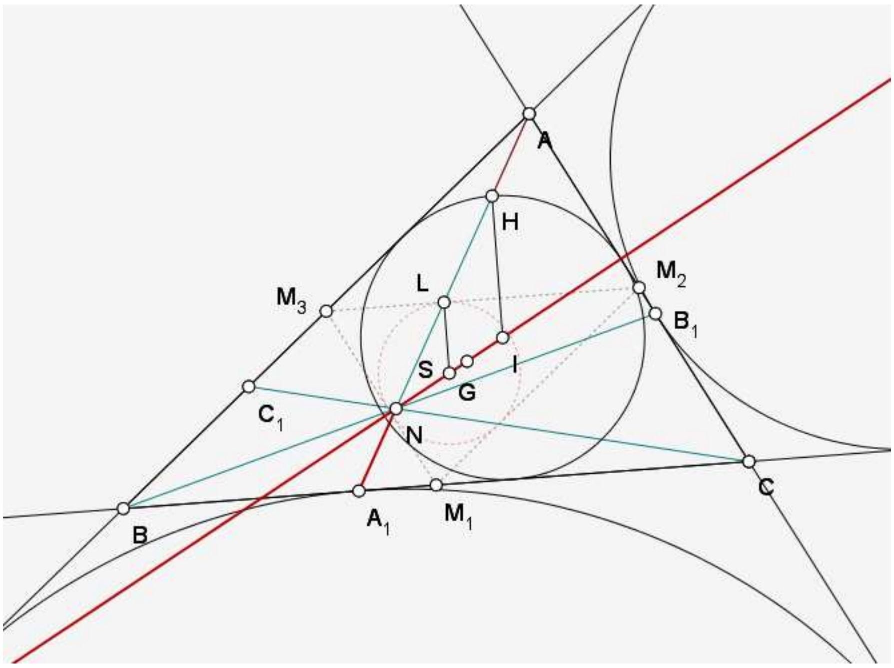
Fatti sparsi di geometria senza dimostrazione

Punti

1. L'ortocentro del triangolo di Gergonne sta sulla retta di Eulero.

2. Il circocentro del triangolo excentrico è il simmetrico dell'incentro nel circocentro.

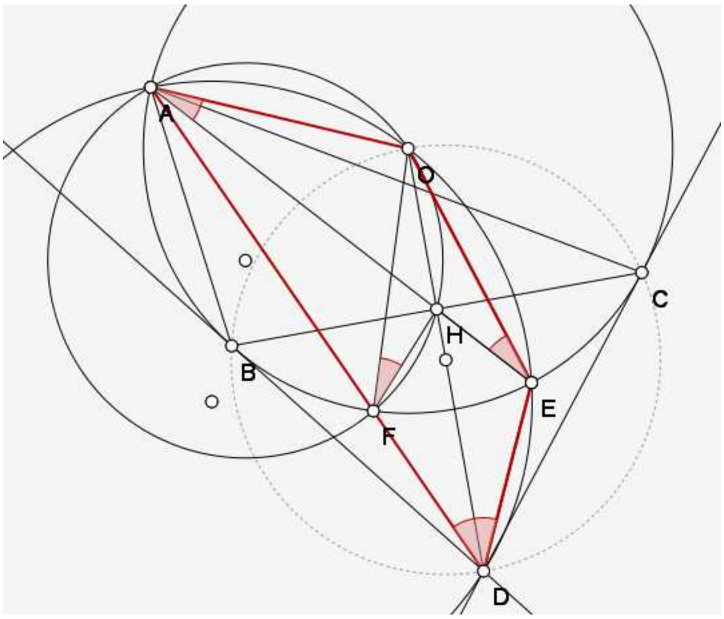
3. In un triangolo il punto di Nagel, il Baricentro e l'Incentro sono allineati. Su tale retta c' è anche l'incentro del triangolo mediale che è il punto medio dell'incentro-punto di Nagel. se la ceviana di Nagel AA_1 interseca la circonferenza inscritta in H si ha $AH = NA_1$.



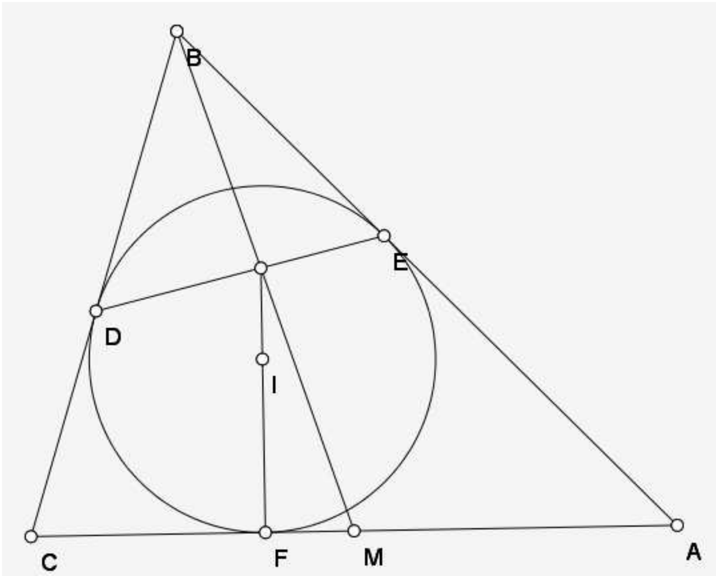
Circonferenze

1. Dato un triangolo ABC e la sua circonferenza circoscritta, le tangenti condotte da B e C si intersecano in D. La mediana condotta da A interseca in E la circonferenza. L'inverso di D è H e AD interseca la circonferenza in F.

- $EODA$ è ciclico.
- $FOHA$ è ciclico.

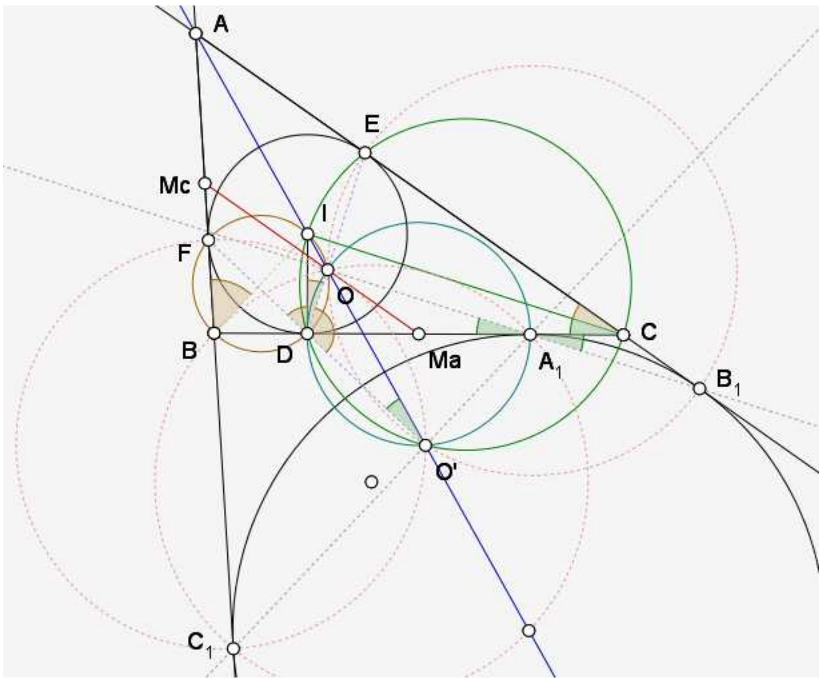


2. In un triangolo, sia data la circonferenza inscritta di centro I che interseca i lati AB, BC e CA in D, E e F. Allora la mediana AM, DE e il raggio FI concorrono in un punto.



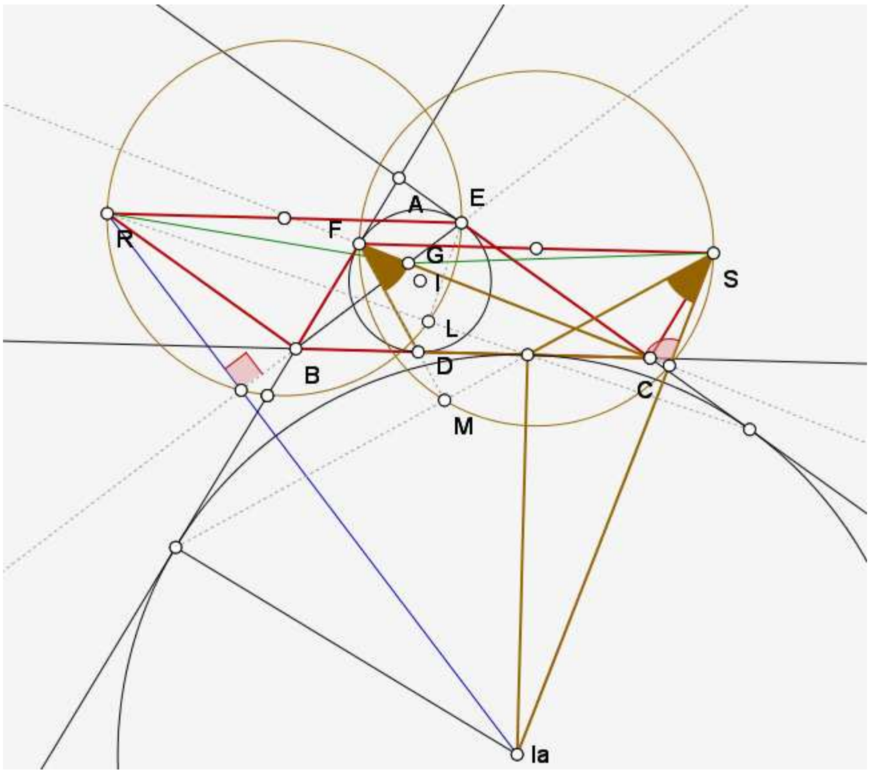
3. Sia dato un triangolo ABC, la circonferenza inscritta di centro I che interseca i lati in D, E e F, la circonferenza exinscritta opposta al vertice A che interseca in A_1, B_1 e C_1 i lati. Sia $O \in A_1B_1$ tale che $EO \perp A_1B_1$

- EOD allineati
- O appartiene alla bisettrice condotta da A
- $O' = FD \cap C_1A_1$ è tale che $FO' \perp A_1C_1$
- Per analogia al secondo punto O' appartiene alla bisettrice condotta da A
- $O'DOA_1$ è ciclico.
- $CEIDO'$ è ciclico $\Rightarrow \angle ODO' = \frac{\pi}{2} - \angle OA_1O' = \angle FBI$. $FIODB$ è ciclico
- BOA_1C ciclico
- Invertendo nella circonferenza inscritta, O e O' sono inversi.
- $FOO'C_1$ e $OO'B_1E$ ciclici.
- $M_aO \parallel EC$ e dunque M_aM_c passa per O.

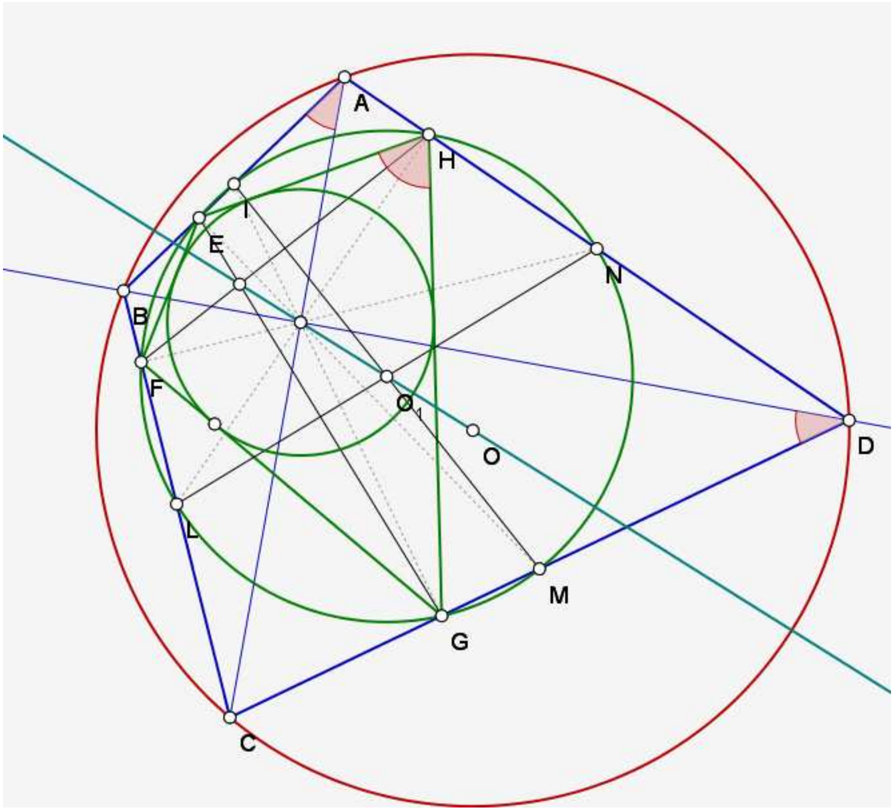


4. In un triangolo ABC con circonferenza inscritta di centro I che tocca i lati in D, E e F e circonferenza exinscritta di centro I_a che tocca i lati in A_1, B_1 e C_1. Siano S e R i punti tali che $BREC$ e $BFSC$ sono parallelogrammi.

- $FC_1 = FS$ e $B_1E = RE$.
- C_1A_1S e B_1A_1R sono allineati
- FDC è simile a $SA_1I_a \Rightarrow SI_a \perp FC$ e analogamente $RI_a \perp BE$
- $GR = GS$ perché G è centro radicale di R,S e della circonferenza exinscritta

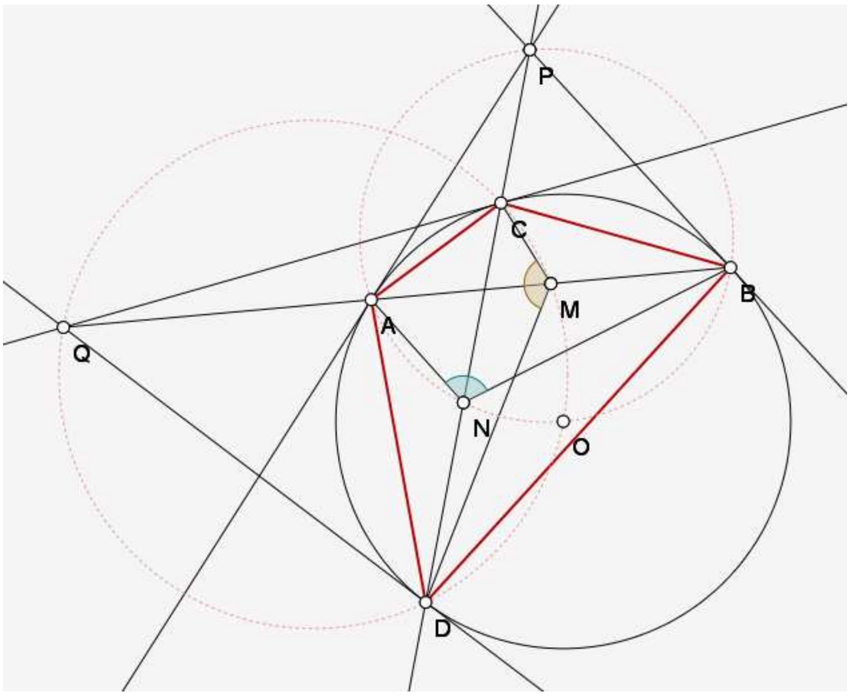


5. Un quadrilatero ciclico con le diagonali perpendicolari è tale che se dal punto d'intersezione si tracciano le perpendicolari ai lati, questi punti stanno su una stessa circonferenza che passa anche per i punti medi dei lati.

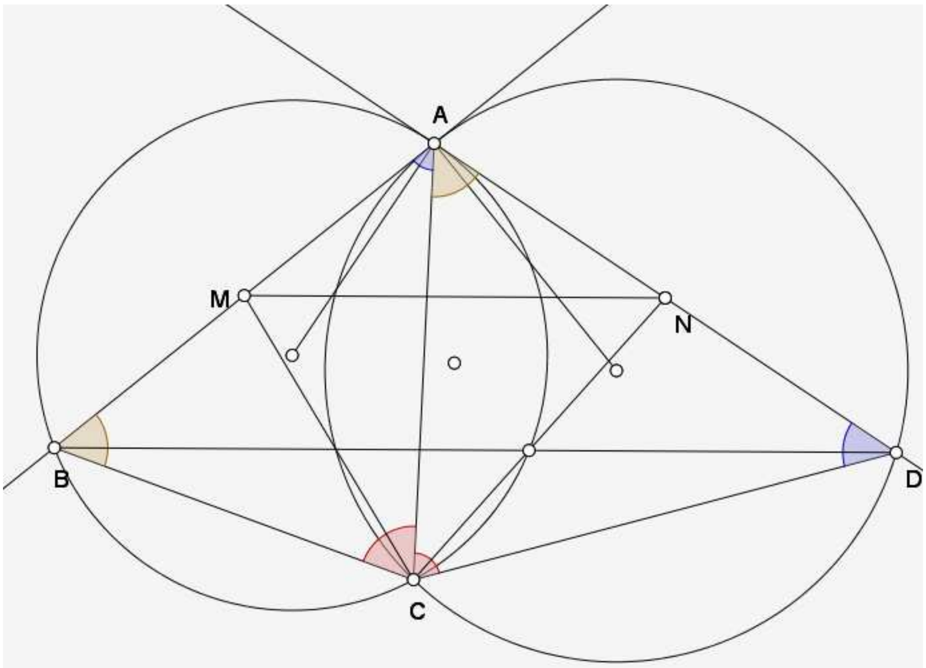


6. In un quadrilatero armonico $ABCD$

- Le tangenti per A e per B e CD concorrono, così come le tangenti per C e D e AB.
- $CMODQ$ e $ANOBP$ ciclici, con M e N punti medi di AB e CD. (**1.**).
- MA biseca $\angle CMD$ e NC biseca $\angle ANB$.

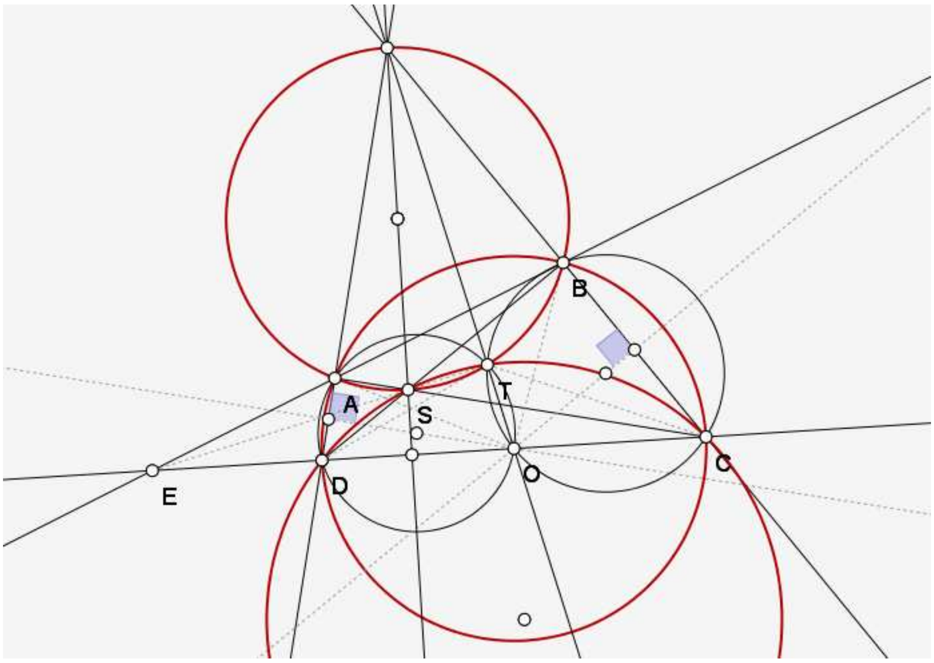


7. In un quadrilatero con $\angle BAC = \angle ADC$ e $\angle CAD = \angle ABC$, A, C e i punti medi M e N di AB e AD sono conciclici. Inoltre CN, BD e la circonferenza per ABC concorrono, così come CM, BD e la circonferenza per ACD



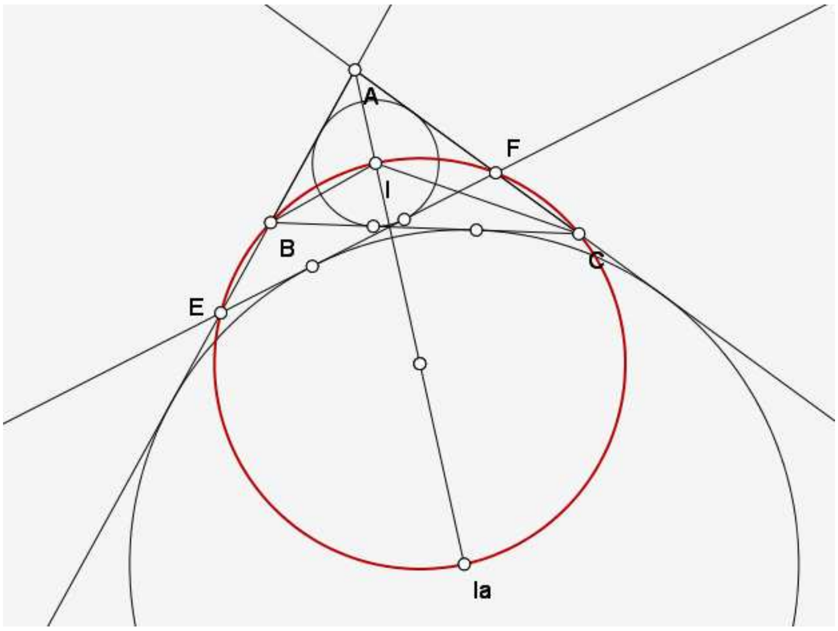
8. In una semicirconferenza con la costruzione di fianco $ET \perp TO$. Altri fatti notevoli sono che

- $ASTB(\gamma)$, $DSTC$ è ciclico (angle chashing $\angle DSC = \angle DTC = \angle ATB$)
- OA e OB tangono γ
- O,T F sono allineati (per inversione si scambiano)
- S,T E allineati perché E è centro radicale delle tre circonferenze rosse (fra l'altro da quest'ultima deriva la tesi con le polari)



9. La retta simmetrica di BC rispetto ad AI tange per ovvi motivi entrambe le circonferenze inscritta e exinscritta. Fra le cose da ricordare

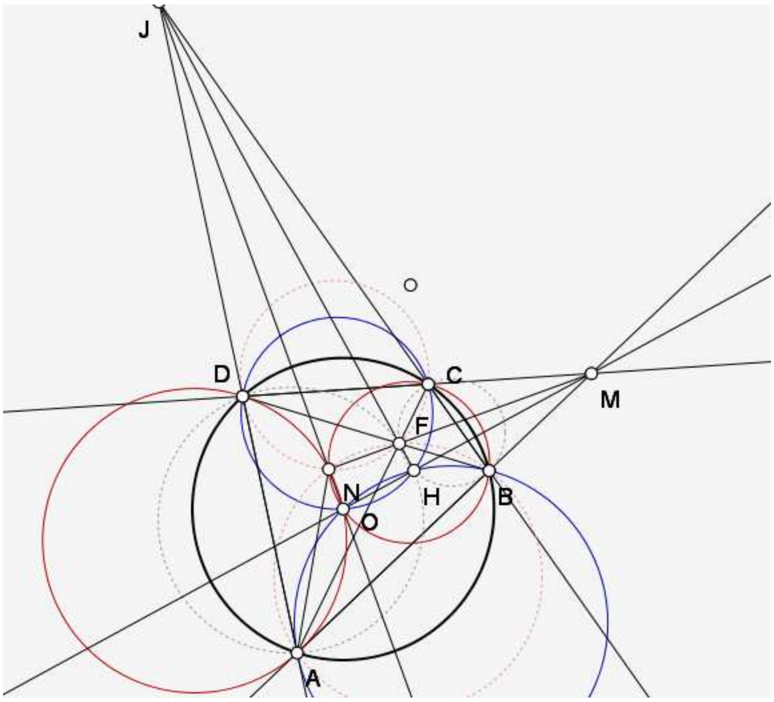
- $EBICF$ ciclico (puro angle-chashing)



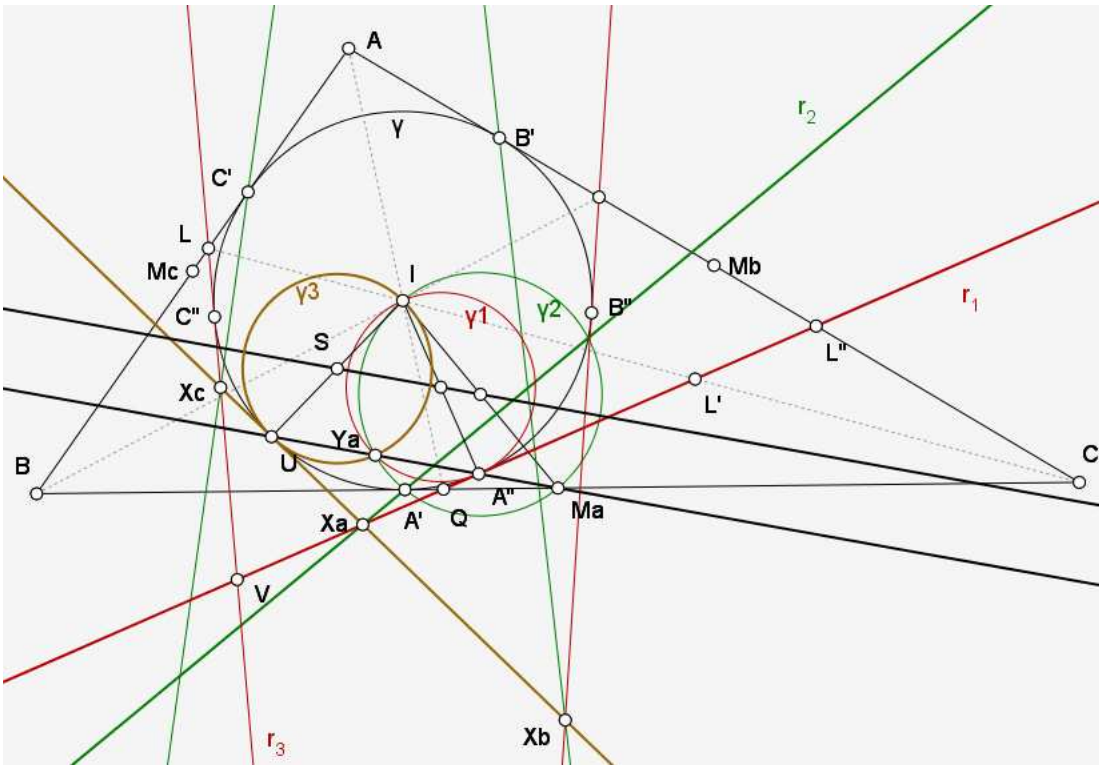
10. Importante il lemma che pu essere estrapolato da questo problema. In un quadrilatero ciclico prendo le circonferenze circoscritte ai triangoli formati da due coppie di vertici e l'intersezione delle diagonali. Queste si intersecano in un punto coniclico con il centro e una delle due coppie trascurata. [Angle Chashing al contrario] Da ricordare

- Applicando questo le circonferenze blu e tratteggiate concorrono. Chiaramente Invertendo nella circonferenza concorrono nell'inverso di M. Applicando questo giochetto ancora si ottiene che le rosse e le tratteggiate rosse concorrono nell'inverso di J.

- Ora con semplice angle chashing $MCNA$ ciclico, $MBND$ ciclico e analogamente $JCAH$ e $JDBH$.

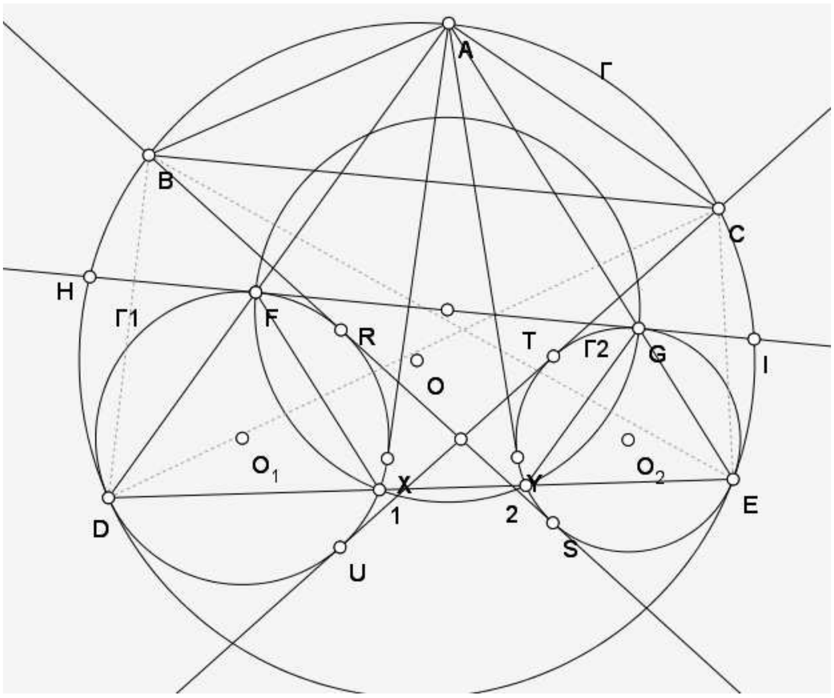


11. Le simmetriche rispetto alla bisettrice dei lati incontrano la circonferenza inscritta in tre punti tali che $A''B''C'$ omotetico ad ABC (conti di angoli). Il centro omotetico fra $A''B''C''$ e $M_aM_bM_c$ il punto di Feuerbach.

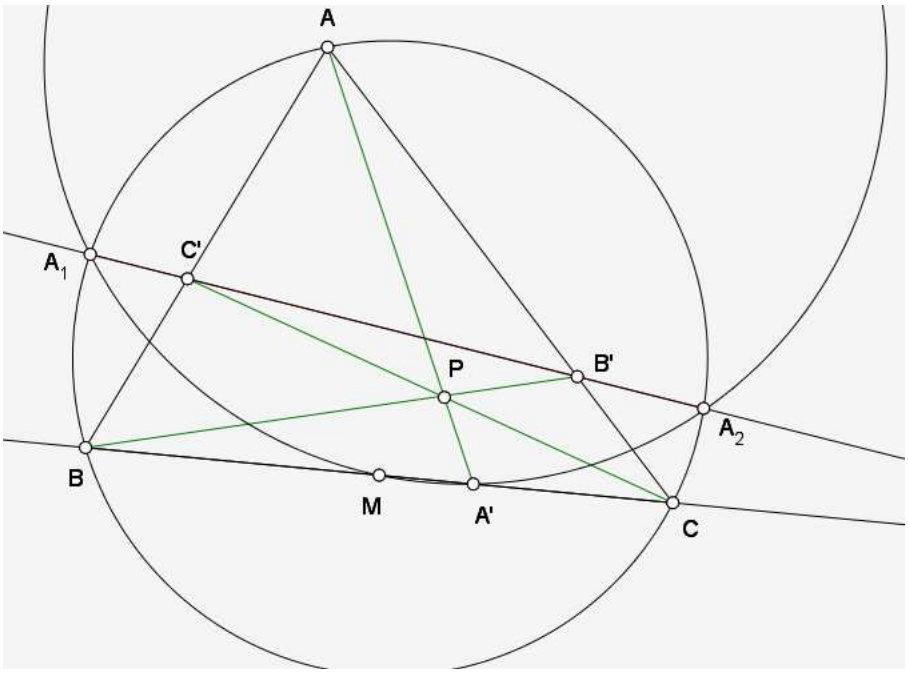


12. In figura

- $DC \cap EF \cap MN = G$ punto medio di AB (Omotetie)
- $CDEF$ ciclico (conti di angoli con la tangente)
- $\frac{BD}{BR} = \frac{AD}{AX} = \frac{DC}{CU}$.
- $BC \parallel HI$
- $F12G$ conciclici. Deriva da $\angle DF1 = \angle 2GE$.



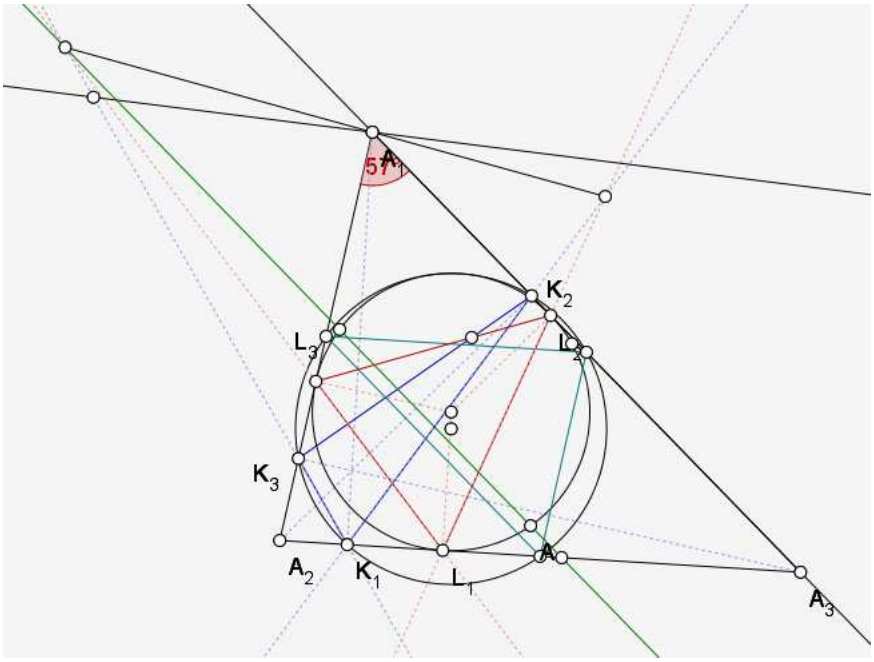
13. Se prendo il triangolo ceviano di P e faccio $B'C' \cap \gamma = \{A1, A2\}$ allora la circonferenza per $A1A2A'$ incontra BC in M (conti bruti con le potenze)



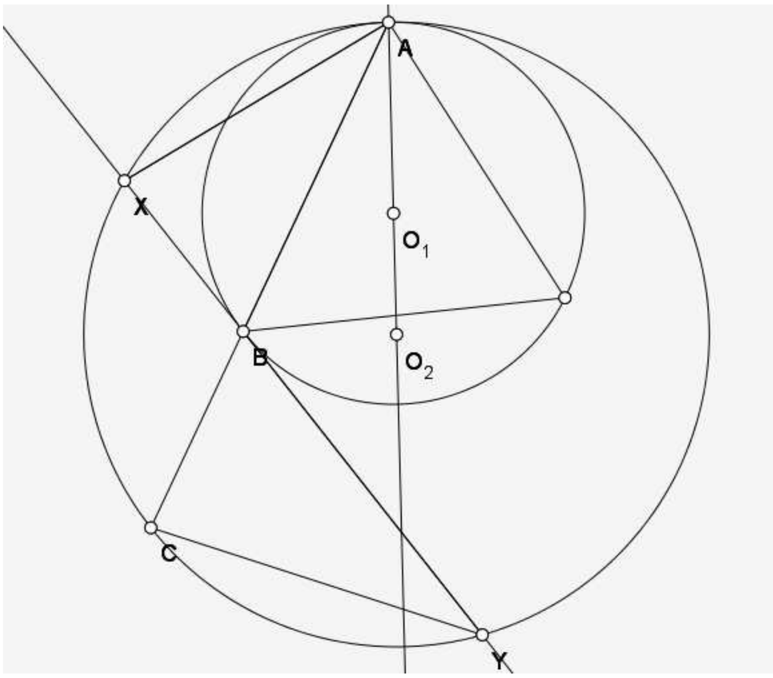
14. $K_3K_1 \cap L_3L_1$, A, $K_1K_2 \cap L_1L_2$ sono allineati. La dimostrazione passa per i seguenti fatti

- L'intersezione fra MA_3, MA_1 e L_2L_1 sta sulla bisettrice (vedi **3.**)
- La tesi sostituendo i K con M vale per Pascal dopo aver dimostrato che i sei punti stanno su un'ellisse per il punto 1
- La tesi con gli M e i K vale per Pascal sulla circonferenza di Feuerbach
- La tesi vale con i K e gli L per desargues sulle varie intersezioni di cui nel punto tre e quattro.

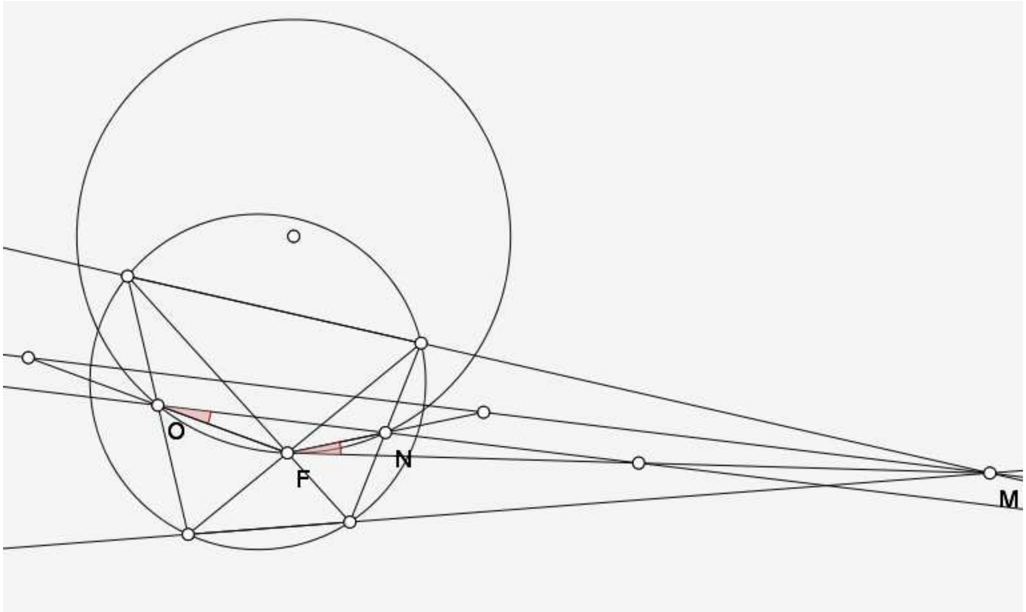
Per il punto d'intersezione di K_3K_1 con L_3L_1 passa Z_1Z_3 la congiungente dei simmetrici di L_1 e L_3 rispetto A_1I e A_3I. La congiungente Z_1Z_3 la simmetrica di K_3K_1 rispetto L_3L_1.



15. Il cerchio circoscritto a CBY in figura è costante.

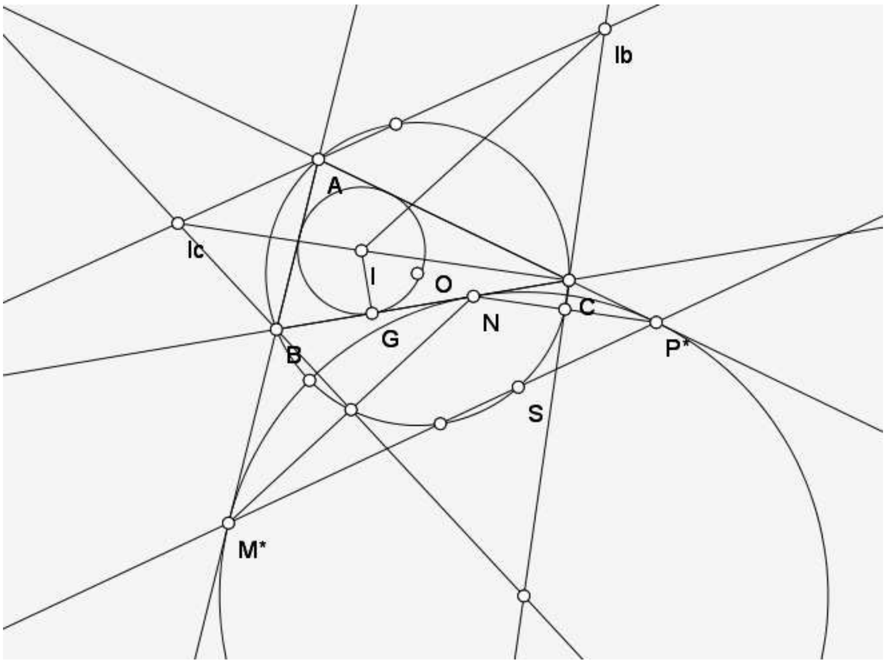


16. La circonferenza per NOF tatta da MF in F. Per la dimostrazione bisogna usare il risultato di Gauss sui punti medi di un quadrilatero completo e fare una simmetra rispetto alla bisettrice e un'omotetia di centro M.

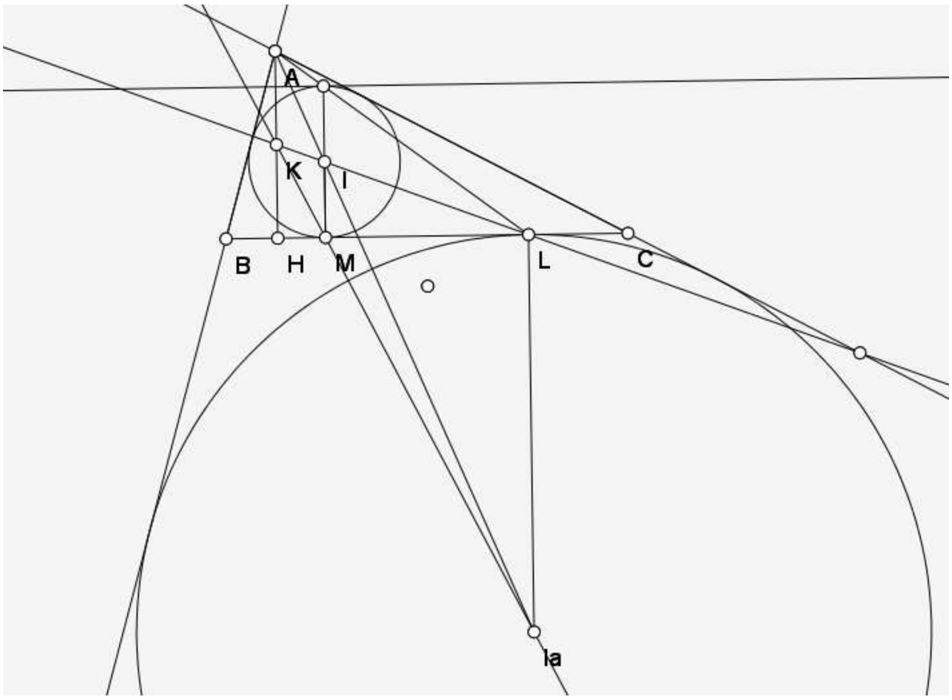


17. Se la circonferenza circoscritta γ passa per il punto medio di MP allora passa anche per il piede della perpendicolare da N a MP. (semplice inversione rispetto alla circonferenza ex-inscritta che lascia γ invariata in entrambi i casi, e dunque γ è la cfr di Feuerbach di MNP). Fra le altre cose

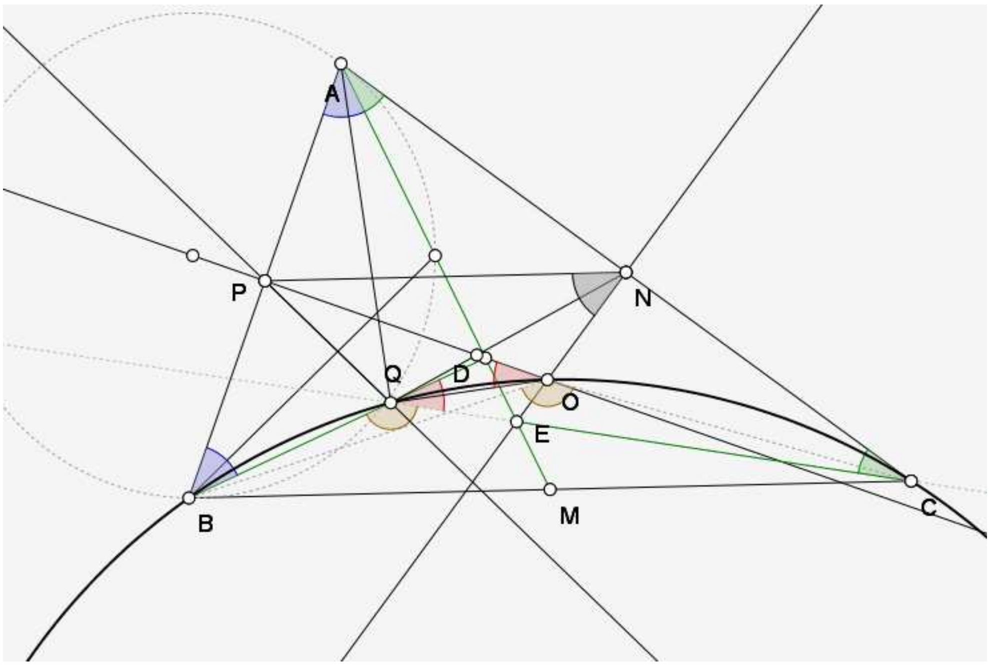
- II_bI_c congruente a MNP
- I,O e N allineati



18. In un triangolo la ceviana di Nagel incontra la circonferenza inscritta nel punto diametralmente opposto al corrispettivo punto di tangenza col lato. LI e I_aM concorrono nel punto medio di AH (omotetia che manda l'inscritta nella circoscritta)

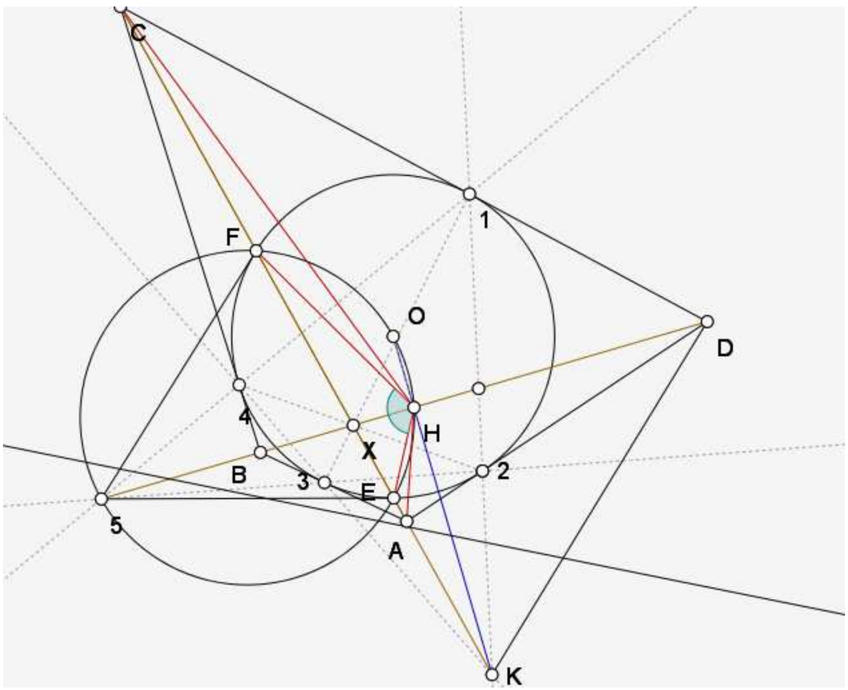


19. Se Q è l'intersezione della circonferenza circoscritta ad APN e della circonferenza circoscritta a BOC, dove O è circocentro e P e Nsono putni medi dei lati, AQ è simmediana. Per la dimostrazione detta Q di BD e CE (che formano triangoli isosceli AEC e ADB, è facile mostrare che $BQOC$ è ciclico. Inoltre Q è il simmetrico, rispetto alla bisettrice, del punto $P \in AM$ tale che $MA^2 = MP\cdot$ e con angoli , $APNQ$ è ciclico.



20. Nella figura sotto

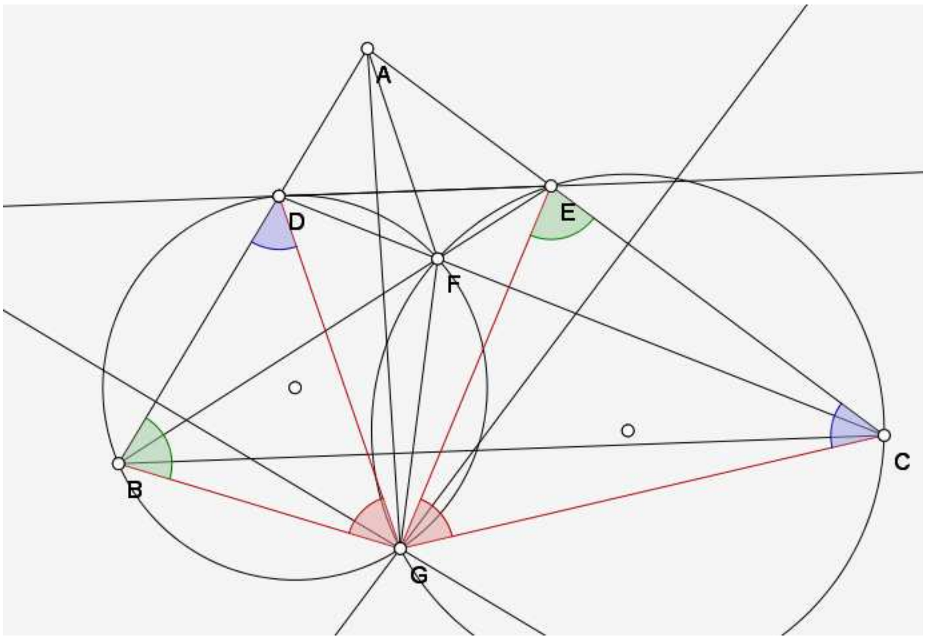
- AC, BD, 24 e 13 concorrono. (polari)
- $23 \cap 14 = 5$ allineato con B e D. $34 \cap 12 = K$ allineato con A e C. (polari)
- $KO \perp BD$ in H per la polarità
- $OF5EH$ conciclici (vedi i quadrilateri armonici)
- $\angle FH5 = \angle 5HE$
- $\angle CHX = \angle XHA$ per il birapporto che fa -1



21. In un triangolo ABC, per qualsiasi punto sulla circonferenza circoscritta sia ha che l'ortocentro di ABC e i simmetrici del punto rispetto ai lati sono allineati.

22. Dato un triangolo ABC e una corda $DE \parallel BC$, sia $F = DC \cap BE$ e G l'intersezione delle circonferenze circoscritte a BDF e FEC. Allora AG è simmediana.

- BDG è simile a GEC
- $\frac{GH}{GK} = \frac{AC}{AB}$



Altro

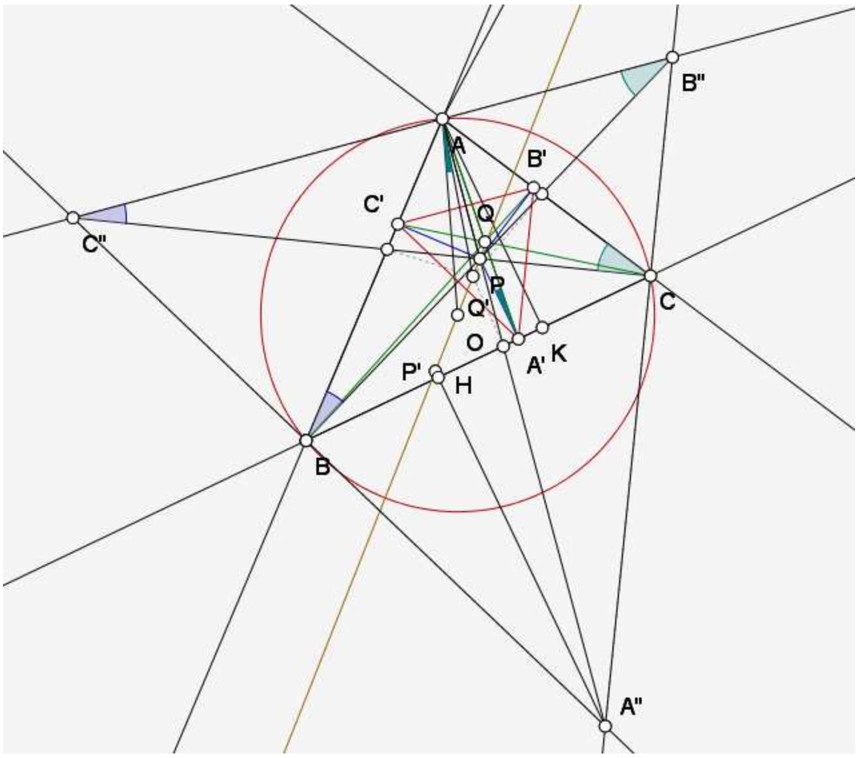
1. In un triangolo ABC la bisettrice uscente da B interseca la congiungente dei punti di tangenza E e F della circonferenza inscritta, in un punto G tale che $\angle BGC$ è retto.

2. In un quadrilatero completo la retta dei punti medi è perpendicolare alla retta degli ortocentri dei triangoli

3. Per la serie triangoli ortologici.

- Due triangoli ortologici in un verso lo sono anche nell'altro (Ceva Trigonometrico)
- Due triangoli coniugati rispetto a una circonferenza sono perspettici (geometria proiettiva)
- In due triangoli con centri ortologici coincidenti due vertici di un triangolo e le prorieizioni dei corrispondenti vertici dell'altro sui lati giusti sono concicliche
- Due triangoli con centri ortologici coincidenti sono perspettici e la perspettrice è la polare del centro di perpspezione (Basta dimostrare che sono coniugati rispetto a una certa circonferenza)
- Due triangoli ortologici e perspettici sono tali che i centri ortologici e il centro di perspezione sono allineati su una retta perpendicolare all'asse perspettico

4. Se un punto P sta sulla cubica di Darboux d ABC, P, il centro di perspezione Q fra il suo triangolo pedale e ABC, il coniugato isogonale in ABC Q', O e P' coniugato isogonale di P nel triangolo antipedale di ABC sono allineati sull'asse radicale delle circonferenze APA', BPB' e CPC'



5. Se P e Q sono coniugati isogonali, allora le simmetriche delle rette AP e BQ rispetto alle bisettrici di $\angle BPC$ e $\angle BQC$ concorrono in un punto su BC (trigonometria sul rapporto dei segmenti in cui una bisettrice divide il lato).