamente vicino a $D(\phi)$. $\square$

**Teorema 4.8.** Sia $G$ un gruppo. Vi è una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(G) \longrightarrow Q(G) \longrightarrow H_b^2(G) \longrightarrow H^2(G).$$

*Dimostrazione.* Abbiamo una successione esatta di complessi (omettiamo la dipendenza da $G$)

$$0 \longrightarrow C_b^* \longrightarrow C^* \longrightarrow C^*/C_b^* \longrightarrow 0$$

e della successione esatta lunga associata in coomologia consideriamo

$$H_b^1(G) \longrightarrow H^1(G) \longrightarrow H^1(C^*/C_b^*) \longrightarrow H_b^2(G) \longrightarrow H^2(G).$$

Osserviamo che $B^1(G) = B_b^1(G) = 0$ e che preso un cociclo $\alpha \in Z^1(G)$, si ha $\partial\alpha(g_1, g_2) = \alpha(g_1) + \alpha(g_2) - \alpha(g_1 g_2) = 0$ per $g_1, g_2 \in G$. Dunque possiamo identificare $Z^1(G) = H^1(G)$ con $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$. Allo stesso modo nel caso limitato si ha che $H_b^1(G)$ è identificato con gli omomorfismi da $G$ in $\mathbb{R}$ limitati, quindi $H_b^1(G) = 0$. Ora una funzione $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ è un quasimorfismo se e solo se $\delta\varphi \in C_b^2(G)$, quindi $Z^1(C^*/C_b^*) = \widehat{Q}(G)/C_b^1(G)$. Poiché due quasimorfismi hanno la stessa omogeneizzazione se e solo se differiscono per una funzione limitata (e come prima $B^1(C^*/C_b^*) = 0$) si ha che $H^1(C^*/C_b^*) = \widehat{Q}(G)/C_b^1(G) = Q(G)$. $\square$

Abbiamo dunque dimostrato che il kernel della *mappa di confronto* $H_b^2(G) \longrightarrow H^2(G)$, che indichiamo con $EH_b^2(G)$, è naturalmente isomorfo a $Q(G)/H^1(G)$, che rappresenta quindi la parte *esatta* della coomologia limitata in dimensione 2.

**Proposizione 4.9.** *Il duale dello spazio $B_1(G)$ rispetto alla boundary norm è $\widehat{Q}(G)/H^1(G)$ su cui la norma operatore coincide con la norma del difetto $D(\cdot) = ||\delta \cdot ||_\infty$.*

Indichiamo con $B_1(G)'$ lo spazio duale di $B_1(G)$ dei funzionali lineari limitati, dotato della norma operatore. Ora un elemento $f \in B_1(G)'$ determina un funzionale $F \in C_b^2(G)$ ponendo $F(A) = f(\partial A)$ per $A \in C_2(G)$, dove $F$ ha la stessa norma operatore di $f$. Essendo $B_1(G)$ un sottospazio di $C_1(G)$, $f$ si estende ad una mappa lineare $\phi : C_1(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, per la quale vale $\delta\phi = F$, dunque $\phi \in \widehat{Q}(G)$ essendo $F$ limitata. Osserviamo che se $\psi$ è un'altra estensione di $f$ si ha $\delta(\phi - \psi) = F - F = 0$, ovvero due estensioni qualunque differiscono per un elemento di $H^1(G)$, cioè un omomorfismo. Otteniamo così una mappa $B_1(G)' \longrightarrow \widehat{Q}(G)/H^1(G)$, associando ad ogni $f$ la classe di una sua estensione $\phi$. L'applicazione lineare così costruita risulta essere iniettiva per quanto osservato. Inoltre ogni quasimorfismo può essere esteso per linearità a $C_1(G)$ e poi ristretto a $B_1(G)$, ottenendo così una mappa $B_1(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ che è limitata nella norma del difetto, essendo su $G$ un quasimorfismo, e che dunque è un elemento di $B_1(G)'$. Segue che $B_1(G)' \longrightarrow \widehat{Q}(G)/H^1(G)$ è anche surgettiva. Sia ora $b \in B_1(G)$ con $||b||_B = 1$ e $A \in C_2(G)$ con $\partial A = b$ e $||A||_1 \leq 1 + \varepsilon$. Scriviamo $A$ come $\sum_{i=1}^n a_i(g_i, h_i)$ con $\sum_{i=1}^n |a_i| = ||A||_1$. Allora abbiamo che

$$|f(b)| = |F(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i||F(g_i, h_i)| \leq (1+\varepsilon) \sup_i |F(g_i, h_i)| = (1+\varepsilon) \sup_i |\delta\phi(g_i, h_i)| \leq (1+\varepsilon) D(\phi)$$

quindi la norma operatore di $f$ è minore o uguale di $D(\phi)$.
Viceversa presi $g_1, g_2 \in G$ si ha

$$\frac{|F(g_1, g_2)|}{||(g_1, g_2)||_1} = |\phi(g_1) + \phi(g_2) - \phi(g_1 g_2)|.$$

Poiché l'estremo superiore del termine di destra è $D(\phi)$, si ha che la norma operatore di $F$, e quindi quella di $f$, è maggiore o uguale di $D(\phi)$. Insieme all'altra disuguaglianza si ottiene dunque che la norma operatore di $f$ è uguale a $D(\phi)$.

**Corollario 4.10.** *Lo spazio $\widehat{Q}(G)/H^1(G)$ con la norma del difetto è uno spazio di Banach, in quanto duale di uno spazio normato.*

Un'immediata conseguenza della Proposizione 4.9 e del Teorema 1.9 (Hahn-Banach) è il seguente corollario.

**Corollario 4.11.** *Per ogni $a = \sum_{i=1}^n a_i g_i \in B_1(G)$ con $g_i \in G$ vale*

$$||a||_B = \sup_{\phi \in \widehat{Q}(G)/H^1(G)} \frac{|\sum_{i=1}^n a_i \phi(g_i)|}{D(\phi)}.$$

**Proposizione 4.12.** *Il sottospazio $Q(G)/H^1(G)$ di $\widehat{Q}(G)/H^1(G)$ è chiuso rispetto alla topologia del difetto. Dunque questo è a sua volta uno spazio di Banach, con la norma $D(\cdot)$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $\phi \in \widehat{Q}(G)$ sia $\overline{\phi} \in Q(G)$ il suo omogeneizzato. Consideriamo la mappa

$$\widehat{Q}(G)/H^1(G) \longrightarrow \widehat{Q}(G)/H^1(G)$$

$$[\phi] \longmapsto \left[\overline{\phi} - \phi\right].$$

Poiché $D(\overline{\phi} - \phi) \leq 2D(\phi)$ segue che è una mappa lineare limitata. Il kernel di questa mappa è esattamente $Q(G)/H^1(G)$, che è quindi chiuso per la topologia del difetto. □

Dal Teorema 4.8 segue che la mappa $\delta : Q(G)/H^1(G) \longrightarrow H^2_b(G)$ è iniettiva. Quindi $Q(G)/H^1(G)$ può essere pensato come sottospazio di $H^2_b(G)$ dotato della pseudonorma $||\cdot||_\infty$ di quest'ultimo.

**Proposizione 4.13.** *Sia $\phi$ un quasimorfismo omogeneo su $G$. Indichiamo con $[\delta\phi] \in H^2_b(G)$ la sua immagine tramite $\delta : Q(G) \longrightarrow H^2_b(G)$, allora vale*

$$D(\phi) \geq ||\,[\delta\phi]\,||_\infty \geq \frac{1}{2}D(\phi).$$

*In particolare la pseudonorma $||\cdot||_\infty$ di $H^2_b(G)$ è una norma su $Q(G)/H^1(G)$, che induce la stessa topologia della norma del difetto.*

*Dimostrazione.* Ogni elemento nella classe di $\delta\phi$ è della forma $\delta\phi + \delta g$, con $g \in C^1_b(G)$, quindi indicando con $f = \phi + g$ si ha che $f$ è un quasimorfismo, non necessariamente omogeneo, che differisce da $\phi$ per una funzione limitata. Dunque $\phi$ risulta essere l'omogeneizzazione di $f$. Poiché $D(f) = ||\delta f||_\infty$, dalla definizione di pseudonorma segue che

$$||\,[\delta\phi]\,||_\infty = \inf_{f-\phi\in C^1_b(G)} D(f) \leq D(\phi).$$

Osserviamo che poiché fare l'antisimmetrizzato di un quasimorfismo non ne aumenta il difetto, per calcolare $||\,[\delta\phi]\,||_\infty$ è sufficiente prendere l'inf di $D(f)$ al variare dei quasimorfismi $f$ antisimmetrici che hanno $\phi$ come omogeneizzazione. Sia allora $f - \phi \in C^1_b(G)$, con $f$ antisimmetrico e siano $a, b \in G$ qualunque. Poiché $f$ è antisimmetrico e $a^{2n}b^{2n}(ab)^{-2n}$ è prodotto di $n$ commutatori si ha $|f(a^{2n}b^{2n}(ab)^{-2n})| \leq (4n-1)D(f)$. Essendo $\phi$ omogeneo vale che $|\phi(a^{2n}b^{2n}(ab)^{-2n}) - 2n\delta\phi(a,b)| \leq 2D(\phi)$ e differendo $f$ da $\phi$ per una funzione limitata si ha

$$2D(f) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|f(a^{2n}b^{2n}(ab)^{-2n})|}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\phi(a^{2n}b^{2n}(ab)^{-2n})|}{2n} = |\delta\phi(a,b)|.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare di $a, b \in G$ e usando il il Lemma 4.7, segue che $D(\phi) \leq 2D(f)$ e dunque che

$$\frac{1}{2}D(\phi) \leq ||\,[\delta\phi]\,||_\infty.$$

□

Osserviamo che in particolare si è dimostrato che per $f \in \widehat{Q}(G)$ con omogeneizzazione $\phi \in Q(G)$ vale

$$D(f) = ||\delta f||_\infty \geq ||\,[\delta\phi]\,||_\infty \geq \frac{1}{2}D(\phi).$$

Si congettura inoltre che se $\phi$ è un quasimorfismo omogeneo su $G$ allora vale l'uguaglianza

$$D(\phi) = 2||\,[\delta\phi]\,||_\infty,$$

almeno nel caso in cui $G$ è numerabile ([Hub13]).
Con la Proposizione 4.12 abbiamo dimostrato che $Q(G)/H^1(G) = EH_b^2(G)$ con la norma del difetto e, per la Proposizione 4.13, con la pseudonorma di $H_b^2(G)$ è uno spazio di Banach.
Vale inoltre un risultato che estende quanto appena visto, dimostrato indipendentemente da Ivanov [Iva90] e da Matsumoto e Morita [MM85]:

**Teorema 4.14.** Sia $G$ un gruppo. Allora $H_b^2(G)$ con la pseudonorma canonica è uno spazio di Banach, ovvero $||\cdot||_\infty$ è una norma.

Per il Teorema 3.10 segue immediatamente il corollario:

**Corollario 4.15.** *Se $X$ è un CW-complesso numerabile allora $H_b^2(X)$ è uno spazio di Banach.*

In generale però $EH_b^2(G)$ può essere di dimensione infinita anche quando $G$ è finitamente presentato. Vediamo il caso del gruppo libero su due generatori $F_2 = \langle s_1, s_2\rangle$, per il quale esibiamo una famiglia di quasimorfismi di dimensione infinita, che si immerge in $EH_b^2(F_2)$, dovuta a Rolli [Rol09].

**Proposizione 4.16** (Rolli)**.** *Definiamo $l^\infty_{odd}(\mathbb{Z}) = \{\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} : \alpha(n) = -\alpha(-n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, ||\alpha||_\infty < \infty\}$. Allora esiste una mappa lineare iniettiva $l^\infty_{odd}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \widehat{Q}(F_2)/H^1(F_2)$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $\alpha \in l^\infty_{odd}$ definiamo

$$f_\alpha : F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s_{i_1}^{n_1} \cdots s_{i_k}^{n_k} \longmapsto \sum_{j=1}^{k} \alpha(n_j)$$

dove identifichiamo un elemento $\omega \in F_2$ con l'unica parola ridotta $s_{i_1}^{n_1} \cdots s_{i_k}^{n_k}$ nei due generatori che la rappresenta. Mostriamo che $f_\alpha$ è un quasimorfismo. Siano $\omega_1 = x_0 \cdots x_n$ e $\omega_2 = y_0 \cdots y_m$ con $x_i$ e $y_j$ potenze dei generatori, in modo che le due scritture sopra siano ridotte; allora il prodotto in forma ridotta sarà $\omega_1\omega_2 = x_0 \cdots x_{n-r} \cdot z \cdot y_r \cdots y_m$ dove $z$ è anch'esso potenza non banale di uno dei generatori oppure $\omega_1\omega_2 = x_1 \cdots x_{n-r} \cdot y_{r+1} \cdots y_m$ (ammettendo che $z$ possa essere banale li consideriamo come un unico caso). Osserviamo che vale quindi $x_i = y_i^{-1}$ per $i = 1 \ldots r-2$ e perció $f_\alpha(x_{n-i}) + f_\alpha(y_i) = 0$. Abbiamo dunque che

$$|f_\alpha(\omega_1) + f_\alpha(\omega_2) - f_\alpha(\omega_1\omega_2)| = \left| \sum_{i=0}^{n-r+1} f_\alpha(x_i) + \sum_{j=r-1}^{m} f_\alpha(y_j) - f_\alpha(\omega_1\omega_2) \right| \leq$$
$$\leq |f_\alpha(x_{n-r+1}) + f_\alpha(y_{r-1} - f_\alpha(z)| \leq 3||\alpha||_\infty,$$

ovvero che $f_\alpha$ è un quasimorfismo. Definiamo quindi la mappa lineare

$$l^\infty_{odd}(\mathbb{Z}) \longrightarrow EH^2_b(F_2)$$

$$\alpha \longmapsto [\delta f_\alpha] \,.$$

Supponiamo che $[\delta f_\alpha] = 0$, allora $f_\alpha = \varphi + \psi$ dove $\varphi$ è un omomorfismo e $\psi$ è una funzione limitata. Si ha allora che $\alpha(k) = f_\alpha(s_i^k) = k\varphi(s_i) + \psi(s_i^k)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$ ma $\alpha$ e $\psi$ sono funzioni limitate, dunque deve valere $\varphi(s_i) = 0$ per $i = 1, 2$ ovvero $\varphi = 0$ e $f_\alpha = \psi$. Per ogni $k, h \in \mathbb{Z}$ si ha poi che $f_\alpha((s_1^k s_2^k)^h) = 2h\alpha(k)$ ed essendo $f_\alpha$ limitata segue che $\alpha(k) = 0$ per ogni $k$, da cui l'iniettività della mappa definita. □

Poiché $l^\infty_{odd}(\mathbb{Z})$ ha dimensione infinita e $EH^2_b(F_2)$ è un sottospazio di $H^2_b(F_2)$ segue che anche quest'ultimo ha dimensione infinita. Questo risultato si generalizza immediatamente ad altri gruppi.

**Corollario 4.17.** *Sia $G$ un gruppo che ammette un epimorfismo $\phi : G \longrightarrow F_2$. Allora $EH^2_b(G)$ ha dimensione infinita.*

*Dimostrazione.* L'omomorfismo $\phi$ induce un'applicazione lineare

$$\phi^* : EH^2_b(F_2) \longrightarrow EH^2_b(G)$$

$$[\delta f] \longmapsto [\delta(f \circ \phi)]$$

dove $f$ è un quasimorfismo omogeneo su $F_2$.
Poiché $F_2$ è libero, $\phi$ ha un'inversa destra $\psi : F_2 \longrightarrow G$. Definendo analogamente $\psi^*$si ha che la composizione

$$EH^2_b(F_2) \xrightarrow{\phi^*} EH^2_b(G) \xrightarrow{\psi^*} EH^2_b(F_2)$$

è tale per cui $\psi^* \circ \phi^* = \mathrm{id}_{EH^2_b(F_2)}$. Segue quindi che $\phi^*$ è iniettiva e $EH^2_b(G)$ ha dimensione infinita. □

# Capitolo 5

# Teorema di dualità di Bavard

Nel capitolo 3 abbiamo introdotto lo spazio degli 1-bordi $B_1(G)$ per un gruppo $G$ e dimostrato che si immerge isometricamente, rispetto alla boundary norm, nello spazio degli 1-bordi singolari $B_1(X)$ dove $X$ è un $K(G,1)$ e che quando $X = X_G$ abbiamo un'immersione canonica. Mostriamo adesso come la stable commutator length sia legata alla boundary norm e di conseguenza allo spazio dei quasimorfismi, arrivando a dimostrare il Teorema di dualità di Bavard.

**Proposizione 5.1.** *Considerando gli elementi di $G$ come 1-catene si ha l'inclusione $[G,G] \subseteq B_1(G)$.*

*Dimostrazione.* Poiché per ogni $a,b \in G$ si ha $\partial(a,b) = a+b-ab$ segue che se $a,b \in B_1(G)$ allora $ab \in B_1(G)$, dunque è sufficiente mostrare che i commutatori sono contenuti in $B_1(G)$. Presi $x,y \in G$ si ha $\partial((xyx^{-1},x) + ([x,y],y) - (x,y)) = [x,y]$, quindi $[G,G] \subseteq B_1(G)$. □

**Proposizione 5.2.** *Definiamo $H(G)$ come il sottospazio di $C_1(G)$ generato da $g - hgh^{-1}$ e $g^n - ng$ al variare di $g,h \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Allora $H(G)$ è un sottospazio di $B_1(G)$. Ci riferiremo a $H(G)$ come al sottospazio degli 1-bordi* omogenei*.*

*Dimostrazione.* Presi $g,h \in G$ si ha $\partial(g,\left[g^{-1},h\right]) = g - hgh^{-1} + \left[g^{-1},h\right]$ e poiché abbiamo già visto che $\left[g^{-1},h\right]$ è un bordo segue che $g - hgh^{-1} \in B_1(G)$.
Ora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $\partial(g,g^n) = g + g^n - g^{n+1}$ quindi per induzione su $n$ si ha immediatamente che $g^n - ng \in B_1(G)$. □

Osserviamo che dalle due Proposizioni precedenti segue immediatamente che se $g^n \in [G,G]$ allora $g \in B_1(G)$.

**Definizione 5.3.** Introduciamo ora la *filling norm* ottenuta omogeneizzando la norma di Gersten. Per $a = \sum a_i g_i \in B_1(G)$ definiamo

$$\mathrm{fill}(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{||\sum a_i g_i^n||_B}{n}.$$

Osserviamo in primo luogo che se $\sum a_i g_i \in B_1(G)$ poiché $\sum n a_i g_i \in G$ per la Proposizione 5.2 si ha che $\sum a_i g_i^n \in B_1(G)$. Inoltre poiché $\partial(g^r, g^s) = g^r + g^s - g^{r+s}$ abbiamo che se $A \in C_2(G)$ è una catena per cui $\partial A = \sum a_i g_i^r + \sum a_i g_i^s$ allora $\partial \left(A - \sum a_i(g_i^r, g_i^s)\right) = \sum a_i g_i^{r+s}$ da cui segue che $||\sum a_i g_i^{r+s}||_B \leq ||\sum a_i g_i^r||_B + ||\sum a_i g_i^s||_B + \sum |a_i|$. Quindi la funzione $n \longmapsto ||\sum a_i g_i^n||_B$ è subadditiva a meno di una costante che non dipende da $n$, il che è sufficiente per vedere che $\mathrm{fill}(a)$ è bene definito, in modo analogo a quanto visto nel Lemma 2.3. È poi immediato che essendo $||\cdot||_B$ una norma, $\mathrm{fill}(\cdot)$ sia una pseudonorma su $B_1(G)$.

Poiché abbiamo un'immersione canonica $B_1(G) \longrightarrow B_1(X_G)$ isometrica rispetto alla boundary norm, identificheremo liberamente un elemento $a \in [G, G]$ con la curva immagine tramite l'immersione, ai fini di calcolarne boundary norm e commutator length.

**Definizione 5.4.** Sia $X$ uno spazio topologico. Denotiamo con $C_*(X, \mathbb{Z})$ e $C_*(X, \mathbb{Q})$ rispettivamente i complessi dei simplessi singolari a coefficienti interi e razionali. Poniamo su questi le norme $L^1$ relative alle basi date dai simplessi singolari, come fatto nel caso reale. Osserviamo che abbiamo delle inclusioni naturali

$$C_*(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_*(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_*(X).$$

Inoltre vale che $C_*(X) = C_*(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$, dunque un sottospazio di $C_n(X)$ sarà per noi razionale se lo è rispetto a $C_n(X, \mathbb{Q})$.

**Definizione 5.5.** Preso $a \in B_1(X, \mathbb{Z})$ un 1-bordo a coefficienti interi definiamo la sua "*boundary norm intera*" come

$$|a|_{\mathbb{Z}} = \inf ||A||_1$$

al variare degli $A \in C_1(X, \mathbb{Z})$ con $\partial A = a$. Osserviamo che l'estremo inferiore è in effetti un minimo, in quanto $||A||_1$ assume valori interi non negativi. In generale $|\cdot|_{\mathbb{Z}}$ non è in realtà una norma su $B_1(X, \mathbb{Z})$.

Sia ora $A \in C_2(X, \mathbb{Z})$, della forma $A = \sum_{i=1}^n n_i \sigma_i$ con $\sigma_i : \Delta^2 \longrightarrow X$ e $n_i = \pm 1$, ammettendo che le $\sigma_i$ si ripetano. Sia $\partial A = a$. Possiamo accoppiare i lati dei simplessi in modo che diano contributo nullo in $\partial A$, escludendo $||a||_1$ lati che danno come contributo $a$. Sia quindi $S$ la superficie ottenuta identificando in tal modo i lati degli $n$ simplessi $\Delta^2$. Orientando ciascun simplesso in base al segno $n_i$, otteniamo che $S$ è una superficie orientata, compatta e con $p$ componenti di bordo. La condizione di incollamento dei bordi dei $\Delta^2$ garantisce che le mappe $\sigma_i$ definiscano un'applicazione continua $f : S \longrightarrow X$. I simplessi con cui è stata costruita la superficie ne danno una triangolazione e formano una 2-catena $A_S$ che rappresenta la classe fondamentale di $S$, tale per cui $f_*(A_S) = A$. Una superficie $S$ ottenuta in questo modo da una 2-catena intera, si dice che *borda* $a$. Osserviamo che la costruzione seguita partendo da $A$ non garantisce che la superficie $S$ sia unica o che sia connessa.
Analogamente, se $a \in B_1(X, \mathbb{Q})$ diciamo che una superficie $S$ *borda virtualmente* $a$ se per qualche intero $n$ si ha che $na$ è un bordo a coefficienti interi e $S$ borda $na$.
Una 2-catena intera $A$ con $\partial A = a$ e $||A||_1 = |a|_{\mathbb{Z}}$ è detta *minimizzante* per $a$. Se $S$ è una superficie triangolata che borda $a \in B_1(X, \mathbb{Z})$, ottenuta con la costruzione sopra da una 2-catena minimizzante, sarà anch'essa detta *superficie minimizzante* per $a$.

**Definizione 5.6.** Sia $C \in C_n(X)$ una catena singolare con $C = \sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_i$, con $\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow X$ distinte tra loro. L'insieme $\{\sigma_i\}_{i=1,\ldots,k}$ si dice *supporto* di $C$.

**Proposizione 5.7.** *Sia $a \in B_1(X, \mathbb{Z})$. Abbiamo che*

$$||a||_B = \lim_{k \to \infty} \frac{|ka|_{\mathbb{Z}}}{k}.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che essendo la successione $k \longmapsto |ka|_Z$ subadditiva, il limite esiste per il Lemma 2.3.
Una disuguaglianza è immediata in quanto per ogni $k$

$$||a||_B = \frac{||ka||_B}{k} \leq \frac{|ka|_{\mathbb{Z}}}{k}.$$

Viceversa per ogni $\varepsilon > 0$ sia $A \in C_2(G)$ con $\partial A = a$ e $||A||_1 < ||a||_B + \varepsilon$. Sia $V$ il sottospazio di $C_2(G)$ di dimensione finita generato dal supporto di $A$, che osserviamo essere un sottospazio razionale. Poiché $\partial : V \longrightarrow C_1(G)$ è una mappa razionale, esistono punti razionali in $V \cap \partial^{-1}(a)$ arbitrariamente vicini, rispetto alla norma $|| \cdot ||_1$, ad $A$.
Quindi possiamo trovare un $A' \in V \cap \partial^{-1}(a)$ razionale con $||A'||_1 < ||a||_B + 2\varepsilon$. Moltiplicando ora per un denominatore comune $k > 0$ abbiamo che $kA'$ è una catena intera con $\partial(kA') = ka$ e tale per cui

$$\frac{|ka|_{\mathbb{Z}}}{k} \leq \frac{||kA'||_1}{k} \leq ||a||_B + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ segue che $||a||_B = \lim_{k \to \infty} \frac{|ka|_{\mathbb{Z}}}{k}$. □

Dimostriamo ora il legame tra $\mathrm{scl}(\cdot)$ e $\mathrm{fill}(\cdot)$.

**Proposizione 5.8** ([Bav91])**.** *Per ogni $a \in G$ tale per cui $a^k \in [G, G]$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ vale che*

$$\mathrm{scl}(a) = \frac{1}{4} \mathrm{fill}(a)$$

*Dimostrazione.* Siano $S$ una superficie compatta e orientata di genere $g = \mathrm{cl}(a^n)$ con una componente di bordo e $f : S \longrightarrow X_G$ una mappa per cui si abbia $f(\partial S) = a^n$. Possiamo allora trovare una triangolazione di $S$ in $4g - 1$ triangoli, in modo che vi sia un unico vertice su $\partial S$. La triangolazione ci fornisce una catena $A \in C_2(S)$ con $||A||_1 = 4g - 1$, tale per cui $\partial(f_*(A)) = a^n$. Segue che

$$||a^n||_B \leq 4\,\mathrm{cl}(a^n) - 1.$$

e dunque

$$\mathrm{fill}(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{||a^n||_B}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{4\,\mathrm{cl}(a^n) - 1}{n} = 4\,\mathrm{scl}(a).$$

Per mostrare l'altra disuguaglianza sia $A$ una 2-catena intera minimizzante per $ka$, e sia una $S$ superficie ottenuta da $A$ che bordi $ka$, quindi triangolata con $f = |ka|_{\mathbb{Z}}$ simplessi.

Indichiamo con $g$ e $p$ rispettivamente genere e numero di componenti di bordo di $S$. Sia poi $v$ il numero di vertici e $s$ il numero di spigoli della triangolazione. Supponiamo in primo luogo che $S$ sia connessa. Sia $m$ il numero di spigoli sulle componenti di bordo. Sapendo che $2-2g-p=\chi(S)=v-s+f$ e $3f=2s-m$ si ha $f=4g-4+2p+2v-m$. Ora $ka$ è un 1-bordo composto da $k$ 1-simplessi, derivanti tutti dai lati dei triangoli di $S$ sulle componenti di bordo, dunque la triangolazione deve avere almeno $k$ vertici su $\partial S$, quindi si ha $m\geq k$ e $v\geq k$, da cui segue la disuguaglianza

$$f\geq 4g-4+2p+k.$$

Denotiamo con $k_i$ il numero di spigoli sulla $i$-esima componente di bordo, allora abbiamo che $\sum_{i=1}^{p}k_i=k$.
Indicando il coniugio con ${}^{y}x=yxy^{-1}$ vediamo che, scelto opportunamente il punto base per il gruppo fondamentale, la superficie $S$ ci fornisce una scrittura di

$${}^{t_1}(a^{k_1})\dots{}^{t_{p-1}}(a^{k_{p-1}})\cdot(a^{k_p})$$

come prodotto di $g$ commutatori, per qualche $t_i\in G$. Sapendo che vale

$${}^{t_1}x_i\dots{}^{t_{p-1}}x_{p-1}=[t_1,x_1]^{x_1}[t_2,x_2]\dots{}^{x_1\dots x_{q-2}}[t_{p-1},x_{p-1}]\,x_1\dots x_{p-1}$$

e sostituendo $x_i=a^{k_i}$ per $i=1,\dots,p-1$ nell'identià sopra si ottiene $\mathrm{cl}(a^k)\leq g+p-1$. Dunque abbiamo

$$|ka|_{\mathbb{Z}}=f\geq 4\,\mathrm{cl}(a^k)-2p+k\geq 4\,\mathrm{cl}(a^k)-k,$$

in quanto per come è stata presa $S$ vi sono al più $k$ componenti connesse di $\partial S$.
Consideriamo ora il caso generale il cui $S$ ha più componenti connesse. Ciascuna componente connessa di $S$ borda $k_ia$ per qualche $k_i$. Indicando con $f_i$ e $p_i$ rispettivamente il numero di triangoli e di componenti di bordo dell'$i$-esima componente connessa, abbiamo come prima che

$$f_i\geq 4\,\mathrm{cl}(a^{k_i})-2p_i+k_i$$

e sommando al variare delle componenti connesse otteniamo analogamente

$$|ka|_{\mathbb{Z}}\geq 4\sum_i \mathrm{cl}(a^{k_i})-2p+k\geq 4\,\mathrm{cl}(a^k)-k.$$

Segue dunque che

$$||a||_B=\lim_{k\to\infty}\frac{|ka|_{\mathbb{Z}}}{k}\geq\lim_{k\to\infty}\frac{4\,\mathrm{cl}(a^k)-k}{k}=4\,\mathrm{scl}(a)-1$$

e omogeneizzando

$$\mathrm{fill}(a)=\lim_{k\to\infty}\frac{||a^k||_B}{k}\geq 4\,\mathrm{scl}(a).$$

□

**Teorema 5.9** (Teorema di dualità di Bavard)**.** Sia $G$ un gruppo. Allora per ogni $a \in G$ tale per cui $a^k \in [G,G]$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ vale

$$\mathrm{scl}(a) = \frac{1}{2} \sup_{\phi \in Q(G)/H^1(G)} \frac{|\phi(a)|}{D(\phi)}.$$

*Dimostrazione.* Per il Corollario 4.11 abbiamo che per ogni $n$ vale

$$||a^n||_B = \sup_{\phi \in \widehat{Q}/H^1} \frac{|\phi(a^n)|}{D(\phi)}.$$

Dividendo per $n$ e prendendo il limite per $n \to \infty$, per la Proposizione 5.8 segue che

$$\mathrm{scl}(a) = \frac{1}{4}\,\mathrm{fill}(a) = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \sup_{\phi \in \widehat{Q}/H^1} \frac{|\phi(a^n)|}{nD(\phi)}.$$

Per ogni $n > 0$ sia ora $\phi_n$ un quasimorfismo tale per cui $|\phi_n(a^n)/nD(\phi_n) - ||a^n||_B/n| < 1/n$. Ricordiamo ora che se $\overline{\phi}$ è l'omogeneizzazione di un quasimorfismo $\phi$ allora la differenza $\phi - \overline{\phi}$ è una funzione limitata da $D(\phi)$. Si ha perciò che $\overline{\phi_n}(a^n)/nD(\phi_n) = \overline{\phi_n}(a)/D(\phi_n)$ differisce da $||a^n||_B/n$ per meno di $2/n$. Segue quindi che

$$\mathrm{scl}(a) = \frac{1}{4} \sup_{\phi \in \widehat{Q}/H^1} \frac{|\overline{\phi}(a)|}{D(\phi)} \leq \frac{1}{2} \sup_{\phi \in Q/H^1} \frac{|\phi(a)|}{D(\phi)}$$

in quanto dalla Proposizione 4.13 si ha $D(\phi) \leq D(\overline{\phi})/2$. Viceversa se $a^n$ è prodotto di $k$ commutatori di ha che $|n\phi(a)| = |\phi(a^n)| \leq 2kD(\phi)$ per ogni $\phi$ quasimorfismo omogeneo, dunque vale $|\phi(a)|/2D(\phi) \leq \mathrm{cl}(a^n)/n$ da cui segue l'altra disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \sup_{\phi \in Q/H^1} \frac{|\phi(a)|}{D(\phi)} \leq \mathrm{scl}(a).$$

□

Dal Teorema di Bavard segue immediatamente che per il gruppo libero di rango due $F_2$ esistono elementi in $g \in [F_2, F_2]$ per cui $\mathrm{scl}(g) > 0$. Infatti dalla Proposizione 4.16 abbiamo che in particolare $EH^2_b(F_2) = Q(F_2)/H^1(F_2)$ è non banale. Notiamo vale altrettanto per un qualunque gruppo $G$ che ammetta un epimorfismo $\phi : G \longrightarrow F_2$, poiché si ha che anche $EH^2_b(G)$ è non banale, come mostrato nel Corollario 4.17.
Citiamo poi alcuni risultati sulla stable commutator length in gruppi liberi e prodotti liberi di gruppi, dimostrati rispettivamente in [Cal09c] e [Che18].

**Teorema 5.10** (Rationality Theorem)**.** Sia $F$ un gruppo libero. Allora per ogni $g \in [F,F]$ si ha $\mathrm{scl}(g) \in \mathbb{Q}$.

**Teorema 5.11.** Sia $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ un prodotto libero di gruppi, con almeno due gruppi contenenti un elemento di ordine infinito. Allora l'immagine di $[G,G]$ tramite scl contiene elementi per ogni classe di elementi di $\mathbb{Q}$ modulo $\mathbb{Z}$. Inoltre contiene un sottinsieme ben ordinato con tipo di ordine $\omega^\omega$.

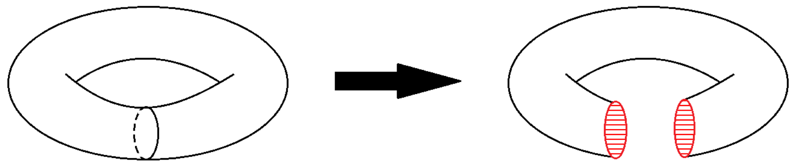


Figura 5.1: A sinistra tratteggiata la curva lungo cui avviene la compressione, a destra in rosso i due dischi attaccati.

In direzione opposta, abbiamo invece che per ogni gruppo $G$ amenabile $\mathrm{scl}(\cdot)$ è identicamente nulla su $[G,G]$ in quanto dalla Proposizione 3.14 segue che $H_b^2(G)=0$ e dunque $Q(F)/H^1(F)=0$.
Presentiamo ora un'altra famiglia di gruppi per la quale scl è sempre nulla.

**Definizione 5.12.** Si dice che un gruppo $G$ *soddisfa una legge* se esiste un gruppo libero $F$ e una parola non banale $\omega$ nei generatori di $F$ tale per cui per ogni omomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ vale $\varphi(\omega)=1$.

Poiché ogni gruppo libero $F$ si immerge nel gruppo libero su due generatori $F_2$, se un gruppo soddisfa la legge data da una parola $\omega \in F$ allora soddisfa anche una legge data una parola $\omega' \in F_2$.

**Teorema 5.13** ([Cal09a])**.** Sia $G$ un gruppo che soddisfa una legge. Allora per ogni $g \in [G,G]$ vale $\mathrm{scl}(g)=0$.

*Dimostrazione.* Sia $\omega \in F_2 = \langle x,y\rangle$ una parola per cui $\varphi(\omega)=0$ per ogni $\varphi : F_2 \longrightarrow G$. Siano $X$ uno spazio con $\pi_1(X)=G$ e $S$ la superficie di genere 1 con una componente di bordo. Identificando due generatori di $\pi_1(S)$ con $x$ e $y$, sia $\alpha$ un laccio corrispondente alla parola $\omega$. Supponiamo per assurdo che scl non sia identicamente nulla, allora per il Teorema di Bavard, esiste $\phi \in Q(G)$ con $D(\phi)>0$ e a meno di normalizzare $\phi$, possiamo supporre $D(\phi)=1$. Dal Lemma 4.7 abbiamo che per ogni $\varepsilon>0$ esistono $g,h\in G$ per cui $|\phi([g,h])|>1-\varepsilon$, per cui $\mathrm{scl}([g,h])>1/2-\varepsilon/2$. Se $\gamma$ è una curva in $X$ che rappresenta $[g,h]$, abbiamo un'applicazione $f : S \longrightarrow X$ tale per cui $\partial S$ è mappato in $\gamma$. Per Scott ([Sco78]) esiste un rivestimento $p : \widetilde{S} \longrightarrow S$ di grado $d$ tale per cui, a meno di omotopia, un sollevamento $\widetilde{\alpha}$ di $\alpha$ è un embedding. Osserviamo che la superficie $\widetilde{S}$ con la mappa $f\circ p$ è ammissibile per $\gamma$ e si ha, nella notazione della Definizione 2.9, $n(\widetilde{S})=d$ e $-\chi^-(\widetilde{S})=d$. Consideriamo la curva $f\circ p\circ\widetilde{\alpha}$ come un'applicazione dal bordo di un disco in $X$. Per ipotesi questa è omotopicamente banale, quindi si estende ad una mappa da tutto il disco in $X$. Possiamo ora comprimere $\widetilde{S}$ rimuovendo $\widetilde{\alpha}$ e attaccando due dischi (come nell'esempio in figura 5.1) ai quali quindi si estende la mappa $f\circ p$, in modo da ottenere una superficie $S'$ ammissibile per $\gamma$ con $-\chi^-(S')=d-2$ e $n(S')=d$. Dalla Proposizione 2.11 segue dunque che

$$\mathrm{scl}([g,h]) \le \frac{-\chi^-(S')}{2n(S')} = \frac{1}{2}-\frac{1}{d}.$$

Poiché il grado $d$ del rivestimento è fissato (dipende solo da $\alpha$) mentre $\varepsilon$ può essere preso arbitrariamente piccolo si ottiene la contraddizione cercata.
Di conseguenza $\mathrm{scl}(\cdot)$ è identicamente nulla su $[G, G]$. □

Si può facilmente verificare che i gruppi finiti, abeliani, nilpotenti e risolubili sono tutti gruppi che soddisfano una legge. Per questi esempi $\mathrm{scl}(\cdot)$ è nulla non solo in virtù del Teorema 5.13, ma anche in quanto gruppi amenabili.
Un esempio di gruppi non amenabili che soddisfano una legge è dato dai gruppi liberi di Burnside $B(m, n)$ di rango $m \geq 2$ ed esponente dispari $n \geq 655$ che come dimostrato da Adyan in [Ady83] non sono amenabili. Essendo però $B(m, n)$ un gruppo di torsione, si ha che per ogni quasimorfismo omogeneo $\phi$ vale $0 = \phi(1) = \phi(x^n) = n\phi(x)$ ovvero $Q(B(m, n)) = 0$ e quindi che $\mathrm{scl}(\cdot)$ è nulla sul derivato direttamente per il Teorema di Bavard.
Un gruppo non di torsione e non amenabile che soddisfa una legge è per esempio il gruppo costruito da Olshanskii e Sapir in [OS01].

# Bibliografia


[Fek23] M. Fekete. "Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten". ger. In: *Mathematische Zeitschrift* 17 (1923), pp. 228–249. URL: `http://eudml.org/doc/167739`.

[Neu29] J. Neumann. "Zur allgemeinen Theorie des Masses". ger. In: *Fundamenta Mathematicae* 13.1 (1929), pp. 73–116. URL: `http://eudml.org/doc/211921`.

[Rud74] W. Rudin. *Functional Analysis.* International series in pure and applied mathematics. Tata McGraw-Hill, 1974. ISBN: 9780070995581. URL: `https://books.google.it/books?id=h7RdNAAACAAJ`.

[Sco78] Peter Scott. "Subgroups of Surface Groups are Almost Geometric". In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-17.3 (1978), pp. 555–565. DOI: `10.1112/jlms/s2-17.3.555`. eprint: `https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s2-17.3.555`. URL: `https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s2-17.3.555`.

[BE80] J.S. Birman e J. Eisner. *Seifert and Threlfall, A Textbook of Topology.* ISSN. Elsevier Science, 1980. ISBN: 9780080874050. URL: `https://books.google.it/books?id=rsb8zjPOXHoC`.

[Gro82] Mikhael Gromov. "Volume and bounded cohomology". en. In: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 56 (1982), pp. 5–99. URL: `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1982__56__5_0`.

[Ady83] S. I. Adyan. "Random walks on free periodic groups." English. In: *Math. USSR, Izv.* 21 (1983), pp. 425–434. ISSN: 0025-5726.

[MM85] Shigenori Matsumoto e Shigeyuki Morita. "Bounded Cohomology of Certain Groups of Homeomorphisms". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 94.3 (1985), pp. 539–544. ISSN: 00029939, 10886826. URL: `http://www.jstor.org/stable/2045250`.

[Iva87] Nikolai V. Ivanov. "Foundations of the theory of bounded cohomology". In: *Journal of Soviet Mathematics* 37 (1987), pp. 1090–1115.

[Iva90] Nikolai V. Ivanov. "Second bounded cohomology group". In: *Journal of Soviet Mathematics* 52 (1990), pp. 2822–2824.

[Bav91] C. Bavard. "Longueur stable des commutateurs". fr. In: *L'Enseignement Mathématique* 37 (1991), pp. 109–150. URL: `http://dx.doi.org/10.5169/seals-58734`.

[OS01] A. I. Ol'shanskii e Mark V. Sapir. "Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups". In: 2001.

[Cal09a] Danny Calegari. "Quasimorphisms and laws". In: 2009.

[Cal09b] Danny Calegari. *scl.* English. Vol. 20. Tokyo: Mathematical Society of Japan, 2009, pp. xii + 209. ISBN: 978-4-931469-53-2/pbk.

[Cal09c] Danny Calegari. "Stable commutator length is rational in free groups". In: 2009.

[Rol09] Pascal Rolli. *Quasi-morphisms on Free Groups.* 2009. arXiv: `0911.4234 [math.GR]`.

[Hub13] Thomas Huber. "Rotation quasimorphisms for surfaces". en. Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 20766, 2013. Tesi di dott. Zürich: ETH Zurich, 2013. DOI: `10.3929/ethz-a-009796661`.

[Fri17] Roberto Frigerio. "Bounded Cohomology of Discrete Groups". In: *Mathematical Surveys and Monographs* (nov. 2017). ISSN: 2331-7159. DOI: `10.1090/surv/227`. URL: `http://dx.doi.org/10.1090/surv/227`.

[Che18] Lvzhou Chen. "Scl in free products". In: *Algebraic & Geometric Topology* 18 (2018), pp. 3279–3313.