Geometria Sintetica

Gioacchino Antonelli

August 5, 2016

1 Traccia della lezione:1.5h

1. *Luoghi geometrici.* Cosa vuol dire *luogo geometrico*? Esempio: la circonferenza come luogo geometrico dei punti equidistanti da uno dato. A volte descrivere gli enti geometrici come luoghi di punti che soddisfano una certa proprietà può servire in alcune dimostrazioni, o comunque può aiutare a caratterizzare meglio l'ente.

   Dati due punti A e B, chi è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B? Risposta: *l'asse di un segmento.* La dimostrazione è semplice ma consta di due passi: se un punto appartiene all'asse allora soddisfa la proprietà e viceversa. Qual è il "luogo" geometrico dei punti equidistanti da tre punti dati, A, B e C non allineati? In realtà è un solo punto, ed è l'intersezione degli assi: tale punto è detto circocentro del triangolo, poiché è il centro dell'unica (in effetti abbiamo dimostrato anche questo) circonferenza che passa per A, B e C.

   Dato un triangolo ABC, qual è il luogo geometrico dei punti equidistanti da due lati? Risposta: la bisettrice. In questa maniera si riesce a dimostrare sia che le bisettrici si incontrano (nell'incentro) e che tale punto è l'unico equidistante dai tre lati. E le bisettrici esterne? Anche loro sono equidistanti da un lato e dal prolungamento dell'altro. Per questo motivo due bisettrici esterne e una interna si incontrano in un punto che viene detto ex-centro. Alcune proprietà di bisettrice interna-esterna:

   - Calcolare gli angoli formati dalle bisettrici;
   - Le bisettrici interna ed esterna Formano un angolo di 90 gradi;
   - Teorema della bisettrice;
   - Incentro excentro e due vertici relativi giacciono sulla stessa circonferenza (*c'è bisogno del fatto che se in un quadrilatero la somma degli angoli opposti è 180, allora il quadrilatero è inscrivibile: accennarlo senza soffermarcisi troppo. In tal caso vale anche di più: siccome gli angoli opposti sono di 90 gradi, so anche dire dov'è il centro*).

2. *Torniamo ai luoghi e qualche altro punto notevole.* Cambiamo un po' le carte in tavola: dati due punti A e B qual è il luogo dei punti C tali che $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$? Sicuro non è una retta perché sulla retta di AB ci sono già due punti C e C'. Usando il teorema della bisettrice si vede che dato un altro punto D appartenente al luogo, DC e DC' sono bisettrici interna ed esterna del triangolo ADB, dunque $\angle CDC' = 90$. Allora se

D appartiene al luogo, sta sulla circonferenza di diametro CC'. (*C'è bisogno di sapere che l'angolo alla circonferenza che vede un diametro è 90 gradi: accennarlo senza dimostrazione se non lo sanno. In generale l'angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro: accennarlo senza dimostrazione*). Viceversa qualsiasi punto su tale circonferenza soddisfa la proprietà (*Questa affermazione andrebbe giustificata bene ma la tralascio. Si fa in un attimo con un po' di trigonometria*). Il luogo è dunque una circonferenza, detta *Circonferenza di Apollonio*.

Talete, punti medi e parallelismi: la congiungente di due punti medi è parallela al terzo lato ed è uguale alla metà del terzo lato. Lo giustifico con le similitudini dando per buono che più o meno tutti le conoscano, altrimenti ci spendo 2 minuti. In questa maniera dimostro che le tre mediane si intersecano in un punto, dimostrando che l'intersezione di due qualsiasi mediane le divide entrambe in due segmenti che stanno fra loro come 1 : 2.

3. *Triangolo mediale.* Proseguendo la mezz'ora precedente, notiamo che il triangolo mediale è simile a quello di partenza. Se traccio l'altezza nel triangolo mediale chi ottengo rispetto al triangolo originale? Ottengo l'asse. Dunque, dal momento che gli assi concorrono nel circocentro, allora le altezze del triangolo mediale concorrono anch'esse nel circocentro. Come posso usare questa osservazione per dedurre che le altezze concorrono in qualsiasi triangolo ABC? Semplice, dato un triangolo ABC, mi basta costruire un triangolo $A'B'C'$ di cui ABC è triangolo mediale. Per farlo mi basta tracciare le parallele da un vertice al lato opposto.

   Con l'ultima osservazione, ovvero col fatto che l'ortocentro del triangolo mediale è il circocentro del triangolo di partenza, dimostrare che ortocentro, baricentro e circocentro sono allineati su una retta, detta retta di Eulero. La dimostrazione sarà fatta senza tirare in ballo la parola *omotetia* ma solo usando le similitudini: Dato ABC un triangolo, siano D, E, F i punti medi dei lati BC, CA, AB. Sia H l'ortocentro e O il circocentro. Ovviamente ABH è simile a DEO (perché le rette che li formano sono a due a due parallele) e dal momento che AB è metà di ED il rapporto di similitudine è $1 : 2$. Dunque $AH = 2 \cdot OD$. Dal momento che ho prima notato che $AG = 2 \cdot DG$ e considerato che AH è parallelo a OD, allora i triangoli AHG e DOG sono simili per il secondo criterio (con rapporto $1 : 2$), da cui $\angle HGA = \angle OGD$. Quest'ultima uguaglianza dice immediatamente che H, G, O sono allineati e, dato che il rapporto dell'ultima similitudine è proprio $1 : 2$, in più ho che $HG = 2 \cdot GO$.

2 Esercizi assegnati

1. Svolgere i seguenti esercizi di riscaldamento guidati:

   - In un triangolo ABC siano M e N i punti medi d BC e AC e G il baricentro. Sia M' il simmetrico di G rispetto a M e N' il simmetrico di G rispetto a N. *Ricordando che* $AG = 2 \cdot GM$ *e* $BG = 2 \cdot GN$, mostra che $ABM'N'$ è un parallelogrammo e dunque che $M'N' \parallel AB$ e $M'N' = AB$;
   - Siano H e O rispettivamente l'ortocentro e il circocentro di un triangolo ABC. Sia H_A la proiezione su BC di A. Calcola, in termini degli angoli di ABC, l'angolo $\angle BAH$ (*lavora nel triangolo rettangolo* BAH_A). Calcola, in termini degli angoli di ABC, l'angolo $\angle CAO$ (*lavora nel triangolo isoscele* CAO *e nota che l'angolo* $\angle AOC$ *è l'angolo al centro di* $\angle ABC$ *e dunque ne è il doppio*). Nota, infine, che $\angle BAH = \angle CAO$;
   - Sia H l'ortocentro di un triangolo ABC e siano H_A, H_B, H_C le tre proiezioni di H sui lati BC, CA, AB rispettivamente. Lavorando nel triangolo rettangolo BCH_B calcolare $\angle H_BBC$ in funzione degli angoli di ABC. Analogamente, lavorando in BCH_C calcolare $\angle H_CCB$. Infine, lavorando nel triangolo HBC, calcolare l'ampiezza di $\angle BHC$ (*per differenza dal momento che gli altri due angoli di questo triangolo li abbiamo calcolati precedentemente*) e concludere che $\angle BHC + \angle BAC = 180$.

2. Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza data. Se A e B sono fissati, qual è il luogo descritto dall'incentro I di ABC al variare di C sulla circonferenza? *Ricordare che angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco (o archi congruenti) sono congruenti.*

3. ($\star$) Si consideri un punto P nel piano equidistante da due rette parallele a e b assegnate. Si tracci una retta r per P che interseca a e b in A e B. Si descriva, al variare di r, il luogo geometrico dei punti C per i quali ABC è equilatero.

4. Sia ABC un triangolo e H il suo ortocentro. Siano H_A, H_B, H_C i piedi delle altezze di A, B, C su BC, CA, AB. Mostrare che

   - BCH_BH_C è un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza;
   - AH_CHH_B è un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza;
   - BH_AHH_C è un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza. Ricordando che angoli che giacciono sullo stesso arco in una circonferenza sono congruenti, dedurre che $\angle H_CBH = \angle H_CH_AH$;
   - Usando le osservazioni precedenti
     mostrare che $\angle H_CH_AH = \angle H_BH_AH$ e dunque che H_AH è bisettrice di $H_CH_AH_B$. Dedurre che H è l'incentro di $H_AH_BH_C$.

5. Sia ABC un triangolo. La bisettrice interna tracciata da A interseca le due bisettrici esterne tracciate da B e da C nell'excentro I_A. Analogamente sono costruiti I_B e I_C. Sia detto I l'incentro.

- Mostrare che I è l'ortocentro di $I_A I_B I_C$;
- ($\star$) Sia M il punto medio di II_A. Dopo aver notato che M è il centro della circonferenza circoscritta a IBI_AC, di cui si è parlato a lezione, osserva che $MB = MI = MC$. Dimostra, calcolando gli angoli, che M giace sulla circonferenza circoscritta ad ABC. *Per mostrare ciò basta dimostrare che due angoli che vedono la stessa corda sono congruenti.* Chi è M nell'arco BC della circonferenza circoscritta?

6. Sia $ABCD$ un quadrato. Sia r la retta per C che biseca l'angolo $\angle DCA$ e sia t la perpendicolare ad r che interseca AC in P e BC in Q. Essendo E l'intersezione delle diagonali, mostrare che $DQ = 2 \cdot PE$.

7. Sia ABC un triangolo, H_A e H_B i piei delle altezze condotte da A, B ai lati BC e AC. Siano F, M_C, M_A i punti medi di AH, AB, BC. Mostrare che $\angle FM_CM_A = 90$.

   Dedurre che i punti F, M_C, H_A, M_A sono su una stessa circonferenza. Notare che, su questa circonferenza, per una questione di simmetria, giace anche M_B il punto medio di AC. Concludere che su tale circonferenza giacciono anche H_B e H_C, i piedi delle altezze di B e C a AC e AB, oltre che gli altri due punti medi di BH e CH. Tale circonferenza è detta *circonferenza di Feuerbach* o *circonferenza dei nove punti* del triangolo ABC.

8. ($\star,\star$) In un parallelogrammo $ABCD$, M è il punto medio di BC, e la perpendicolare da D ad AM interseca AM in T. Mostrare che $CT = CD$.

9. ($\star$) Mostra che i centri dei quadrati costruiti sui lati di un parallelogrammo formano un quadrato.