Laboratorio di Analisi Numerica
Lezione 1

Leonardo Robol <leonardo.robol@unipi.it>
Igor Simunec <igor.simunec@sns.it>

01 Ottobre 2021

Quantità di esercizi: in questa dispensa ci sono *più esercizi* di quanti uno studente medio riesca a farne durante una lezione di laboratorio, specialmente tenendo conto anche degli esercizi facoltativi. Questo è perché è pensata per "tenere impegnati" per tutta la lezione anche quegli studenti che già hanno un solido background di programmazione.
Quindi fate gli esercizi che riuscite, partendo da quelli *non* segnati come facoltativi, e non preoccupatevi se non li finite tutti!

Installare MATLAB

Per chi svolge la lezione in presenza, MATLAB è disponibile sui computer dell'Aula M. Per avviarlo, occorre prima di tutto fare il login sul captive portal, e poi lanciare il comando `matlab`.

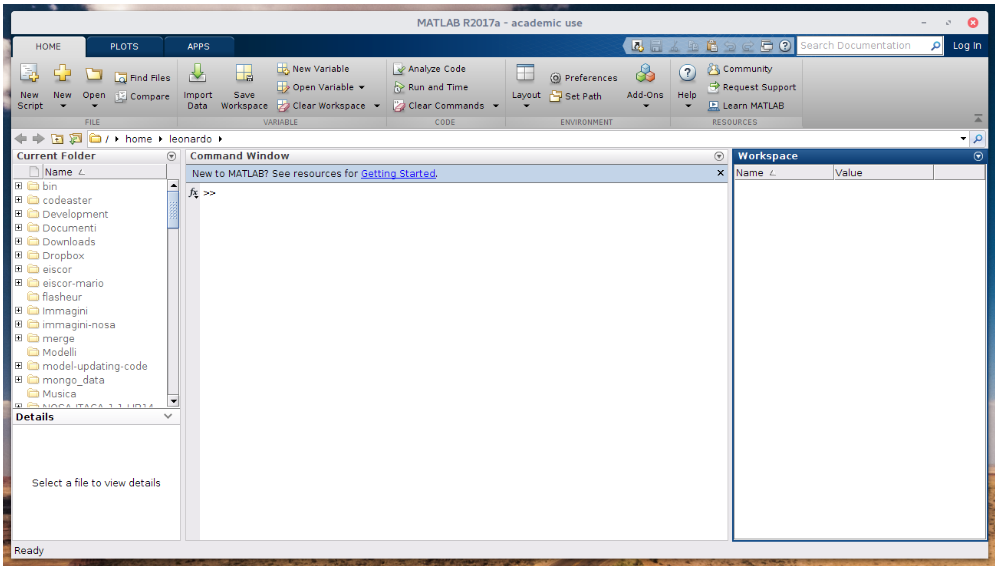
Per chi frequenta online, il primo step per svolgere gli esercizi è avviare MATLAB sul proprio dispositivo, in uno dei seguenti modi:

- Scaricando MATLAB dal sito `https://mathworks.com/`; è possibile registrarsi con le credenziali di Ateneo ed avere accesso ad una copia gratuita di MATLAB per uso personale.
- Utilizzando la versione online di MATLAB, disponibile alla pagina `https://matlab.mathworks.com`. Anche in questo caso, è necessario effettuare il login con le credenziali di Ateneo.
- Installando il software gratuito GNU/Octave dalla pagina `https://www.gnu.org/software/octave/index`, un'alternativa open source a MATLAB. Sebbene non tutte le funzionalità disponibili in MATLAB siano presenti in GNU/Octave, per gli esercizi del laboratorio è possibile utilizzare uno qualunque dei due.

Nel caso si decida di utilizzare MATLAB online, è possibile scaricare i programmi realizzati da `drive.matlab.com`.

1 Primo programma

Lanciamo MATLAB in una qualunque delle modalità descritte precedentemente. Ci si troverà di fronte ad un'interfaccia simile a questa:



Possiamo scrivere sulla linea di comando, identificata dal cursore `>>`. Quest'interfaccia è simile al prompt interattivo del terminale.

```
>> 'Hello, world'
ans = Hello, world
```

MATLAB vs Octave: MATLAB è un software proprietario e anche piuttosto costoso! Come studenti potete ottenere una copia "gratuita" tramite la licenza Campus, con cui vi potete esercitare a casa. Conviene però ricordare che esiste un'alternativa non solo gratuita, ma anche Open Source, che si chiama GNU Octave.
Purtroppo non è (ancora) all'altezza di MATLAB in tutti gli ambiti, ma dal nostro punto di vista non ci sono differenze. Per cui se volete utilizzare Octave al posto di MATLAB potete farlo liberamente, sia a casa che in laboratorio.
Le differenze fra i due sono anche nella sintassi e, sebbene minime, potete controllarle qui: `https://en.wikibooks.org/wiki/MATLAB_Programming/Differences_between_Octave_and_MATLAB`.

2 Primi calcoli in virgola mobile

MATLAB utilizza la doppia precisione (8 byte per ogni numero).

```
>> realmin
ans = 2.2251e-308
```

```
>> realmax
ans = 1.7977e+308
>> eps
ans = 2.2204e-16
```

MATLAB come una calcolatrice:

```
>> 1+1
ans = 2
>> 10^10
ans = 1.0000e+10
>> 1e10
ans = 1.0000e+10
>> (1e10)^2
ans = 1.0000e+20
```

Se c'è un punto e virgola alla fine della linea, MATLAB esegue il calcolo ma non scrive il risultato

```
>> 1+1;
>>
```

Perdita di precisione da alcuni calcoli:

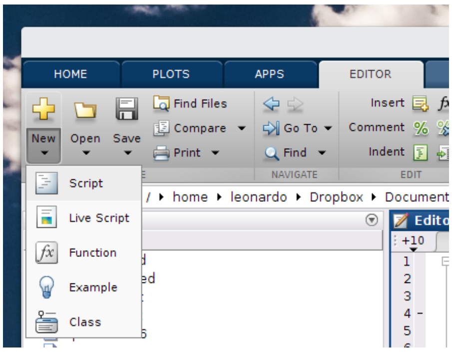
```
>> a=1e10
a = 1.0000e+10
>> b=1e4
b = 10000
>> c=(a+b)^2
c = 1.0000e+20
>> format long % scrive piu' cifre
>> c
c = 1.00000200000100e+20
>> c - a^2 - 2*a*b - b^2
ans = 7936
```

Principalmente da sottrazioni tra due numeri grossi e molto vicini, (*errori di cancellazione*), ma anche da moltiplicazioni:

```
>> a=98
a = 98
>> 1 - a*(1/a)
ans = 1.1102e-16
>> a=97
a = 97
>> 1 - a*(1/a)
ans = 0
```

Quando succede? Controlliamo con un breve programma. Creiamo uno *script*, cioè un file di testo con estensione `.m` contenente una sequenza di comandi.

MATLAB dispone di un editor di testo integrato che possiamo usare per questo scopo, cliccando su **New** → **Script** (come mostrato nella figura sotto). Possiamo premere poi il pulsante **Save** e chiamare il file `perditaprec.m`.



Inseriamo ora il seguente testo all'interno del file:

```
for k = 1 : 300
  a = k * (1 / k);
  if (a ~= 1)
    k %senza punto e virgola: scrive il valore di k
  end
end
```

Se il file si chiama `perditaprec.m` *e si trova nella cartella da cui avete lanciato MATLAB*[1], possiamo eseguirlo semplicemente digitando `perditaprec` dal prompt.

```
>> perditaprec
k = 49
k = 98
k = 103
k = 107
k = 161
k = 187
k = 196
k = 197
k = 206
k = 214
k = 237
k = 239
k = 249
k = 253
```

[1] Altrimenti, potete controllare e cambiare la "cartella di lavoro" di MATLAB con il menu `file/change directory` o i soliti comandi `cd`, `pwd`, `ls`, che funzionano anche all'interno di MATLAB.

Possiamo controllare che per i valori stampati a schermo il valore calcolato di `a*(1/a)` è diverso da 1.

3 Funzioni e accumulatori

```
function f=fact(n);
% calcola il fattoriale di n
% n dev'essere un intero
f = 1;
% f fa da accumulatore: parte da 1,
% a ogni passo, lo moltiplico per k
for k = 1 : n
  f = f * k;
end
% ora f vale n!
end
```

Va scritto in un file chiamato `fact.m` e messo *nella cartella da cui abbiamo lanciato MATLAB*; se volete potete usare il pulsante **New** → **Function** che precompila l'intestazione per voi. Poi possiamo lanciarlo:

```
>> fact(10)
ans = 3628800
```

Esercizio 1. Scrivete una funzione `pow(x,n)` che calcoli x^n

4 Calcolo dell'esponenziale

```
function a=myexp(x,n)
% calcola exp(x) con la serie di Taylor troncata all'n-esimo termine
  a=1; %accumulatore
  for k=1:n
    a=a+pow(x,k)/fact(k);
  end
end
```

Qualche esperimento su quanti termini servono per approssimare bene — confrontiamo con la funzione `exp(x)` di MATLAB, che calcola l'esponenziale meglio di noi.

```
>> myexp(1,5)
ans = 2.7167
>> myexp(10,50)
ans = 2.2026e+04
>> exp(10)
```

```
ans = 2.2026e+04
>> format long
>> myexp(10,50)
ans = 22026.4657948067
>> exp(10)
ans = 22026.4657948067
```

Due problemi:

- Inaccurato: prova `myexp(-20,500)`
- Lento: con n termini, il numero di operazioni da eseguire cresce come n^2 (perché?)

Risolviamo (2) introducendo un altro accumulatore:

```
function a=myexp2(x,n)
  %calcola e^x con Taylor troncato
  %ma usa solo O(n) operazioni
  t = 1; %accumulatore che contiene il termine generico della sommatoria
  a = 1; %accumulatore che contiene le somme parziali
  for k = 1 : n
    t = t * x / k;
    a = a + t;
  end
end
```

Ora va meglio:

```
>> myexp(-20,500)
ans = NaN
>> myexp2(-20,500)
ans = 5.62188447213042e-09
```

Cosa succedeva?

```
>> fact(500)
ans = Inf
>> pow(-20,500)
ans = Inf
>> Inf/Inf
ans = NaN
```

Ci sono ancora pesanti accuratezze sui numeri negativi:

```
>> myexp2(-30,500)
ans = -3.06681235635622e-05
```

Un esponenziale dovrebbe sempre essere positivo... Ci sono pesanti errori di cancellazione nella formula che abbiamo usato (perché?).

$$\text{Errore relativo: } \frac{|\text{myexp2}(x) - e^x|}{e^x}$$

La soluzione: cambiare algoritmo e sceglierne uno che non porti a errori di cancellazione

```
>> exp(-30)
ans = 9.3576e-14
>> myexp2(-30,500)
ans = -3.0668e-05
>> 1/myexp2(30,500)
ans = 9.3576e-14
>> format long
>> exp(-30)
ans = 9.35762296884017e-14
>> 1/myexp2(30,500)
ans = 9.35762296884017e-14
```

Esercizio 2. Scrivere una funzione `myexp(x)` che controlla se x è negativo o positivo, e a seconda del segno calcola l'esponenziale come $1/e^{-x}$ oppure e^x con la serie di Taylor troncata a $n = 500$.

Esercizio 3. Scrivere una funzione `solve2(a,b,c)` che risolva l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ nel modo più stabile possibile (hint: ci sono al massimo due sottrazioni. Una è necessaria (perché?); l'altra no). Provare su $x^2-(10^{10}+10^{-10})x+1 = 0$.

Esercizio 4 (facoltativo). Come si può calcolare $\frac{1-\cos x}{x^2}$ in modo accurato per valori di x piccoli? Testate il risultato su $x = 10^{-10}$.

Esercizio 5 (facoltativo). Si consideri la funzione $f(x) = \log(1 + x)/x$ nell'intervallo $[10^{-15}, 10^{-14}]$.

(i) Si confrontino i valori ottenuti su punti dell'intervallo calcolando $f(x)$ o

$$g(x) = \frac{\log(1 + x)}{(1 + x) - 1}.$$

(ii) Si faccia l'analisi teorica dell'errore allo scopo di capire il motivo di questo comportamento.