



Vincenzo Marzella  
Giacchino Antonelli



con il minimo... andiamo al massimo

A Rosanna

*“Noi tutti siamo vittime, Rosanna. I nostri destini sono decisi da un  
cosmico rotolare di dadi, dai venti delle stelle, dalle errabonde brezze del  
caso che soffiano dai mulini a vento degli dei.”*

H. L. Dietrich, Un destino irrevocabile

# Indice

<b>1</b>	<b>Leviamo gli ormeggi!</b>	<b>8</b>
1.1	Disuguaglianze . . . . .	10
1.2	Alcuni richiami di Geometria . . . . .	15
1.3	Problemi . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Issiamo le vele!</b>	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>Avanti tutta!</b>	<b>68</b>
<b>4</b>	<b>A gonfie vele!</b>	<b>82</b>
4.1	Problemi tratti dagli esami di Stato . . . . .	85
4.2	Problemi tratti dalle Olimpiadi della Matematica . . . . .	104

# Prefazione

C'è un momento nella vita scolastica di alcuni allievi che trasforma l'esperienza di apprendimento in evento disastroso, foriero di insuccessi inarrestabili, tale da segnare in modo funesto le ore o le giornate di incontro-scontro con una disciplina: la matematica. L'errore di calcolo, un segno utilizzato male, le lettere e le formule astruse, diventano l'incubo di un percorso formativo costellato da ansie, valutazioni demotivanti, persuasione di incapacità, dichiarazioni di resa.

Non è facile esorcizzare queste paure e far percepire l'approccio ludico ad una disciplina che è antica quanto la storia del mondo e, probabilmente, all'origine della nascita dell'universo, come sosteneva il Galilei. Eppure il volumetto che avete fra le mani ha accettato questa scommessa ed insieme ai precedenti del **prof. Vincenzo Marzella** vuole mostrare come il gioco è lì, a portata di mano di tutti, per scoprire che i numeri ed il calcolo appartengono alla nostra realtà quotidiana in quanto... "misura delle cose, di quelle che sono in quanto sono e di quelle che non sono in quanto non sono".

È questo il terzo volume nato all'interno dell'esperienza delle aule, che si avvale della passione didattica di un docente innamorato dell'insegnamento e della fantasia e freschezza intuitiva di un alunno che contempla il mondo con occhi incantati e sguardo penetrante: **Gioacchino Antonelli**, campione alle Olimpiadi di Matematica. Le pagine che seguono sono un invito (come i precedenti volumetti "Il barattolo di matematica" e "Intuizioni... matematiche") a prestare ascolto a ciò che si propone nell'aula scolastica durante un'ora di lezione in cui il docente e gli alunni osservano la realtà con stupore e meraviglia, per raccontarla attraverso il linguaggio semplice ed inequivocabile dei segni conosciuti da ogni lingua e

cultura, facendo emergere il significato problematico di ogni osservazione attenta.

È con vera gioia ed orgoglio che il **Liceo "Tedone"** propone ai lettori (del liceo e non) la bella esperienza della scrittura a due mani di un itinerario della scoperta che parte dall'esperienza di meraviglia di fronte allo spettacolo dell'universo per seguire un percorso di indagine che è una autentica riscoperta del creato. L'invito alla lettura è rivolto a tutti quelli che credono nella grande potenzialità che la scuola ha di formare le personalità anche attraverso la semplicità ed il rigore degli studi condotti in sintonia di mente e di intenti tra funzione docente e giovane discente.

Un grazie sincero alla grande sensibilità ed umanità di Vincenzo Marzella ed alla acuta serenità di Giacchino Antonelli, nostro stimatissimo alunno.

Biagio Pellegrini

# Ringraziamenti

Saremmo irrisconoscanti se non ringraziassimo innanzitutto e soprattutto **il Dirigente Scolastico del Liceo Scientifico "O. Tedone" di Ruvo, il prof. Biagio Pellegrini**, che ha accolto il nostro progetto con un entusiasmo giovanile che ci ha commosso, un trasporto quasi tangibile, da cui ci siamo sentiti immediatamente sostenuti. È grazie alla sua sensibilità, alla sua totale disponibilità che questo manuale ha visto la luce.

Un grazie di cuore alla **prof.ssa Elena Turitto**, corresponsabile provinciale delle Olimpiadi della Matematica, che ci ha sempre incoraggiato a pubblicare le soluzioni di questi problemi, convinta della loro valenza didattica e formativa.

Meritano il nostro ringraziamento anche le **prof.sse Maria Grazia De Chirico** e **Elisabetta Raimondi** di cui abbiamo sentito sempre la presenza ed apprezzato il loro sincero interessamento: a loro dobbiamo molto!

Un ringraziamento particolare va ai **Responsabili d'istituto delle Olimpiadi della Matematica** che, richiedendo manuali utili per motivare i loro studenti più interessati e determinati, indirettamente ci hanno stimolato a realizzare questo libretto.

La nostra riconoscenza, infine, va alla **prof.ssa Rosanna Marzella**, che ha affrontato il nostro lavoro con l'intenzione di ricavarne il meglio e ci riteniamo fortunati di aver potuto usufruire del suo intuito e della sua competenza.

Gli Autori

# Presentazione

La leggenda di Didone, di cui anche Virgilio parla ne "L' Eneide", narra che la regina, esule da Tiro, era approdata sulle coste libiche e, dal re locale, aveva ottenuto il permesso non solo di soggiorno, ma addirittura di proprietà di tanto terreno quanto ne poteva contenere una pelle bovina. Didone, allora, ridusse la pelle in un filo che dispose in modo tale che contenesse la massima estensione di terra possibile. Didone, dunque, si trovò ad affrontare un problema di massimo.

Anche noi ci troviamo spesso di fronte a problemi di questo genere. Per esempio, gli atleti del lancio del peso, del giavellotto, del martello o del disco si preoccupano di trovare la giusta inclinazione del loro attrezzo sportivo per avere la massima gittata; un industriale, invece, è interessato ad organizzare la fabbrica in modo da rendere minimi i costi e massimi gli utili; tutti poi siamo impegnati a cercare percorsi minimi per risparmiare energie, anche quelle fisiche, e per guadagnare del tempo. Nella vita di tutti i giorni ci troviamo continuamente di fronte a questioni di questo tipo, di massimo e di minimo, di *ottimo* e di *pessimo*, problemi che, in genere, sono affrontati al termine del ciclo degli studi secondari e risolti con l'uso delle derivate.

In questo manuale, invece, abbiamo voluto affrontare i problemi di massimo e di minimo in un modo diverso da quello classico, per via elementare, senza ricorrere, cioè, al calcolo differenziale che, spesso, ingabbia il pensiero in un procedimento schematico da ripercorrere in modo tecnico e acritico. *La necessità aguzza l'ingegno*: risolvere, infatti, questi problemi non potendosi avvalere del potente ed efficace "metodo delle flussioni" (calcolo differenziale ed integrale), indubbiamente stimola la fantasia e la creatività. Del resto è quello che spesso è richiesto ai nostri alunni impe-



gnati nelle prove durante le varie fasi delle Olimpiadi della Matematica. In genere noi insegnanti di matematica mettiamo subito in moto i nostri strumenti di calcolo per risolvere determinati problemi, e dobbiamo ammettere che non riusciamo molte volte a pensare a procedimenti alternativi. I nostri alunni, invece, che non conoscono certi algoritmi, spesso ci stupiscono per le loro soluzioni audaci ed intraprendenti, mettendo così in evidenza una mente ancora libera di pensare e non imprigionata in schemi ripetitivi e noiosi. È l'idea che, non ancora asfissata da rigori formali e non congelata da freddi calcoli, è palpitante e guizzante! È con questa capacità d'ampio respiro e di largo spettro visivo che **Gioacchino Antonelli, un ragazzo appena quindicenne e alunno del secondo Liceo Scientifico "O. Tedone" di Ruvo di Puglia, a Cesenatico, nella fase nazionale delle Olimpiadi della Matematica, conquista la medaglia d'oro** (l'anno scorso già quella di bronzo), ed è chiamato a collaborare come coautore alla stesura di questo libretto, apportando, con le sue idee fresche e con una scelta oculata ed intelligente di problemi, il suo contributo importante ed efficace. Con il suo acume e la sua giovane età sicuramente la sua ascesa lo porterà a raggiungere le più alte vette del successo e delle soddisfazioni personali. È lui che vorremmo proporre come modello da seguire a tutti gli alunni della nostra provincia. È lui il fuoriclasse, il talento naturale da imitare. È la sua maglia di campione che i giovani devono desiderare di indossare. È il suo atteggiamento che vorremmo recuperare e proporre come esempio: quello che antepone il pensare al ripetere, le idee agli schemi, il nuovo allo stereotipo.

Il libretto non ha, in ogni modo, la pretesa d'essere esaustivo, ma vuole semplicemente suscitare stupore e meraviglia per la ricchezza di metodi di risoluzione di un problema, per la loro eleganza e bellezza, e stimolare così la curiosità intellettuale, il gusto del bello, l'avventura dell'intuito. Per questo in alcuni problemi le dimostrazioni sono volutamente lasciate incomplete. Crediamo, infatti, di coinvolgere in questo modo il giovane lettore che, invitato a portare a termine la dimostrazione sulla scia della nostra, possa sentirsi così partecipe e protagonista.

L'obiettivo è anche quello di poter aiutare alunni a percorrere strade inedite di risoluzione di problemi che, sicuramente, rafforzeranno la loro preparazione e, soprattutto, allargheranno i loro orizzonti e le loro vedute.

Vincenzo Marzella

# Capitolo 1

## Leviamo gli ormeggi!

*"La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l'immaginazione."*

A. De Morgan

Leviamo gli ormeggi e prepariamoci a salpare per quest'avventura straordinaria.

Non possiamo avvalerci dei potenti e moderni mezzi di calcolo. Il nostro non è un transatlantico, ma una semplice imbarcazione a vela. Dobbiamo, quindi, sfruttare al massimo l'onda dell'entusiasmo, la corrente della passione, il vento gagliardo dello spirito d'osservazione e far leva sulla forza di volontà. Non vediamo l'ora di partire. La paura dell'ignoto e dell'immensa distesa d'acque matematiche che dobbiamo affrontare è superata dalla curiosità intellettuale, dalla sete di conoscere, dalla voglia di imparare.

Salite a bordo, voi giovani del sabato sera. C'è posto per tutti. Non sentite la musica dolce ed ammaliante dello sciabordio delle onde di questo mare di numeri contro il nostro veliero? Abbandonate le vostre rumorose discoteche che vi stordiscono e lasciatevi cullare da questa musica invitante.

Venite con noi, voi giovani che cercate paradisi effimeri con droghe che vi devastano, invece, la mente e il corpo. Vi faremo approdare su lidi incontaminati della vostra intelligenza che, mediante il piacere della scoperta, riesce a liberare la gioia vera, quella autentica che è nel profondo, in voi.

Unitevi a noi, voi giovani che vi ubriacate d'alcool e di colori psichedelici. Vi faremo conoscere orizzonti iridescenti che, per la loro bellezza, vi inebrieranno di forti emozioni e di nuove sensazioni. Non perdetevi quest'occasione. È un'esperienza unica, affascinante che non vi deluderà. Non si paga nulla, ma vi appaga. Vi garantiamo, infatti, un piacere intellettuale ineffabile.

Coraggio, ragazzi. Formiamo, dunque, un equipaggio capace di sfidare le difficoltà e di superarle con l'arma dell'intelligenza. Cerchiamo di scoprire quell'intuito innato che è in ciascuno di noi e che spesso offendiamo con atteggiamenti passivi e comportamenti annoiati. Affrettiamoci a partire. Carichiamo la stiva dello stretto necessario per il viaggio. Solo pochi strumenti utili, perché la navigazione sia agile, veloce e non appesantita da inutili zavorre.

Per gli ultimi ritardatari, per gli indecisi, ecco una stupenda dimostrazione geometrica di Pappo sulle disuguaglianze fra media armonica, media geometrica, media aritmetica e media quadratica che vi lascerà senza fiato per la sua chiarezza, eleganza e semplicità e vi invoglierà a partire perché riuscirà a demolire le vostre ultime riserve, a vincere resistenze ed incertezze. Crediamo, infatti, che dopo questa dimostrazione che rende visibile l'invisibile, tangibile l'intangibile, nessuno più dimenticherà queste proprietà così mirabilmente illustrate e rappresentate: una visione incantevole!

## 1.1 Disuguaglianze

**Teorema 1.1.1** (Dimostrazione di Pappo). *Dati due numeri reali positivi  $a$  e  $b$ , vale la seguente catena di disuguaglianze*

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

*Dimostrazione.* Con riferimento alla figura 1.1, consideriamo un triangolo rettangolo  $ABC$  inscritto in una semicirconferenza di centro  $O$ . Siano  $H$  il piede della perpendicolare condotta da  $C$  ad  $AB$ ,  $K$  il piede della perpendicolare condotta da  $H$  a  $OC$  e  $D$  l'intersezione fra la semicirconferenza e la perpendicolare ad  $AB$  per  $O$ .

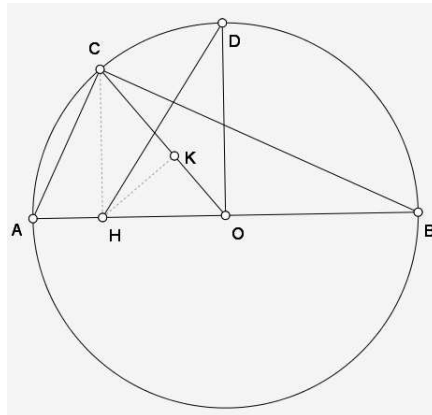


Figura 1.1: Dimostrazione di Pappo

Siano  $AH = a$  e  $BH = b$ . Calcoliamo i segmenti  $CK$ ,  $CH$ ,  $OD$  e  $HD$ . Chiaramente  $OD$  è il raggio e dunque

$$OD = \frac{a+b}{2}$$

Per il secondo teorema di Euclide, nel triangolo  $ABC$  risulta che

$$CH^2 = AH \cdot BH \Rightarrow CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{ab}$$

Nel triangolo rettangolo  $CHO$ , inoltre, abbiamo

$$CH = \sqrt{ab}$$

$$OH = AO - AH = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

e, per il primo teorema di Euclide,

$$CK = \frac{CH^2}{CO} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo  $ODH$ , si ha che

$$HD = \sqrt{OH^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Ora, per il **Problema 2.1** che tratteremo in seguito, il segmento perpendicolare è il più breve tratto che congiunge un punto e una retta. Dunque è verificata la seguente catena di disuguaglianze

$$CK \leq CH \leq CO = OD \leq HD$$

e, sostituendo con i valori trovati precedentemente, ricaviamo

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Questa dimostrazione vale per tutte le coppie di reali positivi  $a$  e  $b$ , dato che è sempre possibile costruire un triangolo rettangolo che abbia le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa che misurano  $a$  e  $b$ . I punti  $C$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $O$  e  $K$  sono ben distinti se  $a \neq b$ . Riuscite, ragazzi, a vedere cosa succede alla precedente costruzione se  $H \equiv O$ , ovvero  $a = b$ ? Dateci subito un assaggio delle vostre capacità, verificando che in questo caso si ha l'uguaglianza.

Generalizziamo l'elegante risultato prima ottenuto in  $n$  variabili.

**Teorema 1.1.2** (Disuguaglianza fra medie). *Dati  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numeri reali positivi, risulta*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

dove, in ordine da sinistra a destra, le quattro espressioni vengono rispettivamente chiamate *media armonica (HM)*, *media geometrica (GM)*, *media aritmetica (AM)* e *media quadratica (QM)*.

*Dimostrazione  $AM \geq GM$ .* Di questa disuguaglianza esistono svariate dimostrazioni, che potrebbero anche essere risolte da voi ragazzi per *rodare... il cervello*. Noi ne proponiamo una che riteniamo elegante e molto bella.

Sappiamo che  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nAM$ . Siano  $x_a$  e  $x_b$  due numeri tali che  $x_a \leq AM \leq x_b$ . Tali numeri esistono perché, se non esistessero, avremmo che o tutti i numeri sono minori di  $AM$ , il che è impossibile poiché la loro somma sarebbe più piccola di  $nAM$ , o che tutti i numeri sono maggiori di  $AM$ , altrettanto falso poiché la loro somma sarebbe maggiore di  $nAM$ .

A questo punto sostituiamo  $x_a$  con  $AM$  e  $x_b$  con  $x_a + x_b - AM$ . Così facendo la somma rimane costante. Il prodotto di tutti i numeri, invece, aumenta (o tutt'al più rimane costante), poiché cresce il prodotto dei due numeri modificati. Infatti, essendo  $(AM - x_a)(AM - x_b)$  sicuramente negativo (o tutt'al più nullo) poiché  $x_a \leq AM \leq x_b$ , sviluppando i calcoli risulta

$$\begin{aligned} (AM - x_a)(AM - x_b) \leq 0 &\Rightarrow AM^2 - AMx_a - AMx_b + x_ax_b \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_ax_b \leq AMx_a + AMx_b - AM^2 \Rightarrow x_ax_b \leq AM(x_a + x_b - AM) \end{aligned}$$

Dunque, iterando il ragionamento (lo possiamo fare per le stesse considerazioni di prima), ovvero prendendo due nuovi valori che siano uno minore o uguale di  $AM$  e l'altro maggiore o uguale, e sostituendoli con un  $AM$  e con la loro somma diminuita di  $AM$ , ad ogni passo si ottiene un nuovo  $AM$  che lascia, però, invariata la somma di tutti i numeri. Con tale procedimento, tenendo presente il fatto che la somma rimane costantemente uguale a  $nAM$ , si riesce a sostituire ogni  $x_i$  con un  $AM$ . Ammettetelo!

Questo "innesto", che senza... *additivi* ha migliorato la qualità e la quantità del... *prodotto*, vi ha stupiti se non addirittura sbalorditi. Alla fine si ottiene

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq AM \cdot AM \dots \cdot AM \Rightarrow GM^n \leq AM^n \Rightarrow GM \leq AM$$

A questo punto ci chiediamo quando  $x_1 x_2 \dots x_n = GM^n$  è massimo.

Riferendoci sempre alla soluzione precedente, il massimo si ha quando abbiamo sostituito tutti gli  $x_i$  con  $AM$ . Ciò avviene, quando gli  $x_i$  sono tutti uguali. Se così non fosse, infatti, sarebbe possibile sostituire un altro  $x_i$  con un  $AM$  ed ottenere un prodotto ancora più grande. Dunque, **nella disuguaglianza  $AM \geq GM$ , il caso di uguaglianza è verificato se i numeri sono tutti uguali.**

**Teorema 1.1.3** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz). *Dati  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  numeri reali positivi, risulta vera la disuguaglianza*

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

*Dimostrazione.* Si consideri il polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= (a_1 - x b_1)^2 + (a_2 - x b_2)^2 + \dots + (a_n - x b_n)^2 = \\ &= x^2 (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - 2x(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + \\ &+ (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \end{aligned}$$

Essendo somma di quadrati,  $P(x) \geq 0 \quad \forall x$ . Ciò vuol dire che il polinomio è positivo per qualsiasi valore di  $x$ , e siccome il coefficiente di  $x^2$  è positivo, deve risultare  $\frac{\Delta}{4} \leq 0$ , ovvero

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \end{aligned}$$

che è la tesi.

A questo punto è naturale chiedersi quando si verifica il caso di uguaglianza. Ovviamente questo si ha quando  $\Delta = 0$ . A sua volta, se il  $\Delta$  è uguale

a zero, allora il polinomio si annulla sicuramente per un valore di  $t$ , ovvero esiste  $t$  tale che  $P(t) = 0$ . Ma, si capisce bene, che per annullarsi deve accadere che tutti gli  $(a_i - tb_i)$  devono essere uguali a zero, altrimenti  $P(x) > 0$ . Dunque

$$a_i - tb_i = 0 \Rightarrow t = \frac{a_i}{b_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

**Quindi l'uguaglianza si ha se il rapporto di due termini corrispondenti si mantiene costante.**

Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e alla disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica, è possibile dimostrare anche le altre disuguaglianze  $QM \geq AM$ ,  $GM \geq HM$  e, in entrambe, **il caso di uguaglianza si ha se i numeri sono tutti uguali**. Anche queste dimostrazioni le lasciamo a voi dell'*equipaggio* come utili esercizi per riscaldare i... *muscoli cerebrali*.



## 1.2 Alcuni richiami di Geometria

Trascuriamo la trattazione di alcuni teoremi e formule di geometria sintetica, di trigonometria e geometria analitica che utilizzeremo assumendoli noti, in quanto possono essere trovati in qualunque libro di testo della scuola media superiore. Sentiamo, tuttavia, il dovere di soffermarci su alcune questioni di massimo e di minimo.

### Massimi e minimi di alcune funzioni

La funzione  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (con  $a \neq 0$ ) ha come grafico una parabola che, a seconda che  $a$  sia positivo o negativo, ha rispettivamente un minimo o un massimo assoluto nel punto di ascissa  $x = -\frac{b}{2a}$ .

La funzione  $f(\alpha) = \sin \alpha$  raggiunge il massimo, quando  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , mentre raggiunge il minimo, quando  $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

La funzione  $f(\alpha) = \cos \alpha$  raggiunge il massimo, quando  $\alpha = 2k\pi$ , mentre raggiunge il minimo, quando  $\alpha = \pi + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Teoremi di geometria sintetica

Enunciamo alcuni teoremi importanti di massimo e minimo che possono essere trovati, studiati e approfonditi in qualunque manuale di scuola media superiore.

**Disuguaglianza triangolare:** In un triangolo  $ABC$  un lato è minore della somma degli altri due e maggiore del modulo della loro differenza. Ad esempio

$$AB + BC > AC \quad |AB - BC| < AC$$

**Teorema dell'angolo esterno:** In un triangolo la somma di due angoli interni è congruente all'angolo esterno del terzo angolo. Se ne deduce che

ogni angolo esterno è sempre maggiore di ogni angolo interno ad esso non adiacente.

Forti dei nostri nuovi strumenti e metodi, e con quelli spolverati in questa piccola anteprima, possiamo ora affrontare i primi problemi.



*Figura 1.2:* Il faro richiama la luce, simbolo del bagliore intellettuale che rischiarava il buio dell'ignoranza ed illumina la rotta dell'intuizione.

## 1.3 Problemi

**Problema 1.3.1.** *Dati  $x$  e  $y$  due numeri reali positivi tali che la loro somma sia costante, il loro prodotto è massimo, quando essi sono uguali.*

*Soluzione analitica.* Detta  $s$  la somma dei due numeri e  $p$  il loro prodotto, il problema si può tradurre nel seguente sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = s - x \\ xy = p \end{cases}$$

facilmente interpretabile, nel piano cartesiano, come intersezione di una retta fissa con un fascio di iperboli equilateri riferite ai propri asintoti. La retta, avendo coefficiente angolare  $m = -1$  e ordinata all'origine  $q = s$ , è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ed intercetta l'asse delle ordinate nel punto  $(0, s)$ , come mostra la figura 1.3.

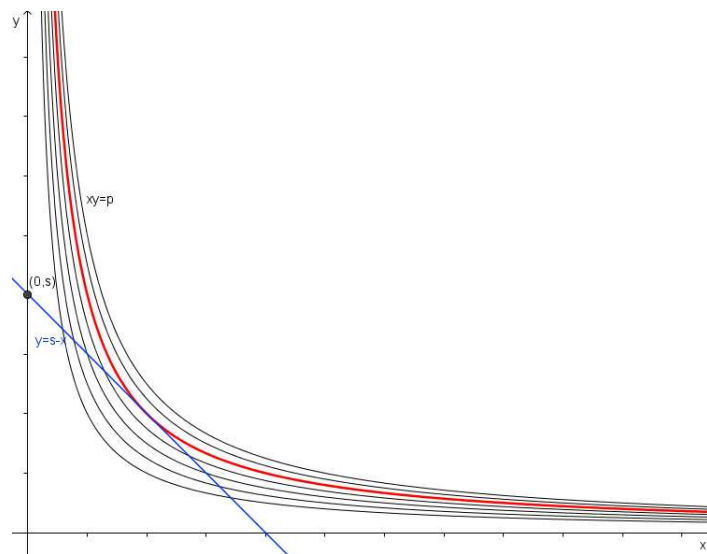


Figura 1.3: Soluzione analitica Problema 1.3.1

Tale sistema ammette ovviamente soluzione, quando le varie iperboli del fascio intersecano la retta. Il valore limite per cui ciò avviene corrisponde

al valore massimo di  $p$  ed è quel valore per cui l'iperbole è tangente alla retta; ossia quando il sistema su scritto, equivalente all'equazione  $x^2 - sx + p = 0$ , ha una e una sola soluzione, ovvero quando il delta si annulla. Deve essere, allora,

$$\Delta = s^2 - 4p = 0 \Rightarrow p = \frac{s^2}{4}$$

Sostituendo tale valore di  $p$  nel sistema precedente, risulta

$$\begin{cases} y = s - x \\ xy = \frac{s^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = s - x \\ x^2 - sx + \frac{s^2}{4} = \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{s}{2} \\ x = \frac{s}{2} \end{cases}$$

Dunque:

**Se la somma fra due numeri  $x$  e  $y$  è costante e vale  $s$ , il loro prodotto è massimo, quando  $x = y$ . Tale prodotto vale  $\frac{s^2}{4}$ .**

*Soluzione algebrica.* Una soluzione del problema può essere fornita anche con l'ausilio della disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica in due variabili dimostrata nel **Teorema 1.1.1**

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

da cui segue che il prodotto è sempre minore o uguale di una certa costante che vale  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ . L'uguaglianza, e dunque il massimo, si ha quando i due numeri sono uguali.

*Interpretazione geometrica.* Il problema offre un'interessante interpretazione geometrica. Infatti, dette  $x$  e  $y$  le dimensioni di un rettangolo, il problema è equivalente a ricercare fra tutti i rettangoli di perimetro assegnato (poiché  $x + y$  è costante, lo è anche  $2(x + y)$ ), quello di area

massima. Questa situazione di massimo si ha, dunque, quando i lati sono uguali, ovvero nel caso di un quadrato.

Concludiamo che:

**Fra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, il quadrato ha area massima.**

Consideriamo ora la proprietà duale della precedente.

**Problema 1.3.2.** *Dati  $x$  e  $y$  due numeri reali positivi tali che il loro prodotto sia costante, la loro somma è minima, quando essi sono uguali.*

*Soluzione analitica.* Similmente a quanto fatto nel **Problema 1.3.1**, si giunge al sistema

$$\begin{cases} y = s - x \\ xy = p \end{cases}$$

dove, questa volta,  $p$  è fissato e  $s$  varia. Il sistema può, dunque, essere interpretato come l'intersezione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti con un fascio di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, come mostra la figura 1.4 nella pagina seguente.

Il valore minimo di  $x + y$  si ha quando la retta è tangente all'iperbole. A questo punto si può concludere, come nel **Problema 1.3.1**, imponendo la condizione di tangenza  $\Delta = 0$ , da cui si ricava che  $s = 2\sqrt{p}$  e, sostituendo nel sistema, si ottiene  $x = y = \sqrt{p}$ .

Dunque:

**Se il prodotto fra due numeri  $x$  e  $y$  è costante e vale  $p$ , la loro somma è minima, quando  $x = y$ . Tale somma vale  $2\sqrt{p}$ .**

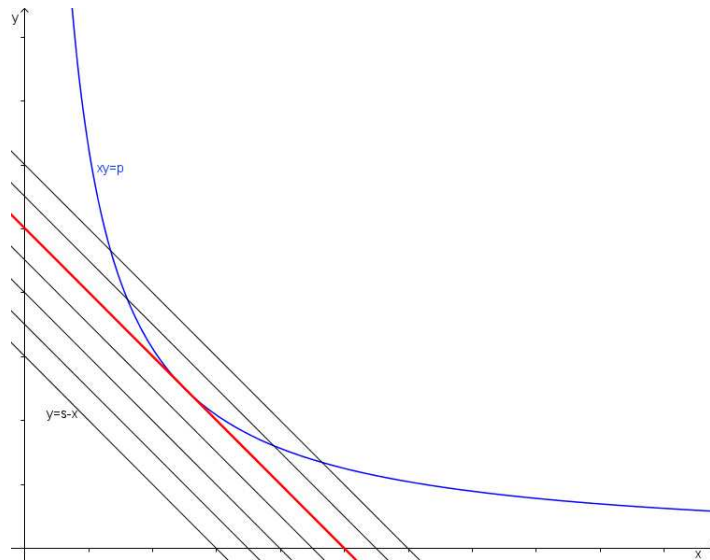


Figura 1.4: Soluzione analitica Problema 1.3.2

*Soluzione algebrica.* Analogamente al **Problema 1.3.1**, ricorrendo alla disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica con due variabili dimostrata nel **Teorema 1.1.1**

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

si conclude che, se il prodotto è costante, la somma è sempre maggiore di una certa costante. Il minimo si ha nel caso di uguaglianza, ossia quando  $x = y$ .

*Interpretazione geometrica.* Anche questo problema ha un'interessante interpretazione geometrica. Infatti, dette  $x$  e  $y$  le dimensioni di un rettangolo, il problema è equivalente a cercare, fra tutti i rettangoli di area assegnata (poiché  $xy$  è costante), quello di perimetro minimo. Questa situazione di minimo si ha quando i lati sono uguali, ovvero nel caso di un quadrato.

Possiamo, allora, concludere che:

**Fra i rettangoli di area assegnata, il quadrato ha perimetro minimo.**

Passiamo ora ad esaminare altri problemi di massimo e minimo simili a quelli affrontati nel **Problema 1.3.1** e **Problema 1.3.2**.

**Problema 1.3.3.** *Dati  $x$  e  $y$  due numeri reali positivi tali che il loro prodotto sia costante, la somma dei loro quadrati è minima, quando i due numeri sono uguali.*

*Soluzione algebrica 1.* Dall'identità:  $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$ , si nota che la somma di quadrati si presenta come somma di due quantità, di cui una costante per ipotesi, ovvero  $2xy$ . Dunque essa risulta minima, quando l'espressione  $(x - y)^2$  è minima. Ciò naturalmente avviene quando la base è uguale a zero, ovvero quando  $x = y$ .

Pertanto:

**Se il prodotto fra due numeri  $x$  e  $y$  è costante, la somma dei loro quadrati è minima, quando  $x = y$ .**

*Soluzione algebrica 2.* Così come svolto nel **Problema 1.3.1** e nel **Problema 1.3.2**, per una soluzione differente, possiamo ricorrere alle disuguaglianze fra medie, in questo caso fra media geometrica e media quadratica con due variabili

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

da cui segue che, lasciando invariato il prodotto, la somma dei quadrati è minima, quando vale l'uguaglianza, ovvero quando  $x = y$ .

*Interpretazione geometrica.* Se  $x$  e  $y$  sono i lati di un rettangolo, il problema è equivalente a cercare fra tutti i rettangoli di data area, poichè  $xy$  è costante, quello con diagonale minore, ricordando che, grazie al Teorema di Pitagora,  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Questo, per quanto precedentemente dimostrato, avviene per il quadrato.

Il problema è anche equivalente a cercare, fra tutti i triangoli rettangoli di area assegnata ( $xy$  costante  $\Rightarrow \frac{xy}{2}$  costante), quello che ha l'ipotenusa più piccola e ciò avviene per il triangolo rettangolo isoscele.

In definitiva:

**Fra i rettangoli di data area, quello con diagonale minore è il quadrato.**

o equivalentemente:

**Fra i triangoli rettangoli di area assegnata, quello con ipotenusa minore è il triangolo rettangolo isoscele.**

Del precedente vale anche la proprietà duale

**Problema 1.3.4.** *Dati  $x$  e  $y$  due numeri reali positivi tali che la somma dei loro quadrati sia costante, il loro prodotto raggiunge il massimo, quando i due numeri sono uguali.*

*Soluzione algebrica.* Sappiamo, per la disuguaglianza fra media geometrica e media quadratica, che

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

da cui, lasciando invariata la somma dei quadrati, possiamo affermare quanto segue:



**Quando la somma dei quadrati di due numeri  $x$  e  $y$  è costante, il loro prodotto è massimo se  $x = y$ .**

*Soluzione geometrica.* Se  $x$  e  $y$  sono i lati di un rettangolo, il problema è equivalente a cercare fra tutti i rettangoli di data diagonale, essendo  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$  costante per ipotesi, quello con area maggiore. Questo, per quanto precedentemente dimostrato, è un quadrato.

Il problema è anche equivalente a cercare fra i triangoli rettangoli di ipotenusa costante, quello di area massima. Ciò avviene quando il triangolo è rettangolo isoscele.

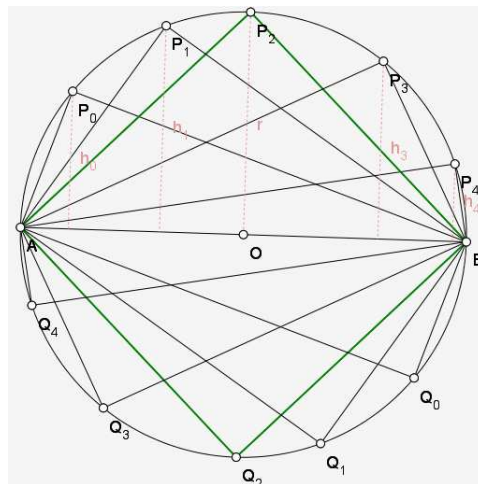


Figura 1.5: Soluzione geometrica Problema 1.3.4

Graficamente, tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa costante sono quelli che hanno il vertice dell'angolo retto su una semicirconferenza. Analogamente, facendo il simmetrico di tale vertice rispetto al centro, si ottengono tutti i rettangoli di data diagonale, come evidenzia la figura 1.5.

Grazie alla figura, è inoltre immediata una dimostrazione sintetica delle proprietà fondamentali che stiamo per enunciare: a voi *di bordo* il divertente compito di cercarla.

Possiamo, allora, affermare che:

**Fra i rettangoli di data diagonale, quello con area maggiore è il quadrato.**

o equivalentemente:

**Fra i triangoli rettangoli di ipotenusa assegnata, quello con area maggiore è il triangolo rettangolo isoscele.**

Le proprietà enunciate nel **Problema 1.3.1** e nel **Problema 1.3.2** hanno un respiro più ampio. Sono, infatti, solo casi particolari di proprietà più generali.

**Problema 1.3.5** (Generalizzazione Problema 1.3.1). *Dati  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numeri razionali positivi e  $s > 0$ , il prodotto  $p = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ , in cui  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono reali positivi che soddisfano  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$ , risulta massimo, quando i numeri  $x_i$  sono proporzionali agli esponenti  $a_i$ , ovvero*

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{s}{a}$$

con  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . In questo caso il prodotto massimo vale

$$\frac{s^a}{a^a} \cdot a_1^{a_1} \cdot \dots \cdot a_n^{a_n}$$

*Soluzione.* Risolviamo dapprima il caso in cui  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono interi positivi. Il problema può essere, allora, dimostrato con una semplice applicazione della disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica.

Applicando, infatti, la disuguaglianza ad  $a_1$  termini  $\frac{1}{a_1}x_1$ ,  $a_2$  termini  $\frac{1}{a_2}x_2, \dots, a_n$  termini  $\frac{1}{a_n}x_n$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a_1}x_1 + \frac{1}{a_2}x_2 + \dots + \frac{1}{a_n}x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} &\geq \sqrt[a]{\frac{x_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}{a_1^{a_1}a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{s}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1}a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}} \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che il prodotto  $p$  risulta massimo, quando vale il caso di uguaglianza, ovvero quando i termini utilizzati nelle medie sono tutti uguali fra loro. Dunque

$$\frac{1}{a_1}x_1 = \frac{1}{a_2}x_2 = \dots = \frac{1}{a_n}x_n \Rightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$$

Per calcolare quanto vale questo rapporto costante, ricaviamo tutti i termini in funzione di  $x_1$ . Vale, in base alla precedente uguaglianza,

$$x_2 = a_2 \frac{x_1}{a_1}, \quad x_3 = a_3 \frac{x_1}{a_1}, \quad \dots, \quad x_n = a_n \frac{x_1}{a_1}$$

Sostituendo tali valori nella somma  $s$ , che rimane costante, si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 + a_2 \frac{x_1}{a_1} + \dots + a_n \frac{x_1}{a_1} = s &\Rightarrow x_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = sa_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{s}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{s}{a} \end{aligned}$$

che è ciò che cercavamo.

Estendiamo il risultato anche ai razionali. Posto

$$a_i = \frac{b_i}{c_i}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{b_n}{c_n}$$

dove  $b_i$  e  $c_i$  sono interi positivi, il prodotto da massimizzare diventa

$$p = x_1^{\frac{b_1}{c_1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\frac{b_n}{c_n}} = \sqrt[c_1 \cdot \dots \cdot c_n]{x_1^{b_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n \cdot c_1 \cdot \dots \cdot c_{n-1}}}$$

Dunque, non rimane che massimizzare il radicando, ovvero

$$x_1^{b_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n \cdot c_1 \cdot \dots \cdot c_{n-1}}$$

Abbiamo, quindi, ricondotto il problema al caso in cui gli esponenti sono interi. Applicando la prima parte del problema, il massimo si ha quando

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{b_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n} &= \dots = \frac{x_n}{b_n \cdot c_1 \cdot \dots \cdot c_{n-1}} = \\ &= \frac{s}{b_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n + \dots + b_n \cdot c_1 \cdot \dots \cdot c_{n-1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x_1}{\frac{b_1}{c_1}} = \dots = \frac{x_n}{\frac{b_n}{c_n}} = \frac{s}{\frac{b_1}{c_1} + \dots + \frac{b_n}{c_n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x_1}{a_1} = \dots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{s}{a_1 + \dots + a_n} \end{aligned}$$

come volevamo.

Calcoliamo, ora, quanto vale il prodotto massimo. Abbiamo, per il risultato precedente, che

$$x_1 = \frac{s}{a} \cdot a_1, \quad \dots, \quad x_n = \frac{s}{a} \cdot a_n$$

e, dunque, il prodotto massimo vale

$$\frac{s^{a_1}}{a^{a_1}} \cdot a_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{s^{a_n}}{a^{a_n}} \cdot a_n^{a_n} = \frac{s^a}{a^a} \cdot a_1^{a_1} \cdot \dots \cdot a_n^{a_n}$$

Del precedente vale anche la proprietà duale.

**Problema 1.3.6** (Generalizzazione Problema 1.3.2). *Dati  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elementi di  $\mathbb{Q}^+$  e  $p > 0$ , la somma  $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , in cui  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono reali positivi tali che  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = p$ , risulta minima, quando i numeri  $x_i$  sono proporzionali agli esponenti  $a_i$ , ovvero*

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}}$$

con  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . In tal caso la somma vale

$$s = a \cdot \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}}$$

*Soluzione.* Risolviamo solo il caso in cui  $a_1, \dots, a_n$  sono interi. L'estensione ai razionali è simile a quella precedente.

Applicando la disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica sui valori utilizzati nel precedente problema, si perviene alla stessa disuguaglianza

$$\frac{s}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}}$$

Da ciò si deduce che la somma  $s$  è minima, essendo  $p$  fisso, quando vale l'uguaglianza, ovvero quando i termini usati nelle medie sono uguali, cioè

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$$

Per calcolare tale rapporto costante ricaviamo ogni termine in funzione di  $x_1$ , come fatto nel precedente problema, ottenendo

$$x_2 = a_2 \frac{x_1}{a_1}, \quad \dots, \quad x_n = a_n \frac{x_1}{a_1}$$

Sostituendo tali valori nel prodotto  $p$ , che rimane costante, e chiamando  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , abbiamo

$$\begin{aligned} x_1^{a_1} \frac{a_2^{a_2} x_1^{a_2}}{a_1^{a_2}} \dots \frac{a_n^{a_n} x_1^{a_n}}{a_1^{a_n}} &= p \Rightarrow \frac{x_1^a a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}{a_1^{a-a_1}} = p \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x_1^a}{a_1^a} &= \frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}} \Rightarrow \frac{x_1}{a_1} = \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}} \end{aligned}$$

che è ciò che cercavamo.

Calcoliamo la somma minima in questo caso. Per il risultato precedente si ha

$$s = x_1 + \dots + x_n = a_1 \cdot \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}} + \dots + a_n \cdot \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}}$$

e, dunque, la somma vale

$$s = a \cdot \sqrt[a]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}}$$

## Principio di dualità

Abbiamo più volte parlato di **dualità** in questo capitolo. Questa regola permette, a partire da un problema di massimo o minimo in cui una certa quantità  $A$  viene, ad esempio, massimizzata nell'ipotesi che la quantità  $B$  sia costante, di formulare un altro problema, equivalente al primo, in cui la quantità  $B$  è minimizzata nell'ipotesi che  $A$  sia costante.

Utilizzando tale principio molto utile, il **Problema 1.3.2**, il **Problema 1.3.4** e il **Problema 1.3.6** sono rispettivamente conseguenze immediate del **Problema 1.3.1**, del **Problema 1.3.3** e del **Problema 1.3.5** rispettivamente.

## Regola di Steiner

Un'altra regola pratica per il calcolo del punto di massimo o di minimo è quella di Steiner, secondo cui, se un problema è simmetrico (le variabili sono interscambiabili), allora il punto di massimo o di minimo è il punto di massima simmetrizzazione, ossia quando le variabili sono uguali.

Il **Problema 1.3.1**, il **Problema 1.3.2**, il **Problema 1.3.3** e il **Problema 1.3.4**, in cui i sistemi trovati sono tutti simmetrici, giustificano questa regola pratica: in ognuno di essi abbiamo concluso che il punto di massimo o di minimo è realizzato se le variabili sono uguali.



*Figura 1.6:* Il faro evoca luoghi solitari in cui è possibile ascoltare la voce silenziosa delle idee strabilianti.

Consideriamo alcune applicazioni, nell'algebra prima e nella geometria poi, dei risultati enunciati nei problemi precedenti.

**Problema 1.3.7.** *Dimostrare che, per ogni  $x$  e  $y$  reali non negativi, vale*

$$(x + 2y)^3 \geq 27xy^2$$

*Soluzione.* In forza della disuguaglianza  $AM \geq GM$  in tre variabili, dimostrata nel **Teorema 1.1.3**, risulta che

$$\begin{aligned} \frac{x + y + y}{3} &\geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot y} \Rightarrow \left(\frac{x + 2y}{3}\right)^3 \geq xy^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x + 2y)^3 \geq 27xy^2 \end{aligned}$$

Il caso di uguaglianza, avendo utilizzato la disuguaglianza  $AM \geq GM$ , si ha quando  $x = y$ .

**Problema 1.3.8.** *Dimostrare che, per ogni numero naturale  $n$ , vale*

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$$

*Soluzione.* Chiamiamo  $s = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n+1}$  la somma di questi  $2n+1$  termini che sono così ordinati:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \dots > \frac{1}{3n+1}$$

Allora, se sostituiamo  $\frac{1}{n+1}$  ad ogni termine della somma, che è più piccolo di quest'ultimo, otteniamo una somma maggiorata. Dunque

$$s < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2$$

Per la seconda parte del problema, poniamo

$$x_1 = n + 1, \quad x_2 = n + 2, \quad \dots, \quad x_{2n+1} = 3n + 1$$

Essendo una progressione aritmetica, risulta

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1} = \frac{x_1 + x_{2n+1}}{2} \cdot (2n + 1) = (2n + 1)^2$$

Grazie alla disuguaglianza  $AM \geq HM$  in  $n$  variabili, enunciata nel **Teorema 1.1.3**, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}}{2n + 1} &= \frac{(2n + 1)^2}{2n + 1} = 2n + 1 \geq \\ &\geq \frac{2n + 1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{2n+1}}} = \frac{2n + 1}{s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n + 1}{s} \leq 2n + 1 \Rightarrow s \geq 1 \end{aligned}$$

Tuttavia, il caso di uguaglianza si realizza se tutti i termini  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono uguali. Ma ciò non può mai accadere perché, per come sono stati costruiti, gli  $x_i$  sono tutti diversi tra loro e dunque  $s > 1$ .

**Problema 1.3.9.** *Dimostrare che, per ogni  $x$  e  $y$  reali non negativi, vale*

$$8x^2y^2 \leq (x^2 + y^2)(x + y)^2$$

*Soluzione.* In virtù della disuguaglianza  $AM \geq GM$  e della disuguaglianza  $QM \geq GM$ , risulta

$$\begin{aligned} \frac{x + y}{2} &\geq \sqrt{xy} \Rightarrow \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} &\geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \end{aligned}$$

Moltiplicando le due precedenti disuguaglianze, si ottiene che

$$\begin{aligned} \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} &= \frac{(x + y)^2 \cdot (x^2 + y^2)}{8} \geq x^2y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8x^2y^2 \leq (x^2 + y^2)(x + y)^2 \end{aligned}$$



Avendo utilizzato le disuguaglianze  $AM \geq GM$  e  $QM \geq AM$ , il caso di uguaglianza si ha quando  $x = y$ .

**Problema 1.3.10.** *Dati  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numeri reali non negativi tali che il loro prodotto sia 1, determinare quando  $S = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$  raggiunge il minimo.*

*Soluzione.* Poniamo

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = 2x_2, \quad \dots, \quad y_n = nx_n$$

L'espressione da minimizzare diventa  $S = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , mentre la condizione sul prodotto può essere riscritta come

$$y_1 \cdot \frac{y_2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{y_n}{n} = 1 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n = n!$$

Il problema è stato ricondotto al **Problema 1.3.6** con

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$$

e dunque  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ . Pertanto, la somma  $S$  è minima, quando  $y_1 = y_2 \dots = y_n$ , ovvero quando  $x_1 = 2x_2 = \dots = nx_n$  e in questo caso vale

$$S_{min} = a \sqrt[n]{\frac{p}{a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}}} = n \sqrt[n]{n!}$$

**Problema 1.3.11.** *Inscrivere, in una circonferenza di raggio  $r$ , il triangolo isoscele di area massima.*

*Soluzione.* Con riferimento alla figura 1.7 nella pagina seguente, consideriamo un triangolo isoscele  $ABC$  di base  $BC$  inscritto in una circonferenza  $\gamma$  e sia  $H$  il piede della perpendicolare condotta da  $A$  a  $BC$

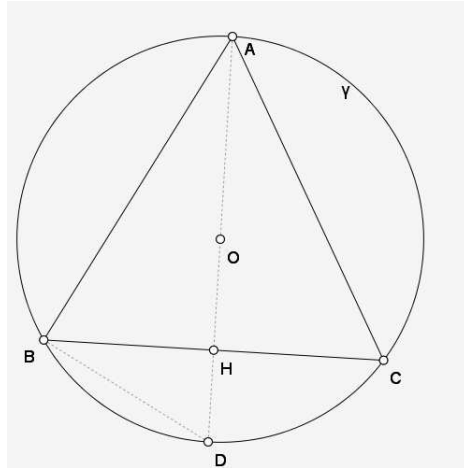


Figura 1.7: Problema 1.3.11

con  $AH = x$  ( $0 < x < 2r$ ). Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo  $ABD$ , rettangolo poiché l'angolo  $\angle ABD$  giace su una semicirconferenza, otteniamo  $BH = \sqrt{AH \cdot HD} = \sqrt{x(2r - x)}$  e dunque

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= AH \cdot \frac{BC}{2} = AH \cdot BH = x \cdot \sqrt{x(2r - x)} = \\ &= \sqrt{x^3(2r - x)} = x^{\frac{3}{2}} \cdot (2r - x)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Risultando  $x + 2r - x = 2r$  costante, alla luce del risultato del **Problema 1.3.5**, il precedente prodotto risulta massimo, quando

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{2r - x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}r$$

Essendo l'altezza  $\frac{3}{2}$  del raggio, il triangolo risulta equilatero. A voi, allievi ufficiali della marina... *matematica*, il compito di comprovare questo facile risultato.

Possiamo, pertanto, concludere che:

**Il triangolo equilatero è il triangolo isoscele di area massima inscritto in una circonferenza.**

**Problema 1.3.12.** *Inscrivere, in una semicirconferenza di raggio  $r$ , il trapezio isoscele di area massima che poggia la base maggiore sul diametro.*

*Soluzione.* Con riferimento alla figura 1.8 nella pagina successiva, consideriamo  $ABCD$  un qualunque trapezio isoscele, con  $AB$  base maggiore, inscritto in una semicirconferenza  $\gamma$ . Poniamo  $DC = 2x$ , con il limite  $0 < x < r$ . Detta  $H$  la proiezione del centro  $O$  della semicirconferenza sulla base minore  $DC$ , applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo  $HOC$ , possiamo calcolare  $OH$ , ottenendo

$$OH = \sqrt{CO^2 - CH^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Dunque

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= \frac{AB + CD}{2} \cdot OH = \frac{2x + 2r}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} = \\ &= \sqrt{(x+r)^3(r-x)} = (x+r)^{\frac{3}{2}} \cdot (r-x)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Risultando  $x+r+r-x = 2r$  costante, per il **Problema 1.3.5**, il prodotto precedente è massimo, quando

$$\frac{x+r}{\frac{3}{2}} = \frac{r-x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{r}{2}$$

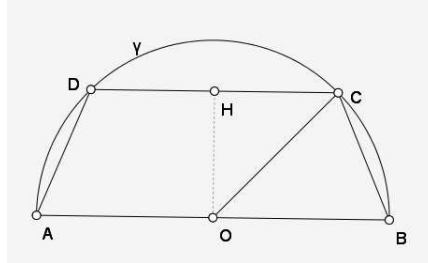


Figura 1.8: Problema 1.3.12

Il trapezio che soddisfa la condizione del problema ha, dunque, la base minore che misura metà della base maggiore, ossia la base minore è uguale al raggio. Inoltre, essendo

$$BC = \sqrt{\left(\frac{AB - CD}{2}\right)^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{2r - r}{2}\right)^2 + \left(r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right)} = r$$

la base minore, che vale  $r$ , è uguale anche a entrambi i lati.

Pertanto possiamo concludere che:

**Il semiesagono regolare è il trapezio isoscele che, inscritto in una semicirconferenza, realizza l'area massima.**

Vi è piaciuto questo acrobatico e senza rete esercizio... *al trapezio?*

**Problema 1.3.13.** *Inscrivere in un triangolo qualunque un rettangolo che abbia un lato su una delle tre basi e area massima.*

*Soluzione.* Con riferimento alla figura 1.9 nella pagina seguente, consideriamo un triangolo qualunque  $ABC$  e una delle sue tre basi su cui pogerà il rettangolo. Senza perdita di generalità possiamo scegliere  $BC$ . Consideriamo un rettangolo  $EFGD$  qualunque inscritto nel triangolo  $ABC$  che abbia la sua base  $GF$  sul lato  $BC$ ,  $E \in AC$  e  $D \in AB$ . Sia  $H$  il piede della perpendicolare condotta da  $A$  a  $BC$  e  $K$  l'intersezione dell'altezza

$AH$  con il lato  $DE$ . Poniamo  $AK = x$  ( $0 < x < h$ ). Di conseguenza  $DG = h - x$ . Dalla similitudine dei triangoli  $ADE$  e  $ABC$ , discende la seguente proporzione

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow DE = AK \cdot \frac{BC}{AH} = x \frac{BC}{AH}$$

dove  $\frac{BC}{AH}$  è una costante che dipende dal triangolo preso in considerazione.

L'area del rettangolo da minimizzare è, quindi,  $DE \cdot DG = \frac{BC}{AH} x \cdot (h - x)$ .

Poiché la costante  $\frac{BC}{AH}$  è ininfluente nella ricerca del massimo, dobbiamo massimizzare  $x(h - x)$ , perciò non dobbiamo far altro che massimizzare il prodotto di due numeri la cui somma  $x + (h - x) = h$  è costante. Dunque, per il **Problema 1.3.1**, il loro prodotto è massimo se

$$x = h - x \Rightarrow x = \frac{h}{2}$$

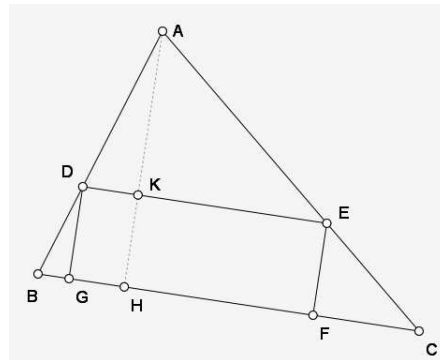


Figura 1.9: Problema 1.3.13

Si può, pertanto, concludere che:

**Il rettangolo di area massima inscritto in un triangolo, che abbia un lato su una base, ha altezza pari a metà dell'altezza relativa a quel lato.**

Ogni riferimento alle altezze delle Loro... Altezze è puramente casuale!

**Problema 1.3.14.** *Di un triangolo qualunque, trovare il punto che rende minima la somma delle distanze dai lati. Analogamente trovare quello che la rende massima.*

*Soluzione.* Riferendoci alla figura 1.10, consideriamo un triangolo  $ABC$  e un punto  $P$  al suo interno. Conduciamo da  $P$  le perpendicolari ai lati  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  che incontrano i lati in  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

Supponiamo, senza perdita di generalità, che nel triangolo  $ABC$  valga la relazione fra gli angoli

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma$$

Risolviamo dapprima il problema in un caso particolare, ovvero fissando una delle tre distanze  $PD$ ,  $PE$  o  $PF$ .

Fissiamo la distanza  $PD$ . Ovviamente tutti i punti  $P$ , interni al triangolo e tali che la distanza  $PD$  è costante, giacciono sulla retta  $r$  parallela a  $AB$  e passante per  $P$ , che interseca  $AC$  in  $R$  e  $BC$  in  $Q$ . Vogliamo capire quando, al variare di  $P$  internamente al segmento  $RQ$ ,  $PF + PE$  raggiunge massimo o minimo.

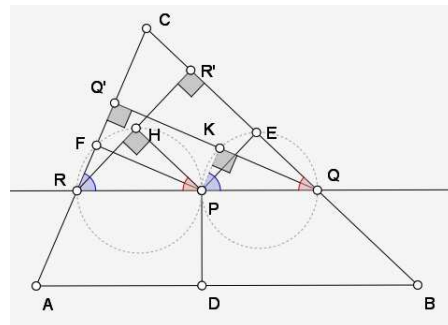


Figura 1.10: Problema 1.3.14

A tal fine tracciamo da  $R$  la perpendicolare a  $BC$  e da  $Q$  la perpendicolare a  $AC$ . Siano  $R'$  e  $Q'$  i loro rispettivi piedi. Tracciamo, poi, da  $P$  le

perpendicolari ai segmenti  $RR'$  e  $QQ'$ , che li incontrano, rispettivamente, nei punti  $H$  e  $K$ .

Inanzitutto ricordiamo che  $\angle CRQ = \alpha \geq \beta = \angle CQR$ . Inoltre, per il parallelismo di  $AC$  e  $PK$ , entrambi perpendicolari al segmento  $QQ'$ , si ha che  $\angle CRQ = \angle KPQ = \alpha$ . Analogamente, dal parallelismo di  $BC$  e  $PH$ , segue che  $\angle CQR = \angle HPR = \beta$ . Per di più, il quadrilatero  $RPHF$  è ciclico (inscrittibile in una circonferenza), in quanto  $\angle RFP = \angle RHP = \frac{\pi}{2}$ . Da ciò si deduce che

$$PF \geq RH$$

essendo due corde rispettivamente sottese, nella stessa circonferenza, dai due angoli  $\angle FRP$  e  $\angle HRP$  per i quali vale la relazione

$$\angle FRP = \angle CRQ = \alpha \geq \beta = \angle HRP$$

per quanto supposto inizialmente.

Anche il quadrilatero  $PQEK$  è ciclico, poiché  $\angle PKQ = \angle PEQ = \frac{\pi}{2}$ .

Con motivazioni analoghe alle precedenti

$$\angle KPQ = \alpha \geq \beta = \angle CQR = \angle EQP \Rightarrow QK \geq PE$$

Ma  $HR' = PE$  e  $KQ' = PF$ , poiché  $PER'H$  e  $PKQ'F$  sono rettangoli per costruzione. Tenendo, poi, conto delle precedenti disuguaglianze, possiamo affermare che

$$\begin{aligned} RR' &= RH + HR' = RH + PE \leq PF + PE \\ QQ' &= QK + KQ' = QK + PF \geq PE + PF \end{aligned}$$

e, in definitiva,

$$RR' \leq PF + PE \leq QQ'$$

relazione, quest'ultima, che vale per ogni punto  $P$  preso sul segmento  $RQ$ . Possiamo, pertanto, concludere che la quantità  $PF + PE$  raggiunge il minimo, se  $P \equiv R$  e il massimo, quando  $P \equiv Q$ .

Abbiamo stabilito, quindi, il seguente risultato intermedio:

**In un triangolo qualunque, la somma delle distanze dai lati di un punto preso sulla base raggiunge il minimo, quando il punto coincide con il vertice della base da cui parte l'altezza minore e il massimo, quando il punto coincide con il vertice della base da cui parte l'altezza maggiore.**

Questo teorema ha un importante corollario. Se il triangolo è isoscele, nelle precedenti disuguaglianze vale il segno di uguaglianza, essendo uguali gli angoli alla base di tale triangolo. Possiamo, allora, stabilire quanto segue:

**In un triangolo isoscele, la somma delle distanze dai lati di un punto preso sulla base è costante ed uguaglia il valore delle altezze riferite ai lati congruenti.**

Prima di ritornare al problema generale, vi facciamo notare che nella figura 1.10 nella pagina 41 l'angolo  $\alpha$  è acuto. Come cambia il disegno nel caso in cui  $\alpha$  è ottuso? Ai più audaci il compito di riadattare la precedente dimostrazione a questo caso volutamente trascurato. Non possiamo mica fare tutto noi!

A questo punto ritorniamo al problema generale. Riferendoci alla figura 1.11 nella pagina seguente, condotte da  $R$  e da  $Q$  le perpendicolari al segmento  $AB$ , che intersecano lo stesso in  $R''$  e  $Q''$ , abbiamo dimostrato che

$$RR' + RR'' = RR' + PD \leq PF + PE + PD$$

e analogamente

$$QQ' + QQ'' = QQ' + PD \geq PF + PE + PD$$

Dunque, dato un punto  $P$ , ne esiste sempre un altro  $R$  sul lato  $AC$  tale che la somma delle distanze di  $R$  dai lati del triangolo è minore della somma delle distanze di  $P$  dai lati. Analogamente ne esiste uno  $Q$  su  $BC$  tale che la somma delle distanze di  $Q$  dai lati è maggiore della somma delle distanze di  $P$  dai lati.

Chiamiamo  $h_A$ ,  $h_B$  e  $h_C$  le altezze condotte dai vertici  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Si ha che

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \Rightarrow BC \geq AC \geq AB \Rightarrow h_A \leq h_B \leq h_C$$

A questo punto utilizziamo nuovamente il risultato intermedio a cui siamo giunti in precedenza. Qualsiasi punto  $R$  su  $AC$  è tale che

$$RR' + RR'' \geq h_A$$



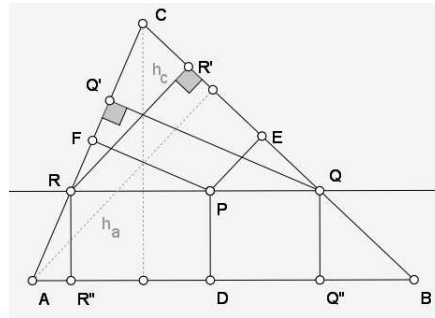


Figura 1.11: Problema 1.3.14

Analogamente per qualsiasi punto  $Q$  su  $BC$  vale

$$QQ' + QQ'' \leq h_C$$

Grazie ai due risultati precedenti e a quelli già stabiliti, possiamo scrivere

$$h_A \leq RR' + RR'' \leq PD + PE + PF \leq QQ' + QQ'' \leq h_C$$

Tale catena di uguaglianze vale per ogni punto  $P$  del triangolo. Pertanto il minimo si ha quando  $P \equiv A$  e il massimo se  $P \equiv C$ .

Possiamo, pertanto, asserire che:

**In un triangolo qualunque il punto che rende minima la somma delle distanze dai lati è il vertice da cui parte l'altezza più piccola. Al contrario, quello da cui parte l'altezza più grande soddisfa la condizione di massimo.**

Si può notare, infine, che il segno di uguaglianza, avendo utilizzato due volte il risultato delle distanze di un punto della base dai lati, vale quando il triangolo è isoscele su due lati, ovvero quando è equilatero. Abbiamo, dunque, stabilito un altro risultato:

**In un triangolo equilatero, la somma delle distanze di un qualsiasi punto interno dai lati è costante ed eguaglia la misura delle altezze.**

Ecco, a conclusione del capitolo, un famoso problema di fisica di massimo. Vi siete mai chiesti, volendo lanciare un oggetto, qual è l'inclinazione ottimale perché esso possa raggiungere il punto più lontano da voi?

**Problema 1.3.15.** *Un lanciatore di giavellotto scaglia il suo attrezzo con una velocità  $v_0$ . Qual è l'inclinazione sull'orizzontale che deve dare al giavellotto perché la gittata sia massima?*

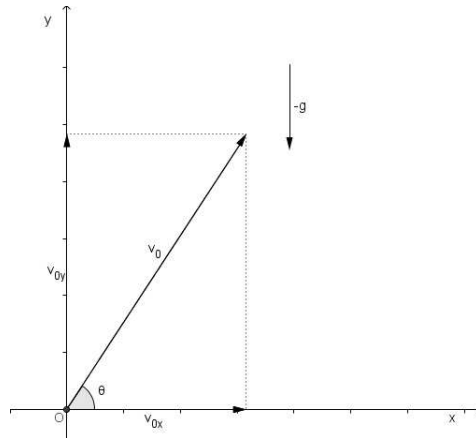


Figura 1.12: Problema 1.3.15

*Soluzione.* Rispetto al sistema di assi cartesiani  $Oxy$  in figura 1.12, la velocità  $v_0$  del giavellotto ha componenti cartesiane

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \wedge v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

dove  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Il moto del giavellotto è dato dalla composizione di due moti: quello rettilineo uniforme sull'asse  $x$  e quello uniformemente accelerato sull'asse delle  $y$ . Pertanto

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}$$

ricavando  $t$  dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, otteniamo

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x$$

che rappresenta l'equazione di una parabola avente concavità rivolta verso il basso e asse verticale. Il giavellotto ha, dunque, una traiettoria parabolica. Essendo la gittata definita come la distanza orizzontale compresa fra il punto di lancio ed il punto il cui l'attrezzo tocca terra, poniamo  $y = 0$  nell'equazione della traiettoria e, scartando la soluzione  $x = 0$ , che coincide con il punto di partenza del giavellotto, troviamo la gittata, espressa dalla relazione

$$G = 2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

Tale espressione risulta massima, per le condizioni poste, quando  $\sin(2\theta)$  è massimo, ovvero quando  $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ . Concludiamo, pertanto, che:

**Per fare in modo che un oggetto lanciato con velocità  $v_0$  raggiunga la massima gittata, bisogna inclinarlo di  $\frac{\pi}{4}$ .**

*N.B: Abbiamo, ovviamente, trascurato la distanza della mano dell'atleta dal suolo al momento del lancio, come pure tutte le resistenze passive che potrebbero influenzarne la traiettoria.*

## Capitolo 2

# Issiamo le vele!

*"La matematica possiede una luce ed una sapienza propria, e ricompensa largamente ogni essere umano intelligente che arriva a cogliere un raggio di ciò che essa è in sè."*

Eric Temple Bell

Issiamo le vele e prendiamo il largo. Aurore e tramonti infuocati ci augureranno il buon giorno e la buona notte. Il sole di giorno e la stella polare di notte traceranno la nostra rotta. La luna sarà il nostro lampione notturno e il cielo stellato il nostro manto. La luce o del sole o delle stelle guiderà il nostro andare e sulla sua scia impareremo ad accorciare le distanze, anche se la luce, possedendo una velocità insuperabile, non avrebbe alcun bisogno di... affrettarsi tanto; ma essa possiede anche un innato senso del... *risparmio!* Studiando i suoi comportamenti abbiamo scoperto il segreto che la porta spontaneamente a determinare percorsi minimi. È sufficiente essere... *riflessivi* come la luce. Ecco svelato il suo segreto:

- L'angolo di incidenza che il raggio luminoso forma con la perpendicolare alla superficie speculare è uguale all'angolo di riflessione;

- il raggio di incidenza, di riflessione e la perpendicolare alla superficie nel punto di incidenza sono complanari, condizione quest'ultima già soddisfatta per problemi geometrici nel piano.

Facciamo, allora,... *luce* su questi problemi che hanno interessato illustri matematici di ogni tempo e che, come specchi emozionali, ci avvolgeranno in un abbraccio caldo e vellutato.



*Figura 2.1:* Il faro indica il porto, metafora di un approdo culturale in cui rinfrancare lo spirito per intraprendere con ritrovato coraggio l'avventura del viaggio.

**Problema 2.1.** *Data una retta  $r$  e un punto  $A$  esterno ad essa, il punto  $B \in r$  che minimizza la lunghezza del segmento  $AB$  è il piede della perpendicolare da  $A$  ad  $r$ .*

*Soluzione.* Come mostrato in figura 2.2, dopo aver tracciato da  $A$  la perpendicolare  $s$  a  $r$ , sia  $B$  il punto d'intersezione di  $s$  con  $r$ . Preso un qualunque altro punto  $C$  su  $r$ , si ha che  $AC > AB$  poiché nel triangolo rettangolo  $ABC$  l'ipotenusa  $AC$  è sempre maggiore del cateto  $AB$ : infatti ad essa si oppone l'angolo maggiore che vale  $\frac{\pi}{2}$ .

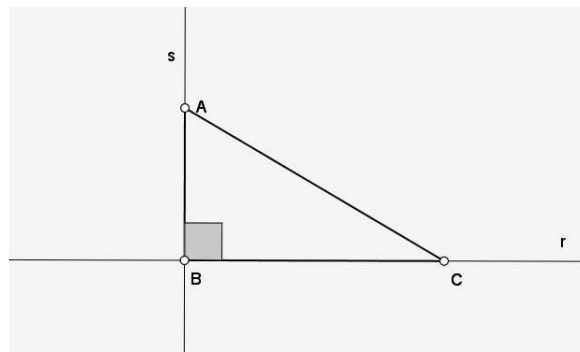


Figura 2.2: Problema 2.1

Dunque, concludiamo che:

**La distanza di un punto da una retta è il segmento "più breve" che congiunge tale punto con la retta.**

**Problema 2.2** (Problema di Erone). *Sia  $r$  una retta ed  $A$  e  $B$  due punti nel piano non appartenenti ad  $r$ . Il punto  $C \in r$  che rende minima la somma  $AC + BC$  è il punto di intersezione del segmento  $AB$  con  $r$ , se  $A$  e  $B$  stanno da parti diverse rispetto alla retta. Se  $A$  e  $B$  giacciono dalla*

stessa parte rispetto ad  $r$ , il punto  $C \in r$  che rende minima  $AC + BC$  è il punto d'intersezione di  $AB'$  con la retta  $r$ , dove  $B'$  è il simmetrico di  $B$  rispetto ad  $r$ .

*Soluzione sintetica.* La soluzione della prima parte è immediata. Infatti, facendo riferimento alla figura 2.3, per qualunque altro punto  $C'$  preso sulla retta  $r$ , applicando la **Disuguaglianza triangolare** al triangolo  $C'AB$ , risulta

$$AC' + C'B > AB \Rightarrow AC' + C'B > AC + CB$$

Dunque, qualunque altro punto  $C'$  noi scegliamo, la somma  $AC' + C'B$  è sempre maggiore della somma  $AC + CB$  che, pertanto, è minima.

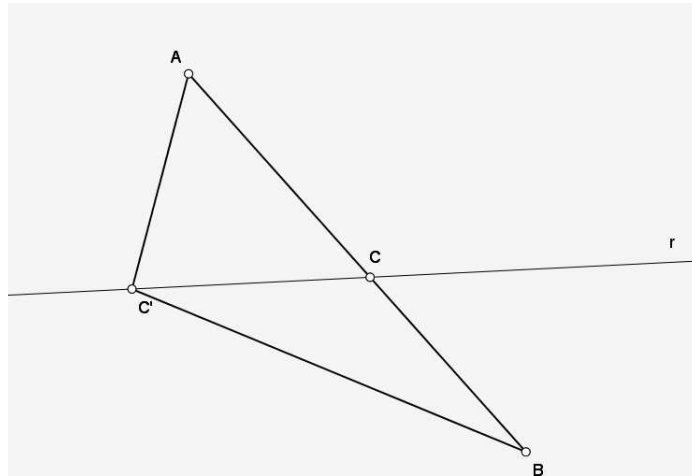


Figura 2.3: Problema di Erone

La soluzione della seconda parte è simile. Infatti, con riferimento alla figura 2.4 nella pagina seguente, scegliendo un altro punto  $C'$  sulla retta  $r$  e applicando la disuguaglianza triangolare nel triangolo  $AC'B'$ , risulta

$$\begin{aligned} AC' + C'B' > AB' &\Rightarrow AC' + C'B' > AC + CB' \Rightarrow \\ &\Rightarrow AC' + C'B > AC + CB \end{aligned}$$

essendo

$$B'C' = BC', \quad B'C = BC$$

in quanto i triangoli  $BC'B'$  e  $BCB'$  sono isosceli.

Quindi, qualunque altro punto  $C'$  noi scegliamo, la somma  $AC' + C'B$  risulta maggiore della somma  $AC + CB$  che, pertanto, è minima.

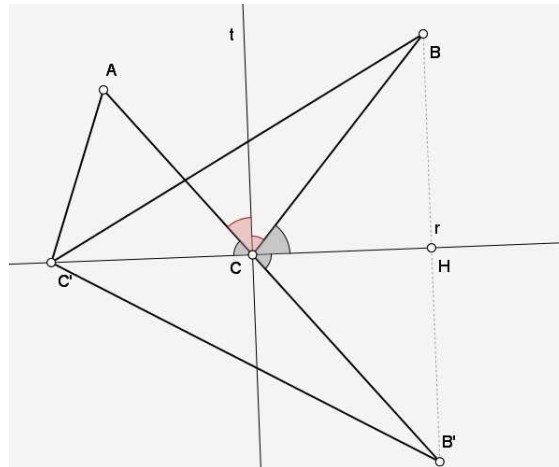


Figura 2.4: Problema di Erone

Si noti la peculiare proprietà di questo punto: chiamando  $H$  l'intersezione fra  $BB'$  e  $r$ , risulta che  $\angle BCH = \angle HCB' = \angle ACC'$ . In particolare, detta  $t$  la perpendicolare ad  $r$  nel punto  $C$ , risulta che  $\angle ACt = \angle tCB$  poiché tali angoli sono complementari di angoli congruenti. Tale percorso è quello che farebbe la luce, poiché l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione. Deduciamo che **la luce, nell'andare da un punto all'altro, segue sempre il cammino minore.**

*Soluzione analitica.* Il problema, nel caso in cui i due punti giacciono dalla stessa parte rispetto alla retta  $r$ , può essere affrontato diversamente. Dimostriamo che il punto  $C$  del problema è il punto di tangenza della famiglia di ellissi di fuochi  $A$  e  $B$  e la retta  $r$ , come mostrato nella figura 2.5 nella pagina successiva. Infatti, ricordando che l'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti dati è costante, ad ogni ellisse di tale famiglia possiamo associare un



valore che è la somma delle distanze dai punti  $A$  e  $B$ . Non rimane che trovare l'ellisse che tocca la retta e tale che le sia associato il valore più piccolo. Ebbene, questo valore minimo corrisponde all'ellisse  $\alpha$  tangente in  $C$  alla retta.

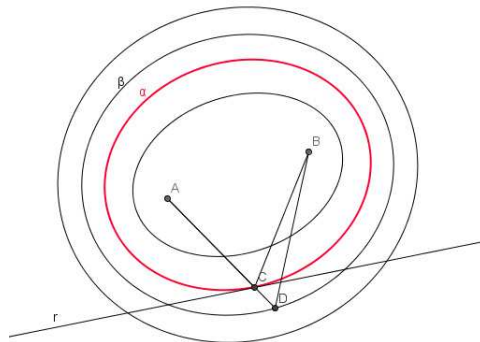


Figura 2.5: Soluzione analitica Problema di Erone

Infatti, se consideriamo un'altra ellisse  $\beta$  che interseca la retta in due punti e se  $D$  è l'intersezione di  $\beta$  con il prolungamento di  $AC$ , dalla **Disuguaglianza triangolare** applicata al triangolo  $BCD$ , risulta

$$BD+DC > BC \Rightarrow BD+DC+CA > BC+CA \Rightarrow BD+DA > BC+CA$$

In definitiva:

**Il punto che rende minima la somma delle distanze da due punti dati  $A$  e  $B$ , giacenti nello stesso semipiano originato da una retta  $r$ , è il punto  $C$  di tangenza fra la retta  $r$  e la famiglia di ellissi che ha come fuochi  $A$  e  $B$ .**

Ricordando quello che abbiamo ottenuto nella prima parte, tale punto è l'intersezione di  $AB'$  con la retta  $r$ , dove  $B'$  è il simmetrico di  $B$  rispetto a  $r$ . Ne segue una particolare proprietà tangenziale dell'ellisse, ovvero che:

**Il punto di tangenza fra un'ellisse  $\alpha$  e una retta  $r$ , il fuoco  $A$  e il simmetrico  $B'$  del fuoco  $B$  rispetto alla retta  $r$  sono allineati.**

Anche la proprietà ottica dell'ellisse è una immediata conseguenza di questo risultato, e cioè che:

**La perpendicolare ad una retta tangente ad un'ellisse di fuochi  $A$  e  $B$  nel punto  $C$  di contatto è la bisettrice dell'angolo  $\angle ACB$ .**

È per questo che gli anfiteatri romani sono di forma ellittica: tutte le onde sonore provenienti da  $A$  sono riflesse dalla superficie ellittica e, per quanto dimostrato, passano tutte per  $B$  e, perciò, tutto accade come se la sorgente sonora stesse contemporaneamente in  $A$  e  $B$ . Ecco come i romani avevano risolto il problema acustico.

Con l'ausilio del **Problema di Erone** si possono risolvere molti problemi, alcuni dei quali proponiamo qui di seguito.

**Problema 2.3.** *Determinare, fra tutti i triangoli aventi area assegnata  $S$  e un lato assegnato  $AB$ , quello per cui è minima la somma  $BC + AC$ .*

*Soluzione.* Se sono assegnati l'area  $S$  e un lato  $AB$ , è determinata anche l'altezza relativa a tale lato. Perciò tutti i punti  $C$  di un siffatto triangolo possono giacere su due rette parallele alla retta  $r$ , su cui giace il lato  $AB$ , e distanti da essa un segmento congruente all'altezza relativa ad  $AB$ . Per ragioni di simmetria possiamo lavorare su una sola di queste due, diciamo  $s$ , come mostra la figura 2.6 nella pagina seguente.

Il problema è diventato quello di trovare su tale retta il punto  $C$  che rende minima la somma  $BC + AC$ . Secondo il **Problema di Erone**, tale punto è l'intersezione fra  $AB'$  e  $s$ , dove  $B'$  è il simmetrico di  $B$  rispetto a  $s$ .

Ma, essendo  $s \parallel AB$ ,  $C$  è il punto medio di  $AB'$  e, dunque, risulta  $AC = B'C = BC$ . Quindi:

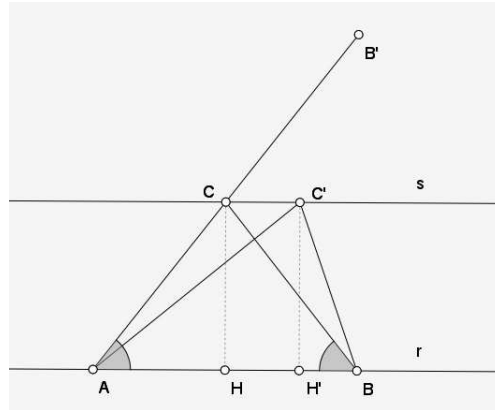


Figura 2.6: Problema 2.3

Fra i triangoli in cui è assegnata l'area, quello che rende minima la somma dei lati non fissi è il triangolo isoscele. Essendo, poi, il lato  $AB$  fissato, il triangolo isoscele è anche quello di perimetro minimo.

Del precedente vale anche la proprietà duale.

**Problema 2.4.** *Fra tutti i triangoli che hanno assegnati un lato  $AB$  e la somma  $BC + AC$  degli altri due, quello di area massima è il triangolo isoscele.*

*Soluzione.* Fissato un lato  $AB$ , i punti che soddisfano la condizione del problema, ovvero  $BC + AC$  costante, giacciono su un'ellisse di fuochi  $A$  e  $B$ . Il problema è, dunque, quello di cercare su tale ellisse un punto  $C$  che abbia distanza massima dalla retta  $r$  su cui giacciono i due fuochi. In tal modo, infatti, l'altezza relativa al lato  $AB$ , che è costante, è massima e, quindi, anche l'area.

Con riferimento alla figura 2.7, i punti che realizzano questa condizione sono due e sono ovviamente quelli in cui le rette  $s$  e  $t$ , parallele ad  $r$ , tangono l'ellisse ( $C$  e  $C'$ ). Infatti, nel momento in cui un'altra retta  $q$  parallela a  $s$  e  $t$  intercetta la retta  $p$  in un punto  $E$  ( $p$  è la perpendicolare ad  $r$  in  $F$ , punto medio di  $AB$ ), la sua distanza da  $r$  risulterebbe minore (in figura  $FE < FC' = FC$ ).

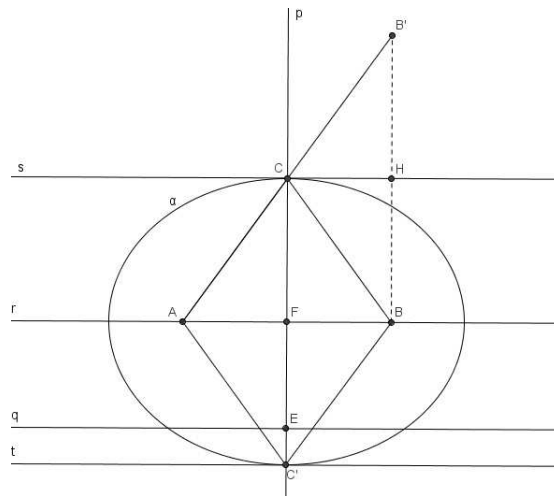


Figura 2.7: Problema 2.4

Poiché l'ellisse è simmetrica rispetto alla retta  $r$ , i due triangoli  $ABC$  e  $ABC'$  sono congruenti. Ne consideriamo uno solo e vogliamo dimostrare che questo triangolo è isoscele. Applicando la proprietà tangenziale dell'ellisse esposta nella **Soluzione analitica** del **Problema di Erone**,  $A$ ,  $C$ , e  $B'$ , simmetrico di  $B$  rispetto a  $s$ , sono allineati. Ma, detta  $H$  l'intersezione di  $BB'$  con  $s$ , poiché  $BH = HB'$ , risulta anche, per il teorema di Talete, che  $AC = B'C$ . Inoltre, essendo  $B'C = BC$ , si ha l'uguaglianza  $AC = B'C = BC$ .

Dunque, il triangolo  $ABC$  che risolve il problema è isoscele e concludiamo che:

In un triangolo con un lato  $AB$  e la somma  $BC + AC$  assegnati, quello isoscele ha area massima.

**Problema 2.5.** Sia  $ABCD$  un rettangolo e  $P$  un punto sul lato  $AB$ . Trovare la spezzata chiusa più breve, con punto iniziale e finale in  $P$ , che tocca tutti e quattro i lati del rettangolo.

*Soluzione.* Se fissiamo, oltre a  $P$ , un punto  $Q$  su  $CD$ , il percorso minimo che collega  $P$  al lato  $AD$ , poi a  $Q$ , poi al lato  $BC$  e poi ritorna in  $P$  è semplice da trovare. Basta applicare il **Problema di Erone** prima per rendere minimo il cammino da  $P$  a  $Q$  passando per il lato  $AD$  e poi per rendere minimo il cammino da  $Q$  a  $P$  passando per il lato  $BC$ . Riferendoci alla figura 2.8, tale cammino è  $PSQR$ . Il problema diventa ora cercare il punto  $Q'$  tale che l'intero cammino sia il più breve possibile.

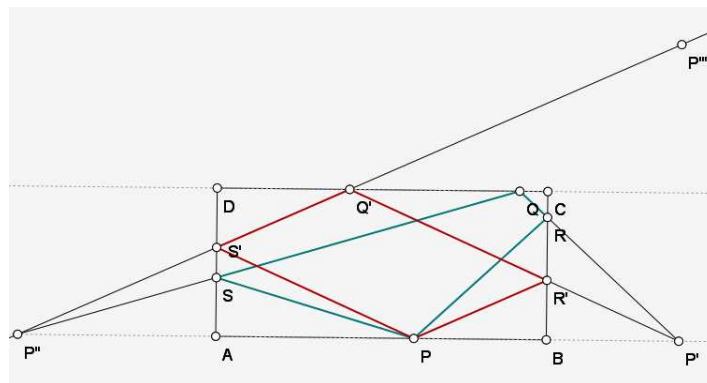


Figura 2.8: Problema 2.5

Notiamo che il cammino  $PSQR$  è congruente alla somma  $P''Q + P'Q$  poiché si ha, per simmetria, che  $P''S = PS$  e  $P'R = PR$ , essendo  $P''$  il simmetrico di  $P$  rispetto a  $AD$  e  $P'$  il simmetrico di  $P$  rispetto a  $BC$ .

Dunque, non rimane che rendere minima tale somma. Ma, ancora una volta, per il **Problema di Erone**, tale valore è minimo, se prendiamo  $Q'$  come intersezione di  $P''P'''$  con la retta del lato  $DC$ , dove  $P'''$  è il simmetrico di  $P'$  rispetto alla retta del lato  $CD$ . In figura tale percorso è  $PS'Q'R'$ .

**Problema 2.6.** *Un fiume separa due persone. La prima persona vuole raggiungere la seconda compiendo il tragitto più breve e toccando prima la riva del fiume più vicina a sé, poi percorrendolo perpendicolarmente alle sue rive e poi raggiungendo la seconda persona. Qual è tale percorso?*

*Soluzione.* La prima cosa da fare è riscrivere il problema utilizzando gli enti geometrici. Perciò, come mostrato in figura 2.9, schematizziamo il fiume con due rette parallele  $r$  e  $s$  (che rappresentano le rive) e le persone con due punti  $X$  e  $Y$  che giacciono da parti diverse rispetto alla striscia compresa fra le due rette. Il problema, a questo punto, richiede di trovare due punti  $A$  e  $B$ , appartenenti rispettivamente a  $r$  e  $s$ , tali che  $AB$  sia perpendicolare a  $r$  e  $s$  e sia minima la somma  $XA + AB + BY$ .

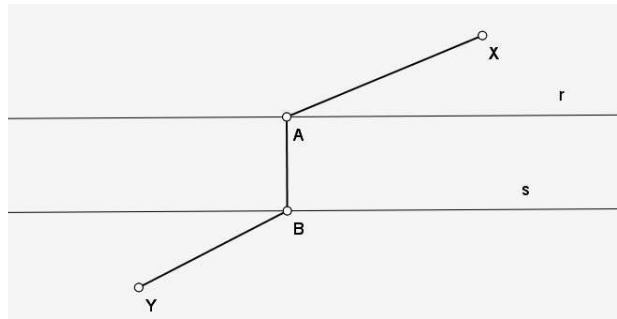


Figura 2.9: Problema 2.6

Si nota subito che  $AB$  è costante, perché è la distanza fra due rette parallele; dunque rimane da minimizzare  $XA + BY$ .

Con riferimento alla figura 2.10, consideriamo la perpendicolare  $t$  alle due rette  $r$  e  $s$  passante per  $Y$ . Prendiamo su questa retta un punto  $C$  tale che  $CY = AB$ . Allora, qualunque sia la scelta dei punti  $A$  e  $B$  sulle due rette  $r$  e  $s$ , il quadrilatero  $ACYB$  è sempre un parallelogrammo poiché  $CY \parallel AB$  e  $CY = AB$  per costruzione. Perciò  $AC = BY$ .

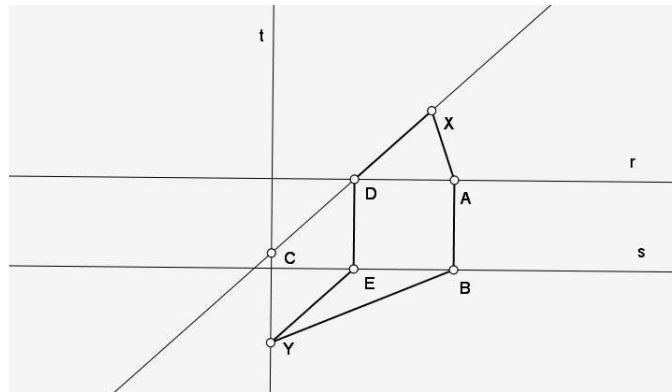


Figura 2.10: Problema 2.6

Poiché il nostro obiettivo è quello di minimizzare  $XA + BY$ , avendo dimostrato che  $AC = BY$ , non resta che minimizzare  $XA + AC$ . Questo è semplice. Infatti, per il **Problema di Erone**, il punto  $A$  che minimizza  $XA + AC$  è il punto d'intersezione della retta passante per i punti  $X$  e  $C$  con la retta  $r$ , che chiamiamo  $D$ . Sia  $E$  la proiezione di  $D$  su  $s$ . Per quanto dimostrato, i punti che cercavamo, ovvero quelli in cui la persona  $X$  deve toccare le due rive del fiume, sono  $D$  e  $E$ .

Un problema molto famoso, applicazione del **Problema di Erone**, è il **Problema di Fagnano**.

**Problema 2.7.** *Inscrivere in un triangolo acutangolo  $ABC$  un altro triangolo  $DEF$  che abbia perimetro minimo.*

*Soluzione.* Considerando la figura 2.11 nella pagina successiva, supponiamo che il triangolo  $DEF$  sia quello che realizza la condizione di minimo.

Allora  $FD + DE$  deve realizzare il minimo possibile al variare di  $D$  sul lato  $BC$ . Ciò, tuttavia, in accordo con una delle osservazioni fatte nel **Problema di Erone**, avviene se l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione. Dunque  $\angle FDB = \angle EDC = \alpha$ . Con considerazioni analoghe, ripetute sulle altre due coppie di lati, si perviene alle due uguaglianze  $\angle DEC = \angle FEA = \beta$  e  $\angle EFA = \angle DFB = \gamma$ .

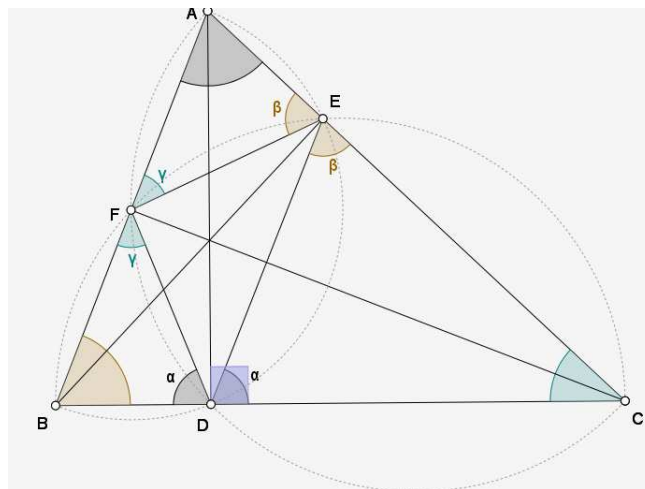


Figura 2.11: Problema di Fagnano

È semplice notare che  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Infatti

$$\begin{aligned}
 2(\alpha + \beta + \gamma) &= \\
 &= \angle FDB + \angle EDC + \angle DEC + \angle FEA + \angle EFA + \angle DFB = \\
 &= (\angle BDC - \angle FDE) + (\angle CEA - \angle DEF) + (\angle AFB - \angle EFD) = \\
 &= (\angle BDC + \angle CEA + \angle AFB) - (\angle FDE + \angle DEF + \angle EFD) = \\
 &= 3\pi - \pi = 2\pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi
 \end{aligned}$$

Nei triangoli  $AFE$ ,  $BDF$  e  $CED$  si ha, rispettivamente,

$$\begin{aligned}
 \angle FAE &= \angle CAB = \pi - \angle FEA - \angle EFA = \pi - \beta - \gamma = \alpha \\
 \angle DBF &= \angle ABC = \pi - \angle DFB - \angle FDB = \pi - \gamma - \alpha = \beta \\
 \angle ECD &= \angle ACB = \pi - \angle EDC - \angle DEC = \pi - \alpha - \beta = \gamma
 \end{aligned}$$



Tracciamo i segmenti  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$ . Dalle considerazioni fatte si deduce che, avendo gli angoli opposti supplementari, i quadrilateri  $AFDC$ ,  $BDEA$  e  $CEFB$  sono ciclici. Pertanto  $\angle ADC = \angle AFC$  perché tutti e due gli angoli insistono sull'arco  $AC$  della circonferenza circoscritta al quadrilatero  $AFDC$ . Inoltre, per la stessa ragione, si può scrivere che  $\angle BFC = \angle BEC$  nel quadrilatero  $CEFB$  e  $\angle AEB = \angle ADB$  nel quadrilatero  $BDEA$ . A questo punto, concatenando le precedenti uguaglianze, abbiamo

$$\angle ADC = \angle AFC = \pi - \angle BFC = \pi - \angle BEC = \angle AEB = \angle ADB$$

Abbiamo ricavato che  $\angle ADC = \angle ADB$ ; ma, essendo

$$\angle ADC + \angle ADB = \pi$$

vuol dire che  $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$  e, dunque,  $AD$  è un'altezza. Analogamente si dimostra che  $BE$  e  $CF$  sono altezze. Per questo il triangolo  $FDE$  viene detto "ortico".

Per completare la dimostrazione bisogna contemplare un ultimo caso che non rientra nelle ipotesi del **Problema di Erone**, ossia quando due vertici del triangolo inscritto coincidono con un vertice del triangolo. In tal caso un generico triangolo inscritto degenera in un segmento che ha come estremi il vertice del triangolo  $ABC$  in cui i due vertici del triangolo inscritto coincidono e un punto qualsiasi sul lato opposto. Il "perimetro" di questo triangolo diventa il doppio del segmento stesso (riuscite a vedere... *doppio*, che, in questo caso, paradossalmente, è sintomo di lucidità mentale?). Fra tutti questi "triangoli degeneri", quello di "perimetro" minimo è l'altezza per il **Problema 2.1**. Bisogna, dunque, dimostrare che il perimetro del triangolo ortico è minore del doppio della lunghezza delle altezze. Avremo così dimostrato che il triangolo ortico verifica la condizione di minimo assoluto.

Proponiamo la dimostrazione con l'altezza  $CF$ . Per le altre la dimostrazione è del tutto analoga.

Tracciamo da  $C$  le perpendicolari  $CH_1$ ,  $CH_2$  e  $CH_3$  ai lati  $FE$ ,  $ED$  e  $DF$ , come mostra la figura 2.12 nella pagina seguente. Dall'uguaglianza di  $CDH_3$  e  $CDH_2$ , congruenti poiché triangoli rettangoli con ipotenusa in comune e con  $\angle H_3DC = \angle FDB = \angle H_2DC$ , risulta  $DH_3 = DH_2$ . Con motivazioni analoghe, dalla congruenza di  $CEH_2$  e  $CEH_1$ , risulta

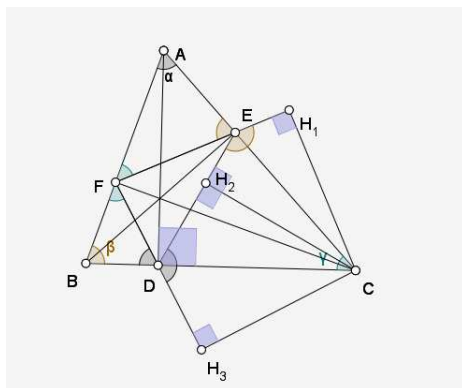


Figura 2.12: Problema di Fagnano

$EH_2 = EH_1$ . Dunque

$$\begin{aligned} 2p_{DEF} &= FE + EH_2 + H_2D + DF = FE + EH_1 + DH_3 + DF \\ &= FH_1 + FH_3 < CF + CF = 2CF \end{aligned}$$

Infatti sia  $FH_1$  che  $FH_3$ , essendo distanze, sono minori di  $FC$  per il **Problema 2.1**.

Si può, dunque, concludere che... *l'ortico è un triangolo... conveniente!*  
Infatti:

**Il triangolo di perimetro minimo, inscritto in un triangolo acutangolo, è quello "ortico".**

Calcoliamo il perimetro del triangolo ortico.

Con riferimento alla figura 2.12, i triangoli rettangoli  $CH_1F$  e  $CFH_3$  sono congruenti, avendo  $CF$  in comune e gli angoli  $\angle H_3FC = \angle CFH_1$ , poiché complementari dei due angoli  $\angle BFD$  e  $\angle AFE$  fra loro congruenti. Segue, allora, che  $FH_3 = FH_1$ . Ma, per quanto detto prima,

$$FH_3 + FH_1 = 2p_{DEF} \Rightarrow 2p_{DEF} = 2FH_3$$

Nel triangolo  $FH_3C$ , ricordando che l'angolo  $\angle BFD = \gamma$ , si ha che

$$\begin{aligned} FH_3 &= FC \cos \angle H_3FC = FC \cos \left( \frac{\pi}{2} - \angle BFD \right) = \\ &= FC \cos \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) = FC \sin \gamma \end{aligned}$$

Nel triangolo  $FBC$  si ha  $FC = BC \sin \beta$ . Inoltre, per il teorema dei seni applicato al triangolo  $ABC$ ,  $BC = 2R \sin \alpha$ . Dunque

$$FH_3 = FC \sin \gamma = BC \sin \beta \sin \gamma = 2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

e infine

$$2p_{DEF} = 2FH_3 = 4R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

*N.B: Abbiamo risolto il problema "supponendo" l'esistenza di un triangolo inscritto che soddisfi la condizione di minimo. Tale affermazione è, comunque, piuttosto ovvia, ma per essere dimostrata necessita di strumenti che vanno aldilà delle finalità di questo manuale. Esiste anche una dimostrazione senza questa considerazione preliminare. In ogni modo nella soluzione da noi proposta sono presenti tracce di quella strategica dimostrazione. Ai più intellettualmente curiosi la facoltà di trovarla.*

Un altro problema intimamente legato al **Problema di Erone** è il seguente

**Problema 2.8.** *Sia  $r$  una retta ed  $A$  e  $B$  due punti nel piano non appartenenti ad  $r$ . Trovare il punto  $C \in r$  che massimizza il modulo della differenza  $|AC - BC|$  distinguendo due casi:*

- *$A$  e  $B$  stanno da parti diverse rispetto a  $r$ ;*
- *$A$  e  $B$  giacciono dalla stessa parte rispetto a  $r$ .*

*Soluzione sintetica.* Partiamo dal caso in cui  $A$  e  $B$  giacciono dalla stessa parte rispetto a  $r$ . Deve essere  $A \neq B$ , altrimenti si avrebbe

$$|AC - BC| = 0 \quad \forall C \in r$$

Con riferimento alla figura 2.13 nella pagina seguente, supponiamo che la retta che passa per i due punti  $A$  e  $B$ , che chiameremo  $s$ , non sia parallela

alla retta  $r$  (in questo caso non esiste un valore massimo, ma la differenza tende a un determinato limite). Chiamiamo  $C$  l'intersezione della retta  $s$  con la retta  $r$ . Vogliamo dimostrare che il punto cercato è proprio  $C$ .

A tal fine consideriamo un punto qualsiasi  $D \in r$  tale che sia  $D \neq C$ . Allora, per la **Disuguaglianza triangolare** applicata al triangolo  $ADB$ , risulta che

$$|AD - DB| < AB \Rightarrow |AD - DB| < |AC - BC|$$

Dunque, qualunque altro punto  $D$  scegliamo su  $r$ , il modulo della differenza  $|AD - DB|$  risulta sempre minore del modulo della differenza  $|AC - BC|$  che, pertanto, risulta massimo.

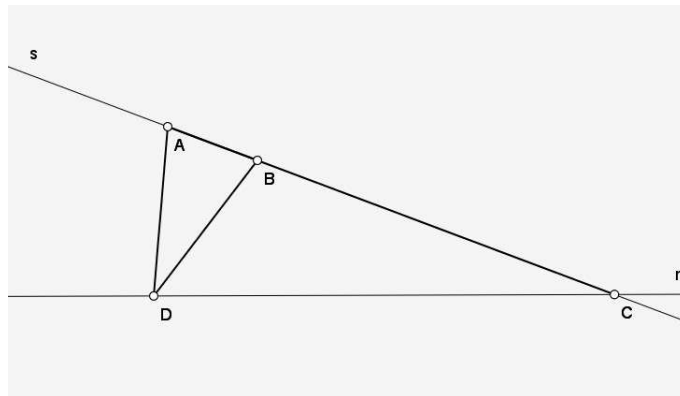


Figura 2.13: Problema 2.8

La seconda parte del problema è simile alla prima. Con riferimento alla figura 2.14 nella pagina successiva, consideriamo  $B'$  simmetrico di  $B$  rispetto alla retta  $r$ . Per le stesse ragioni di prima deve essere  $B' \neq A$ , altrimenti non si avrebbe massimo. Supponiamo che la retta passante per  $A$  e  $B'$ , che chiameremo  $s$ , non sia parallela alla retta  $r$  (anche in questo caso, come prima, non si ha il massimo). Chiamiamo  $C$  l'intersezione della retta  $s$  e della retta  $r$ . Vogliamo dimostrare che il punto  $C$  è quello che cerchiamo.

Come prima, consideriamo un punto qualsiasi  $D \in r$  tale che sia  $D \neq C$ . Allora, per la **Disuguaglianza triangolare** applicata al triangolo  $ADB'$ ,

risulta

$$\begin{aligned} |AD - DB'| < AB' &\Rightarrow |AD - DB'| < |AC - CB'| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |AD - DB| < |AC - CB| \end{aligned}$$

Infatti

$$DB' = DB \wedge CB' = CB$$

perché i triangoli  $B'DB$  e  $B'BC$  sono isosceli.

Dunque, qualunque altro punto  $D$  scegliamo su  $r$ , il modulo della differenza  $|AD - DB|$  risulta minore del modulo della differenza  $|AC - CB|$  che, pertanto, risulta massimo.

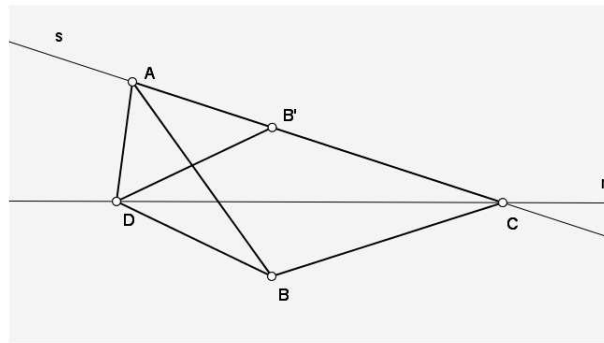


Figura 2.14: Problema 2.8

Concludiamo, allora, che:

**Dati due punti  $A$  e  $B$  e una retta  $r$ , il punto  $C$  che rende massimo il modulo  $|AC - BC|$  è l'intersezione della retta  $s$  per  $A$  e  $B$  con  $r$ , se  $A$  e  $B$  giacciono nello stesso semipiano originato da  $r$ . Se così non è, allora il punto cercato è l'intersezione della retta per  $A$  e  $B'$  con  $r$ , essendo  $B'$  il simmetrico di  $B$  rispetto a  $r$ .**

*Soluzione analitica.* Utilizzando un metodo simile a quello usato nel **Problema di Erone**, il problema, nel caso in cui i due punti giacciono da parti opposte rispetto alla retta  $r$ , può essere affrontato diversamente. Si può dimostrare che il punto  $C$  del problema è il punto di tangenza della famiglia di iperboli di fuochi  $A$  e  $B$  con la retta  $r$ . L'iperbole, infatti, è il luogo geometrico dei punti del piano il cui modulo della differenza delle distanze da due punti dati è costante. È possibile, allora, associare ad ogni iperbole di tale famiglia un valore costante pari al modulo della differenza delle distanze dai due fuochi. Bisogna, dunque, trovare l'iperbole che tocchi la retta e tale che le sia associato un valore, il più grande possibile. Vogliamo dimostrare che quest'iperbole è tangente alla retta  $r$ .

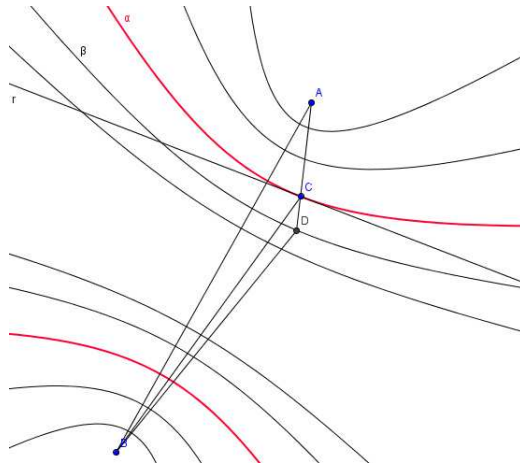


Figura 2.15: Soluzione analitica Problema 2.8

Riferendoci alla figura 2.15, consideriamo l'iperbole  $\alpha$ , di fuochi  $A$  e  $B$ , tangente in  $C$  alla retta  $r$ . Consideriamo un'altra iperbole  $\beta$  che interseca la retta in due punti e sia  $D$  l'intersezione di  $\beta$  con il prolungamento di  $AC$ . Chiaramente a quest'iperbole del fascio, siccome i suoi due rami si avvicinano, sarà associata una somma minore, facilmente verificabile per via analitica. Basta scegliere un opportuno sistema di riferimento ortogonale in cui un asse sia la retta focale.

Dunque, come anticipato (*a volte ci meravigliamo noi stessi di queste facoltà paragnostiche che ci fanno prevedere il... futuro*):

**Il punto che rende massimo il modulo della differenza delle distanze da due punti dati  $A$  e  $B$ , giacenti nei semipiani opposti originati da una retta  $r$ , è il punto  $C$  di tangenza fra la retta  $r$  e la famiglia di iperboli che ha come fuochi  $A$  e  $B$ .**

Tuttavia, per quanto dimostrato nella prima soluzione, tale punto è l'intersezione di  $AB'$  con la retta  $r$ , dove  $B'$  è il simmetrico di  $B$  rispetto a  $r$ . Ne segue una particolare proprietà tangenziale dell'iperbole, ovvero:

**Il punto di tangenza fra un'iperbole  $\alpha$  e una retta  $r$ , il fuoco  $A$  e il simmetrico  $B'$  del fuoco  $B$  rispetto alla retta  $r$  sono allineati.**

**Problema 2.9.** *Sia  $r$  una retta e siano  $A$  e  $B$  due punti che appartengono entrambi ad uno dei due semipiani che hanno come origine la retta. Trovare il punto  $D \in r$  tale che l'angolo  $\angle ADB$  sia massimo.*

*Soluzione.* Sia  $s$  la retta passante per  $A$  e  $B$ . Per la soluzione del problema bisogna distinguere due casi:

- **Caso 1:**  $s$  interseca  $r$  in un punto  $C$ ; in questo caso la retta  $r$  rimane divisa dal punto  $C$  in due semirette  $r_1$  e  $r_2$ , come mostrato nella figura 2.16 nella pagina successiva.

Esistono due circonferenze  $\alpha$  e  $\gamma$  passanti per  $A$  e  $B$  e tangenti alla retta  $r$  (lo mostreremo successivamente). Le circonferenze  $\alpha$  e  $\gamma$  incontreranno la retta  $r$  rispettivamente in un punto  $D_2$  sulla semiretta  $r_2$  e in un punto  $D_1$  sulla semiretta  $r_1$ .

A questo punto vogliamo dimostrare che sulla semiretta  $r_1$  il punto che rende massimo l'angolo è proprio  $D_1$ . A tal fine consideriamo un punto  $E \in r_1$  diverso da  $D_1$ . Sia  $\beta$  la circonferenza passante per

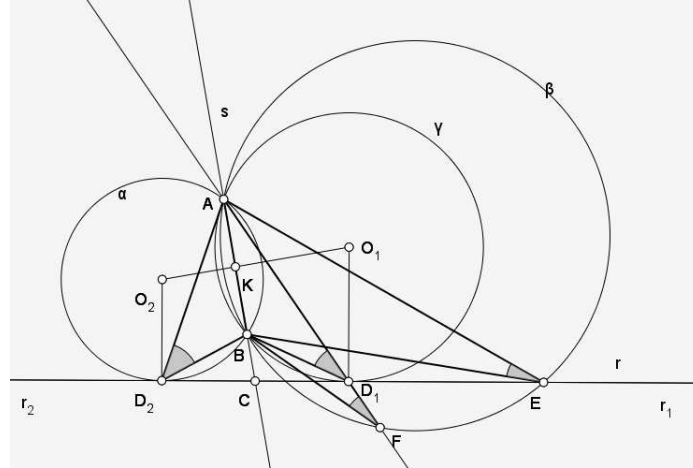


Figura 2.16: Problema 2.9

$A, B$  e  $E$ . Sia inoltre  $F$  il punto d'intersezione di  $AD_1$  con  $\beta$ . Vale  $\angle AFB = \angle AEB$  poiché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Inoltre  $\angle AFB < \angle AD_1B$  per il **Teorema dell'angolo esterno**. Da ciò segue che  $\angle AEB < \angle AD_1B$  qualunque sia la scelta di  $E \in r_1$ . Dunque, l'angolo  $\angle AD_1B$  è l'angolo massimo se  $D_1 \in r_1$ . Analogamente si mostra che  $\angle AD_2B$  è l'angolo massimo se  $D_2 \in r_2$ . Ora bisogna capire quale fra i due angoli  $\angle AD_1B$  e  $\angle AD_2B$  è effettivamente quello maggiore. Bisogna distinguere due sottocasi:

- **Sottocaso 1: La retta  $s$  forma con  $r$  angoli diversi da  $\frac{\pi}{2}$ ;** in questo caso uno fra  $\angle BCD_1$  e  $\angle BCD_2$  sarà ottuso. Supponiamo, senza perdita di generalità, che sia  $\angle BCD_1$ .

Dimostriamo ora che la circonferenza passante per  $A, B$  e  $D_1$ , ovvero  $\gamma$ , ha raggio maggiore del raggio della circonferenza passante per  $A, B$  e  $D_2$ , ovvero  $\alpha$ . A tal fine congiungiamo  $O_1$ , centro di  $\gamma$ , e  $O_2$ , centro di  $\alpha$ , e congiungiamo i due centri con i punti di tangenza. Essendo  $AB$  asse radicale, risulta  $AB \perp O_2O_1$ . Da ciò segue che, detto  $K$  il punto d'intersezione di  $AB$  con  $O_1O_2$ , vale  $\angle KO_1D_1 = \pi - \angle BCD_1$ , ed essendo  $\angle BCD_1$  ottuso,  $\angle KO_1D_1$  è acuto. Inoltre  $O_2O_1D_1D_2$  è un trapezio rettangolo; dunque, il lato compreso fra l'angolo retto e



l'angolo acuto è la base maggiore. Da ciò segue che  $O_1D_1$  è la base maggiore del trapezio rettangolo e, quindi,  $O_1D_1 > O_2D_2$ , che è quanto volevamo dimostrare.

A questo punto gli angoli  $\angle AD_1B$  e  $\angle AD_2B$  insistono su due corde uguali di circonferenze diverse. *In particolare, nella circonferenza di raggio maggiore insisterà l'angolo minore*, pertanto si ha la disuguaglianza  $\angle AD_1B < \angle AD_2B$ .

Perciò, se  $\angle BCD_1$  è ottuso,  $\angle AD_2B$  è l'angolo cercato. Viceversa, con passaggi analoghi, se  $\angle BCD_2$  è ottuso,  $\angle AD_1B$  è l'angolo cercato.

*N.B: Il teorema evidenziato in corsivo e usato in precedenza è certamente valido per angoli acuti. E per angoli non così... intelligenti (ottusi) o non entrambi... perspicaci, è ancora vero? A voi, gente di mare, la piacevole soddisfazione della ricerca.*

Per costruire effettivamente queste due circonferenze ci serviamo del **I teorema di Euclide**.

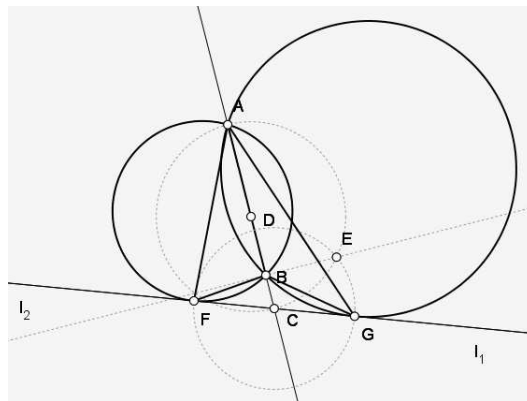


Figura 2.17: Costruzione delle due circonferenze

Nella figura 2.17, per il teorema della tangente e della secante applicato due volte, si ha  $CF^2 = CB \cdot CA = CG^2$ . Allora  $CF = CG$  ed entrambi sono medi proporzionali fra  $CB$  e  $CA$ . Per costruire il medio proporzionale, tracciamo la circonferenza di diametro  $AC$  e sia  $E$  l'intersezione fra tale circonferenza e la perpendicolare ad  $AC$  passante per  $B$ . Per il **I Teorema di Eu-**

**clide** applicato al triangolo rettangolo  $AEC$ , risulta l'uguaglianza  $EC^2 = CB \cdot CA$ . Dunque,  $EC$  è medio proporzionale fra  $CB$  e  $CA$ . Tracciando la circonferenza di centro  $C$  e raggio  $CE$ , le intersezioni di tale circonferenza con  $r$  sono proprio i punti di tangenza, perché

$$CF = CG = CE = \sqrt{CB \cdot CA}$$

ed è, quindi, verificato il teorema della tangente e della secante. Avete visto in quanti modi abbiamo preso... *in giro AB?* Per fortuna non è un elemento... *permaloso!*

- **Sottocaso 2: La retta  $s$  forma con  $r$  angoli uguali a  $\frac{\pi}{2}$ ;** in questo caso i triangoli  $BCD_2$  e  $BCD_1$  sono congruenti, poiché entrambi triangoli rettangoli con i cateti congruenti. Analogamente  $ACD_2$  e  $ACD_1$ . Da ciò deriva direttamente l'uguaglianza

$$\angle AD_2C - \angle BD_2C = \angle AD_1C - \angle BD_1C \Rightarrow \angle AD_2B = \angle AD_1B$$

Perciò, in questo caso, entrambi gli angoli rappresentano il valore massimo.

Questo caso particolare è conosciuto come **Problema di Reiomontano**. A Johann Müller, conosciuto con il nome di Reiomontano, è, infatti, dovuta la traduzione di alcune opere scritte dai matematici greci e anche questo problema, che è il primo del genere che compare nella letteratura matematica dopo Apollonio.

- **Caso 2:  $s$  parallela ad  $r$ ;** in questo caso, riferendoci alla figura 2.18 nella pagina successiva, consideriamo la circonferenza  $\alpha$  che passa per  $A$ , per  $B$  e per il punto  $C$  d'intersezione dell'asse di  $AB$  con la retta  $r$ . Su tale asse giace il centro  $O$  della circonferenza  $\alpha$  che, pertanto, risulta tangente alla retta  $r$  poiché  $OC \perp r$ .

Il punto  $C$  divide la retta in due semirette  $r_1$  ed  $r_2$ . Sia  $D_1$  un punto di  $r_1$  e consideriamo la circonferenza  $\beta$  passante per  $A$ ,  $B$  e  $D_1$ . Sia  $E$  l'intersezione tra  $AC$  e  $\beta$ . Per il **Teorema dell'angolo esterno** si ha  $\angle ACB > \angle AEB$ . Ma  $\angle AEB = \angle AD_1B$  poiché insistono sullo stesso arco di  $\beta$ . Dunque  $\angle ACB > \angle AD_1B$  qualunque sia  $D_1 \in r_1$ . Allora  $\angle ACB$  è maggiore di qualunque altro angolo  $\angle AD_1B$  con  $D_1 \in r_1$ . Identico il ragionamento con  $D_2 \in r_2$ . Si conclude

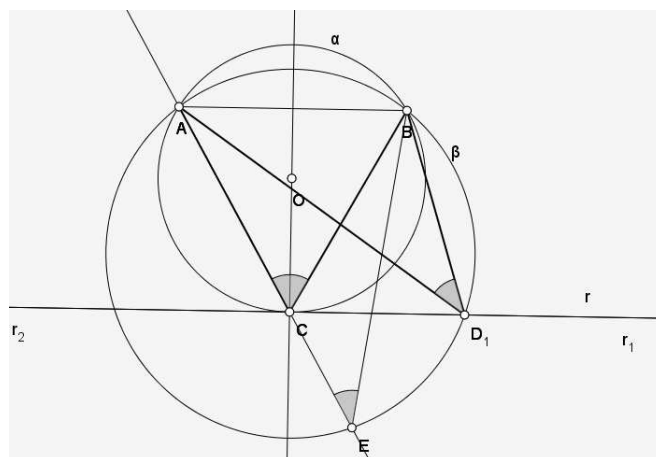


Figura 2.18: Caso 2 Problema 2.9

che  $\angle ACB$  è l'unico angolo per il quale si verifica la condizione di massimo.

Consideriamo ora un'applicazione di quest'ultimo risultato:

**Problema 2.10.** *Un quadro alto 160cm è appeso ad una parete verticale di un muro, a 250cm dal suolo. A che distanza deve porsi un osservatore con una macchina fotografica in modo da vederlo, in altezza, sotto un angolo di ampiezza massima?*

*Soluzione.* Considerando la figura 2.19 nella pagina seguente, chiamiamo  $H$  il punto in cui la parete incontra il pavimento,  $A$  e  $B$  i due vertici che schematizzano il quadro e  $O$  la posizione dell'osservatore. Si tratta, per il **Problema di Regiomontano**, di trovare la distanza  $OH = x$  in figura, dove la circonferenza circoscritta al triangolo  $AOB$  è tangente alla retta  $OH$ . Per il teorema della tangente e della secante,  $OH$  è medio proporzionale fra  $AH$  e  $HB$ , ossia

$$OH^2 = AH \cdot HB \Rightarrow x^2 = 250 \cdot (250 - 160)cm^2 \Rightarrow x = 150cm$$

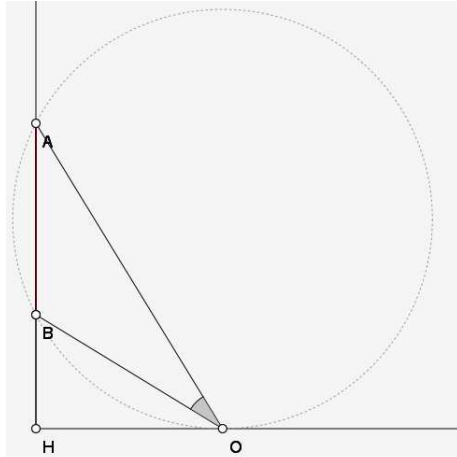


Figura 2.19: Problema 2.10

Al termine di questo capitolo, in gran parte occupato da proprietà della luce, sembra opportuno discutere questo problema.

**Problema 2.11.** Una sorgente luminosa puntiforme  $B$  è posta sulla perpendicolare al piano di un cerchio di raggio  $r$ , condotta per il suo centro  $O$ . L'intensità d'illuminazione di uno schermo puntiforme  $A$ , posto sulla circonferenza e giacente sul piano di questa, è direttamente proporzionale a  $\sin \angle BAO$  ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza di  $A$  da  $B$ . A quale distanza da  $O$  deve essere posta  $B$  affinché l'intensità d'illuminazione di  $A$  sia massima?

*Soluzione.* Come mostrato nella figura 2.20 nella pagina successiva, sia  $A$  un punto qualsiasi della circonferenza e  $O$  il suo centro. Chiamiamo  $\angle BAO = \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ),  $OA = r$  e  $AB = x$ .

Per quanto supposto, detta  $I$  l'intensità luminosa in  $A$ , risulta che

$$I = k \frac{\sin \alpha}{x^2}$$

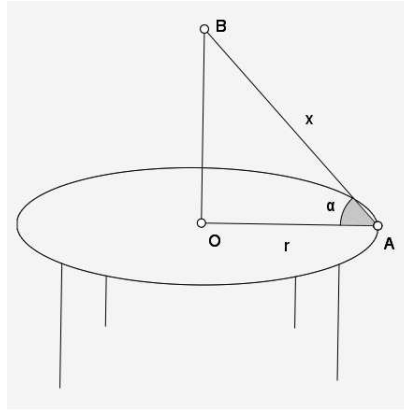


Figura 2.20: Problema 2.11

dove  $k$  è una costante di proporzionalità diretta. Ma  $x = \frac{r}{\cos \alpha}$  e, quindi,

$$I = \frac{k}{r^2} \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

Pertanto, volendo rendere massima tale quantità, basta rendere massima  $\sin \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \alpha$ , caso particolare, questo, del **Problema 1.3.5**. Essendo, infatti,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , la quantità  $(\sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \alpha$  raggiunge il valore massimo, quando

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\frac{1}{2}} = \cos^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

Per le limitazioni poste su  $\alpha$ ,  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . In tal caso l'altezza vale

$$OB = OA \tan \alpha = r \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

e, in corrispondenza di questo valore, si ha l'intensità massima d'illuminazione.

Adesso sì che è tutto... *chiaro!*

## Capitolo 3

# Avanti tutta!

*"Il matematico è un poeta e la matematica è il suo sogno."*

Georges Papy

Avanti tutta, allora, più veloce della luce! Se con la legge di riflessione della luce riusciamo anche noi a trovare percorsi minimi, con il pensiero possiamo addirittura superare la sua velocità. Il pensiero è più veloce della luce. Con la mente, infatti, possiamo viaggiare in spazi a più dimensioni; con la fantasia non impieghiamo anni luce per coprire distanze siderali ma, istantaneamente, ci troviamo dove vogliamo. La mente è l'unica macchina del tempo, capace, cioè, di rivivere situazioni lontane e, nello stesso tempo, proiettarsi nel futuro con le ali dei sogni e dei progetti. Siamo convinti che il pensiero ha una potenza infinita, ma noi, costituzionalmente pigri, preferiamo tenerlo in rimessa, come si parcheggia una macchina di grossa cilindrata e di grande valore per paura che possa danneggiarsi. Dovremmo, invece, trovare occasioni per permettergli di esprimere al massimo le sue potenzialità e la sua energia, cercare piste nelle quali far ruggire a pieno regime il suo meraviglioso motore. Con il pensiero, infatti, possiamo trasformare quest'imbarcazione a vela in una navicella capace di navigare in dimensioni sconosciute.

**Problema 3.1.** Sia  $\gamma$  una circonferenza e  $A$  un punto. Trovare il punto  $B \in \gamma$  che minimizza la distanza  $AB$ .

*Soluzione.* Conviene distinguere tre casi a seconda che il punto appartenga, sia esterno o sia interno alla circonferenza:

- **Caso 1: Il punto  $A$  appartiene alla circonferenza;** in questo caso è chiaro che  $B \equiv A$  poiché si avrebbe  $AB = 0$ .
- **Caso 2: Il punto  $A$  è esterno alla circonferenza;** con riferimento alla figura 3.1, sia  $B$  il punto d'intersezione fra  $OA$  e  $\gamma$ , dove  $O$  è il centro di  $\gamma$ .

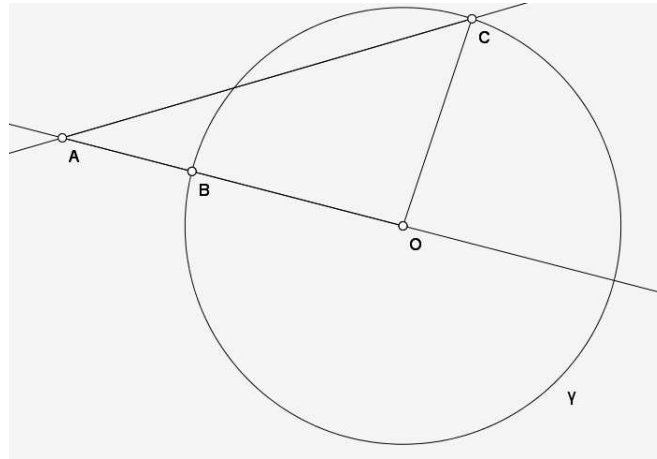


Figura 3.1: Caso 2 Problema 3.1

Consideriamo un qualsiasi altro punto  $C \neq B$  appartenente alla circonferenza. Per la **Disuguaglianza triangolare** applicata al triangolo  $AOC$ , abbiamo

$$OA < OC + CA \Rightarrow OB + BA < OC + CA \Rightarrow AB < AC$$

essendo  $OB = OC = r$ .

Dunque, per qualsiasi scelta di  $C$ , risulta  $AB < AC$  e  $B$  è il punto cercato.

- **Caso 3: Il punto  $A$  è interno alla circonferenza;** con riferimento alla figura 3.2, sia  $B$  il punto di intersezione fra  $OA$  e  $\gamma$ .

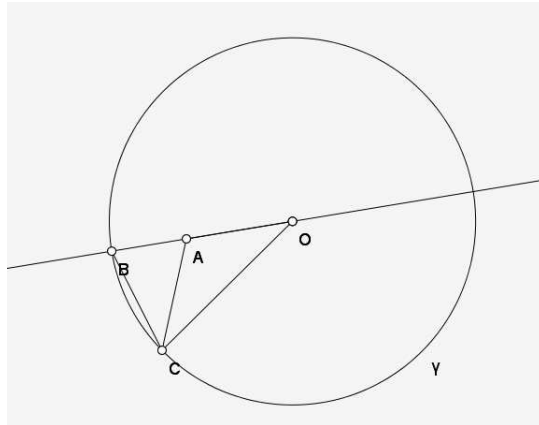


Figura 3.2: Caso 3 Problema 3.1

Consideriamo  $C \neq B$  appartenente alla circonferenza. Applicando la disuguaglianza triangolare al triangolo  $COA$ , risulta

$$CO - OA < AC \Rightarrow CO - (OB - BA) < AC \Rightarrow AB < AC$$

con  $CO = OB = r$ .

Dunque, per qualsiasi scelta di  $C$ , risulta  $AB < AC$ , perciò  $B$  è il punto cercato.

**Problema 3.2.** Sia  $AB$  un arco di circonferenza. Trovare il punto  $C$  che su tale arco massimizza la somma  $AC + CB$ .

*Soluzione.* Consideriamo un qualsiasi punto  $C$  sull'arco  $AB$ . Come mostrato nella figura 3.3 nella pagina seguente, sia  $D$  il punto sul prolungamento di  $AC$  dalla parte di  $C$  tale che  $CD = CB$ . Il triangolo  $CDB$  risulta sempre isoscele e, in particolare,  $\angle CDB + \angle CBD = \angle ACB$  per il **Teorema**



dell'angolo esterno, da cui si deduce che

$$2\angle CDB = \angle ACB \Rightarrow \angle CDB = \frac{\angle ACB}{2}$$

Dunque, essendo  $\angle ACB$  fisso perché giace sull'arco  $AB$ , lo sarà anche  $\angle CDB$ . Da ciò si deduce che il luogo dei punti  $D$  al variare di  $C$  è un arco di circonferenza che ha  $AB$  come corda.

Consideriamo  $M$ , punto medio dell'arco  $AB$ . I segmenti  $AM$  e  $MB$  sono, allora, congruenti, e costruendo il punto  $E$  tale che  $ME = MB$ , si ha che  $M$  è il centro della circonferenza che passa per  $A, B$  e  $E$ . L'arco  $AB$  di questa circonferenza che contiene  $E$ , per come è stato costruito, è il luogo dei punti  $D$  *ri...cercato* (infatti, a tale arco, appartengono  $A, B$  e  $E$  che sono tre punti del luogo e che determinano univocamente l'arco).

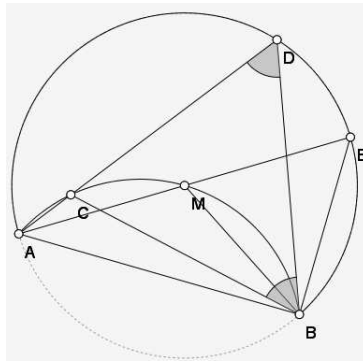


Figura 3.3: Problema 3.2

Dovendo massimizzare la somma  $AC + BC$ , ovvero  $AC + CD$ , non rimane che massimizzare la lunghezza della corda  $AD$ , che raggiunge il massimo, quando è uguale al diametro, ovvero quando eguaglia  $AE$ . Dunque, il massimo si raggiunge se  $D \equiv E$ , ovvero  $C \equiv M$ . Il punto cercato è il punto medio dell'arco.

**Problema 3.3.** *Sia  $AB$  un arco di circonferenza. Trovare il punto  $C$  che su tale arco massimizza l'area del triangolo  $ABC$ .*

*Dimostrazione.* Riferendoci alla figura 3.4, sia  $M$  il punto medio dell'arco. Vogliamo dimostrare che, per qualunque altro punto  $C$  sull'arco, si ha che l'area di  $AMB$  è maggiore dell'area di  $ACB$ . Consideriamo la circonferenza  $\gamma$  di centro  $O$  a cui appartiene tale arco. Il punto  $M$  è tale che  $OM \perp AB$  poichè sia  $O$  che  $M$  appartengono all'asse del segmento  $AB$ . Dunque,  $OM$  interseca  $AB$  in  $M'$ , punto medio di  $AB$ . Consideriamo un qualunque altro punto  $C$  sull'arco e congiungiamo tale punto con  $O$ . Sia  $C'$  la proiezione di  $C$  sul segmento  $AB$  e  $D$  l'intersezione fra  $CO$  e  $AB$ . Se  $\angle AMB$  è ottuso, allora il circocentro  $O$  è esterno al triangolo  $AMB$ .

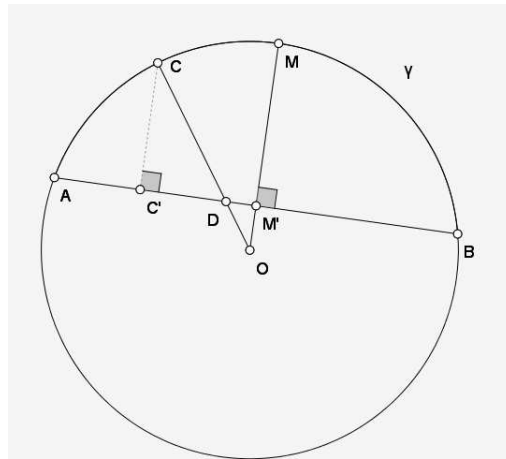


Figura 3.4: Problema 3.3

In questo caso si può scrivere  $CC' < CD$  per quanto dimostrato nel **Problema 2.1**. Inoltre si ha  $CD = CO - OD$ , dove  $CO$  è il raggio, e, dunque, è uguale a  $OM$ . Peraltro, sempre per il **Problema 2.1**,  $OD > OM'$ . Queste ultime uguaglianze e disuguaglianze giustificano la seguente catena

$$CC' < CD = CO - OD = OM - OD < OM - OM' < MM'$$

I casi in cui  $\angle AMB$  è retto o acuto si riconducono entrambi al caso precedente in maniera molto semplice: a voi il piacevole passatempo.

Da ciò si deduce che in qualunque triangolo  $ACB$  l'altezza relativa al lato  $AB$  è minore di  $MM'$ . Dunque, poiché la base è sempre la stessa,

qualsiasi sia  $C$ , l'area del triangolo  $ACB$  è minore dell'area di  $AMB$ , che risulta massima.

Si noti che tale punto, oltre a massimizzare l'area, massimizza anche il perimetro, per quanto dimostrato nel **Problema 3.2**.

**Problema 3.4.** *Sia  $\gamma$  una circonferenza. Nell'ipotesi che fra tutti i poligoni di  $n$  lati inscritti in questa circonferenza esista uno che ha il perimetro massimo, determinare tale poligono. Determinare anche quello che ha area massima.*

*Soluzione.* Supponiamo, per assurdo, che esista un poligono  $A_1A_2\dots A_n$  tale che abbia perimetro massimo, ma non sia quello regolare. Non soddisfacendo la condizione di regolarità, vuol dire che esiste un arco  $A_iA_{i+2}$  tale che il punto  $A_{i+1}$  non è punto medio dell'arco, dove  $i$  è un indice qualunque inteso modulo  $n$ . Spostiamo il punto  $A_{i+1}$  sull'arco  $A_iA_{i+2}$  in maniera tale che coincida con il suo punto medio  $M_{i+1}$ . Dal **Problema 3.2** sappiamo che

$$A_iM_{i+1} + M_{i+1}A_{i+2} > A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2}$$

Dunque, il perimetro del poligono che avevamo supposto soddisfare la condizione di massimo, in realtà è minore del perimetro di un altro poligono ottenuto spostando un vertice  $A_{i+1}$  qualunque sul punto medio dell'arco  $A_iA_{i+2}$ . Da ciò l'assurdo che implica la tesi.

Con un ragionamento del tutto identico a quello precedente, ma sfruttando il **Problema 3.3**, risulta evidente che vale anche tale relazione fra le aree

$$A_{A_iM_{i+1}A_{i+2}} > A_{A_iA_{i+1}A_{i+2}}$$

Dunque, il poligono considerato di area massima, in realtà ha area minore di un altro poligono che si ottiene spostando un vertice  $A_{i+1}$  qualunque sul punto medio dell'arco  $A_iA_{i+2}$ .

Concludiamo che:

Nell'ipotesi che esista un poligono di  $n$  lati inscritto in una circonferenza che renda massimi area e perimetro, tale poligono è quello regolare.

*N.B:* Abbiamo, similmente a quanto fatto nel **Problema di Fagnano**, supposto che esista un poligono che soddisfi la condizione di massimo. Tuttavia da tale affermazione, anche qui intuitiva, è difficile prescindere, come fatto precedentemente, senza usare strumenti avanzati non adatti al contenuto elementare di questo manuale.

Possiamo ora affrontare un problema simile al **Problema 2.9**, per la cui risoluzione ritorniamo a prendere in... giro il segmento  $AB$  che, ancora una volta, si presta a farci da spalla.

**Problema 3.5.** *Dati due punti  $A$  e  $B$  esterni a una circonferenza  $\gamma$  di centro  $O$ , trovare il punto  $C \in \gamma$  tale che l'angolo  $\angle ACB$  sia massimo e il punto  $D \in \gamma$  tale che l'angolo  $\angle ADB$  sia minimo.*

*Soluzione.* Dati due punti  $A$  e  $B$  esterni ad una circonferenza  $\gamma$ , è possibile costruire due circonferenze passanti per  $A$  e  $B$  e tangenti a  $\gamma$ , l'una tangente esternamente e l'altra tangente internamente. Dividiamo, quindi, la dimostrazione in due tempi. Dimostriamo dapprima che il punto di tangenza  $C$  fra  $\gamma$  e la circonferenza  $\alpha$  di centro  $O'$  tangente esternamente a  $\gamma$  e passante per  $A$  e  $B$  è tale che l'angolo  $\angle ACB$  è massimo.

Nella figura 3.5 nella pagina seguente, consideriamo un qualunque altro punto  $E$  sulla circonferenza  $\gamma$  e sia  $\beta$  la circonferenza circoscritta al triangolo  $AEB$ . Prolunghiamo  $AC$  fino ad incontrare  $\beta$  in  $F$ . Chiaramente, per il **Teorema dell'angolo esterno** applicato al triangolo  $CFB$ , l'angolo  $\angle CFB$ , essendo interno, è minore dell'angolo esterno  $\angle ACB$ . Tuttavia vale l'uguaglianza  $\angle CFB = \angle AEB$ , perché entrambi insistono sull'arco  $AB$  della circonferenza  $\beta$ . Dunque risulta

$$\angle AEB = \angle CFB < \angle ACB \Rightarrow \angle AEB < \angle ACB$$

e, per l'arbitrarietà del punto  $E$ ,  $C$  risulta il punto che rende massimo l'angolo desiderato.

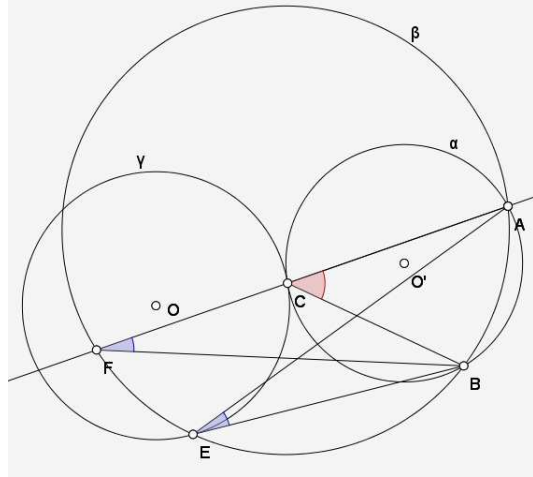


Figura 3.5: Problema 3.5

Per la seconda parte del problema, consideriamo il punto  $D$  di tangenza fra la circonferenza  $\gamma$  e la circonferenza  $\delta$  di centro  $O''$  tangente internamente a  $\gamma$  e passante per  $A$  e  $B$ . Vogliamo dimostrare che  $D$  è il punto che rende minimo l'angolo  $\angle ADB$ .

Nella figura 3.6 nella pagina successiva, consideriamo un qualunque altro punto  $G$  in  $\gamma$  e sia  $\epsilon$  la circonferenza circoscritta al triangolo  $AGB$ . Sia  $H$  l'intersezione fra  $DB$  e  $\epsilon$ . Per il **Teorema dell'angolo esterno** applicato al triangolo  $ADH$ , risulta che l'angolo interno  $\angle ADH$  è minore dell'angolo esterno  $\angle AHB$ . Inoltre, l'angolo  $\angle AHB$  è congruente all'angolo  $\angle AGB$  perché entrambi insistono sull'arco  $AB$  della circonferenza  $\epsilon$ . Pertanto

$$\angle ADB < \angle AHB = \angle AGB \Rightarrow \angle ADB < \angle AGB$$

e, quindi, per l'arbitrarietà con cui abbiamo preso il punto  $G$ ,  $D$  risulta il punto che rende minimo l'angolo desiderato.

Per costruire le due circonferenze, ci serviamo di un noto teorema di geometria piana secondo cui gli assi radicali di tre circonferenze, prese a due a due, concorrono in un punto, detto centro radicale delle tre circonferenze.

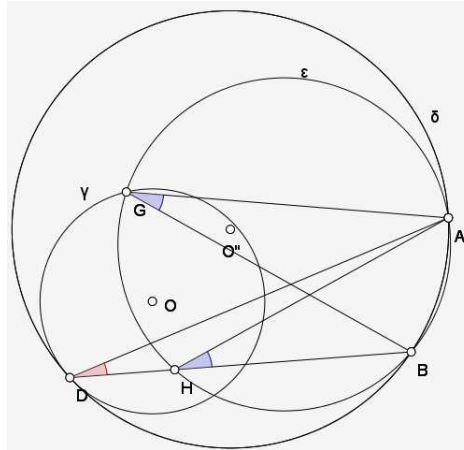


Figura 3.6: Problema 3.5

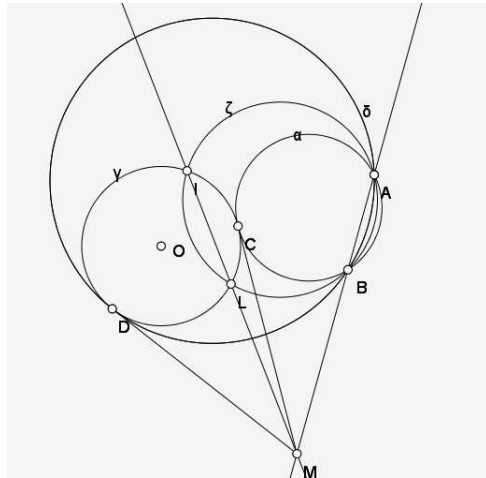


Figura 3.7: Costruzione delle circonferenze

Il nostro obiettivo è cercare i due punti  $C$  e  $D$  di tangenza. Per questo motivo, con riferimento alla figura 3.7, tracciamo una circonferenza  $\zeta$  qualsiasi passante per  $A$  e  $B$  e che intersechi in  $I$  e  $L$  la circonferenza

$\gamma$ . Per il teorema precedentemente citato,  $IL$ , che è asse radicale di  $\gamma$  e  $\zeta$ ,  $AB$ , che è asse radicale di  $\zeta$  e  $\alpha$ , concorrono in un punto  $M$ , per cui dovrà passare anche l'asse radicale di  $\alpha$  e  $\gamma$ , che è la tangente in  $C$  a  $\gamma$ . Facendo lo stesso ragionamento sulla terna di circonferenze  $(\gamma, \delta, \zeta)$ , si ottiene che per  $M$  deve passare anche la tangente in  $D$  a  $\gamma$ .

Chiaramente ora, costruendo le due tangenti a  $\gamma$  passanti per  $M$ , punto d'intersezione di  $AB$  con  $IL$ , si ottengono i due punti  $C$  e  $D$  che, in base a quanto prima dimostrato, devono essere i punti tali che le circonferenze circoscritte a  $ABC$  e  $ABD$  sono tangenti a  $\gamma$ .

Con tutti questi cerchi, ve n'è venuto uno anche... *alla testa?* Abbiamo un rimedio infallibile per farvelo passare: il giro della morte! Ne avete mai sentito parlare? Eccolo illustrato in figura 3.8.

**Problema 3.6.** *Un ciclista percorre, con la sua bicicletta, una pista circolare di raggio  $r = 2.55\text{m}$  disposta verticalmente (il cerchio della morte). Trascurando l'attrito, determinare la velocità minima che la bicicletta può avere nel punto più alto della traiettoria, senza che essa perda contatto con la pista.*

*Soluzione.* La forza centripeta di questo moto circolare è data dalla risultante della forza peso  $P$  (ciclista e bicicletta) e della reazione normale  $N$  della pista, che, nel punto più alto della traiettoria, sono entrambe verticali e dirette verso il centro di curvatura. Pertanto, ricordando che l'accelerazione centripeta vale  $a = \frac{v^2}{r}$ , si ha

$$P + N = ma \Rightarrow mg + N = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right)$$

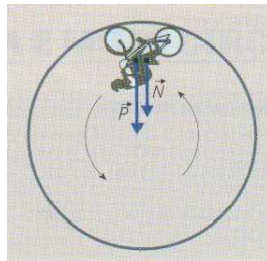


Figura 3.8: Giro della morte

Si evince, allora, che l'aderenza  $N$  della bicicletta alla pista dipende dalla sua velocità e si perde, invece, quando si annulla. In tal caso

$$N = 0 \Rightarrow \frac{v_{min}^2}{r} = g \Rightarrow v_{min} = \sqrt{gr} = 5\frac{m}{s}$$



A conclusione di questo capitolo, che tratta in gran parte di circonferenze, non poteva non esserci il famoso **Problema di Didone** anche citato ne "L'Eneide" di Virgilio. Didone, trovandosi ad utilizzare una pelle per delimitare i confini di Cartagine, la rese innanzitutto filiforme e disegnò una circonferenza: aveva capito che, avendo a disposizione una determinata quantità di pelle, conveniva, per racchiudere l'area maggiore, disegnare una circonferenza.

È questo il famoso **Problema isoperimetrico**, secondo cui, fra tutte le figure piane dotate di uguale perimetro, il cerchio è quello di area massima. Non potendo dimostrare questo risultato, in quanto gli strumenti utilizzati per la dimostrazione non possono essere definiti elementari, ci limitiamo a citare un contributo dato da G. Galilei, il quale dimostra che il cerchio ha area maggiore di qualunque poligono convesso ad esso isoperimetrico. Anche di questa dimostrazione, però, noi ci limitiamo a darne una trattazione parziale e non completa, perché troppo artificiosa e contorta e potrebbe scoraggiare i giovani dell'*equipaggio* portati a cogliere di questi risultati più gli aspetti applicativi che teorici.

**Problema 3.7.** *L'area del cerchio è maggiore dell'area di qualunque poligono convesso ad esso isoperimetrico.*

*Soluzione.* Riferendoci alla figura 3.9 nella pagina seguente, sia  $\gamma$  una circonferenza,  $P_1$  un poligono circoscritto a tale circonferenza, e  $P_2$  un poligono simile a  $P_1$  e isoperimetrico a  $\gamma$ . Vogliamo dimostrare che, detta  $A_\gamma$  l'area del cerchio delimitato dalla circonferenza e  $A_{P_2}$  l'area del poligono  $P_2$ , si ha che

$$A_\gamma > A_{P_2}$$

Essendo il poligono  $P_1$  circoscritto alla circonferenza  $\gamma$ , si ha che, detto  $r$  il raggio di  $\gamma$

$$A_{P_1} = \frac{2p_{P_1} \cdot r}{2}$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\frac{A_{P_1}}{2p_{P_1}} = \frac{r}{2} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{A_\gamma}{2p_\gamma}$$

Dal momento che, per ipotesi,  $2p_\gamma = 2p_{P_2}$ , abbiamo

$$\frac{A_{P_1}}{2p_{P_1}} = \frac{A_\gamma}{2p_\gamma} = \frac{A_\gamma}{2p_{P_2}} \Rightarrow \frac{2p_{P_2}}{2p_{P_1}} = \frac{A_\gamma}{A_{P_1}}$$

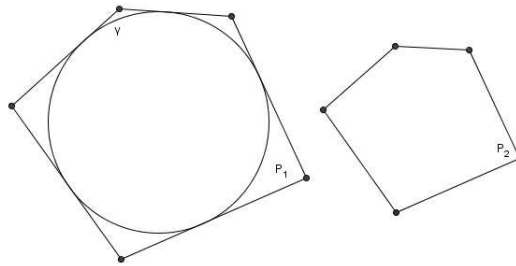


Figura 3.9: Problema di Didone

Essendo  $P_1$  e  $P_2$  simili per ipotesi, le loro aree stanno fra loro come i quadrati dei perimetri, e dunque

$$\frac{4p_{P_2}^2}{4p_{P_1}^2} = \frac{A_{P_2}}{A_{P_1}}$$

Elevando al quadrato l'uguaglianza prima ottenuta, e sostituendo, si ha che

$$\begin{aligned} \frac{A_\gamma^2}{A_{P_1}^2} &= \frac{4p_{P_2}^2}{4p_{P_1}^2} = \frac{A_{P_2}}{A_{P_1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{A_\gamma^2}{A_{P_1}^2} &= \frac{A_{P_2}}{A_{P_1}} \Rightarrow A_\gamma^2 = A_{P_1} \cdot A_{P_2} \end{aligned}$$

È chiaro che, essendo  $\gamma$  inscritta in  $P_1$ , si ha  $A_{P_1} > A_\gamma$ . Se, per assurdo, fosse  $A_{P_2} \geq A_\gamma$ , moltiplicando questa relazione con  $A_{P_1} > A_\gamma$ , si avrebbe

$$A_{P_1} \cdot A_{P_2} > A_\gamma^2$$

che contraddice l'uguaglianza  $A_\gamma^2 = A_{P_1} \cdot A_{P_2}$  precedentemente ottenuta. Deve, allora, necessariamente risultare che

$$A_\gamma > A_{P_2}$$

*N.B: La dimostrazione non è, tuttavia, ancora conclusa. Si dimostra, per induzione su  $n$ , che dato un poligono  $P$  di  $n$  lati, ne esiste un altro  $P'$*

*con lo stesso numero di lati e circoscritto ad una circonferenza tale che*

$$\frac{A_P}{4p_P^2} \leq \frac{A_{P'}}{4p_{P'}^2}$$

Con questa seconda parte non dimostrata, trascurata dallo stesso G. Galilei e successivamente anche da Steiner, il teorema è completo e permette di affermare che... il cerchio sì, a ragione, può darsi delle... *aree!*  
Infatti:

<b>Il cerchio ha area maggiore di qualunque poligono convesso che abbia come perimetro la sua circonferenza.</b>
--

## Capitolo 4

# A gonfie vele!

*"Un matematico apre dei sentieri duraturi perché fatti con le idee."*

G. Harold Hardy

Allora, aspiranti nocchieri. Il libretto di navigazione ci informa che:

**Problema 4.1.** *Siamo su una barca provvista di una vela girevole attorno all'albero maestro. Sappiamo che:*

- *la direzione del vento è perpendicolare alla direzione del moto della barca;*
- *la forza  $F$  esercitata dal vento sulla vela è proporzionale al seno dell'angolo che la vela forma con la direzione del vento;*
- *la velocità della barca è proporzionale a  $F$  e al seno dell'angolo che la vela forma con la direzione del moto della barca.*

*Per quale posizione della vela si ottiene la massima velocità  $v$  della barca?*

*Soluzione.* Sia  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  l'angolo che la vela forma con la direzione del vento, come indicato nella figura 4.1 nella pagina successiva. Allora avremo che

$$F = k \sin \alpha$$

e

$$\begin{aligned}
 v &= hF \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = kh \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \\
 &= kh \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}kh \sin(2\alpha)
 \end{aligned}$$

dove  $k$  e  $h$  sono costanti di proporzionalità.

Dunque, la velocità è massima, quando è massimo  $\sin(2\alpha)$ , ovvero, in rispetto delle limitazioni poste, quando  $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ .

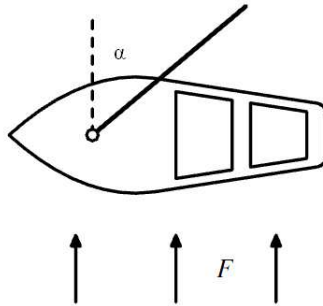


Figura 4.1: Problema 4.1

Adesso sì, che andiamo al massimo, andiamo a... *gonfie vele!* Avete notato come esse si sono inarcate e protese in avanti? Sembrano grembi di partorienti e l'imbarcazione una gestante! È, infatti, gravida di idee impazienti di venire alla luce. In una società che, col culto dell'immagine, provoca continuamente aborti della fantasia, questa imbarcazione è un piccolo vascello che salva tutto ciò che è abbozzato, accennato a livello embrionale e che lotta per germogliare e prendere forme sorprendenti. È il nuovo che vive in "feri", è il germe dell'inedito. In un mondo dove esista solo se appare, le idee, non essendo visibili, contano poco. Con questa logica stiamo distruggendo i valori più formativi dell'animo umano. La

prima vittima di questa ottica aziendale è la scuola. Essendo palestra di ginnastica mentale, luogo di formazione culturale, officina in cui vengono foggiate le coscienze, la scuola, in una lettura economica, produce il nulla, essendo i suoi prodotti immateriali ed inconsistenti. **In questa visione non cartesiana** dell'esistenza, l'umanità sarebbe rimasta all'età della pietra. I grandi scienziati, che con le loro scoperte hanno spinto energicamente e profondamente la civiltà e il progresso nel futuro della storia, sono stati dei grandi pensatori e, senza la loro fertile e "pascoliana" immaginazione, il cammino della scienza non sarebbe stato così proficuo. Istruito dai sensi, il cervello umano è portato, infatti, a pensare secondo categorie fondate su esperienze concrete e tangibili. Solo la fantasia e la creatività possono concepire l'inconcepibile, idee, cioè, non ancorate alla realtà ed esplorare così l'invisibile per svelarne i misteri. È grazie a questa capacità di liberarsi con intelligenza di rigide strutture costituzionali e di navigare al di là dell'immaginazione che l'uomo indaga il mondo microscopico e macroscopico, inventando modelli estranei alla sua "forma mentis" per spiegarne fenomeni e comportamenti.



*Figura 4.2:* Il faro è immagine di stabilità, luogo emblematico di certezze in cui ritrovare sicurezza nelle proprie capacità per superare ogni burrascosa difficoltà.

## 4.1 Problemi tratti dagli esami di Stato

**Problema 4.1.1** (Sessione ordinaria 1970/71). *Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato  $r$ , si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.*

*Soluzione analitica.* Osserviamo che il triangolo isoscele corrispondente alle richieste del problema è acutangolo, ossia il centro della circonferenza circoscritta a tale triangolo è interno al triangolo stesso. Infatti, per ogni triangolo ottusangolo  $AB'C'$ , possiamo scegliere un altro triangolo acutangolo con base  $BC$  parallela a  $B'C'$  (cfr. la figura 4.3 nella pagina seguente). In questo nuovo triangolo, chiaramente, l'altezza è maggiore rispetto alla precedente. Dunque un triangolo ottusangolo non può soddisfare la condizione di massimo.

A questo punto è utile fissare un sistema di riferimento cartesiano come quello nella figura 4.3 nella pagina successiva, che abbia come origine il centro  $O$  della circonferenza, come asse delle  $y$  la retta  $OA$ , dove  $A$  è il vertice del triangolo isoscele, e come asse delle  $x$  la retta perpendicolare ad  $OA$  per  $O$ . In tale sistema la circonferenza ha equazione  $x^2 + y^2 = r^2$ , i vertici del triangolo sono  $A = (0, r)$ ,  $B = (-x, -y)$ ,  $C = (x, -y)$  e  $H = (0, -y)$ , con  $0 \leq x \leq r$  e  $0 \leq y \leq r$  per l'osservazione iniziale. Sotto queste condizioni l'espressione da massimizzare diventa

$$\begin{aligned} 2BC + AH &= 2|x_C - x_B| + |y_H - y_A| = \\ &= 2|x + x| + |-y - r| = \\ &= 4x + y + r = 16\frac{x}{4} + y + r \end{aligned}$$

Essendo  $r$  una costante la si può ignorare, e dunque rimane da trovare il massimo della somma  $s = 4x + y$ , sotto le condizioni  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $0 \leq x \leq r$  e  $0 \leq y \leq r$ . A questo punto applichiamo la disuguaglianza  $QM \geq AM$  a 16 termini  $\frac{x}{4}$  e un termine  $y$ , ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{4} + \dots + \frac{x}{4} + y}{17} &\leq \sqrt{\frac{\frac{x^2}{16} + \dots + \frac{x^2}{16} + y^2}{17}} \Rightarrow \frac{4x + y}{17} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{17}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4x + y \leq r\sqrt{17} \end{aligned}$$

Dunque  $s = 4x + y$  è massima, quando  $s = r\sqrt{17}$ , e in tal caso

$$2BC + AH = 4x + y + r = r(\sqrt{17} + 1)$$

Inoltre, avendo utilizzato la disuguaglianza  $QM \geq AM$ , l'uguaglianza, e dunque il massimo, si ha quando i termini sono uguali, ovvero

$$\frac{x}{4} = y \Rightarrow x = 4y$$

Essendo  $x^2 + y^2 = r^2$ , si ricava

$$y = \frac{r}{\sqrt{17}} = \frac{r\sqrt{17}}{17}, \quad x = \frac{4r\sqrt{17}}{17}$$

Le coordinate dei vertici del triangolo cercato sono, quindi,

$$A = (0, r), \quad B = \left(-\frac{4r\sqrt{17}}{17}, -\frac{r\sqrt{17}}{17}\right), \quad C = \left(\frac{4r\sqrt{17}}{17}, -\frac{r\sqrt{17}}{17}\right)$$

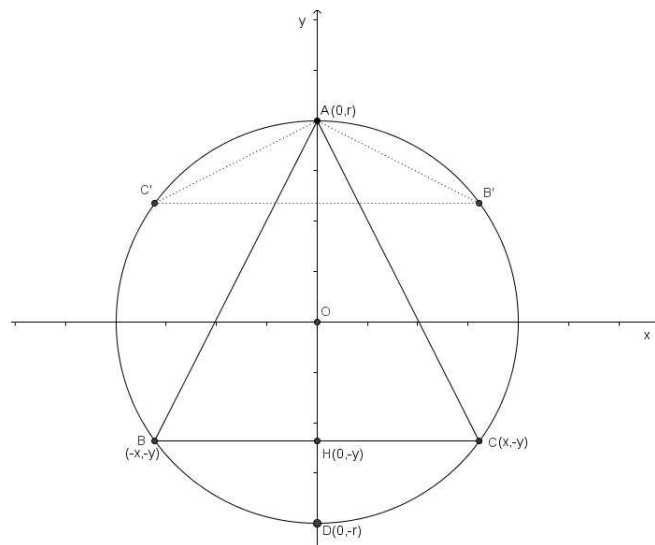


Figura 4.3: Problema 4.1.1



*Soluzione trigonometrica.* Dello stesso problema proponiamo una soluzione trigonometrica. Utilizzando come riferimento la figura 4.3 nella pagina precedente, poniamo  $\angle BAH = \alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Analizziamo dapprima i due casi limiti:

- se  $\alpha = 0$ , il triangolo degenera nel diametro  $AD$ . In questo caso  $s = 2r$ ;
- se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , il triangolo degenera in un punto e  $s = 0$ .

Grazie alle relazioni fra lati e angoli nei triangoli rettangoli  $ABD$  e  $AHB$ , otteniamo

$$\begin{aligned} AB &= AD \cos \alpha = 2r \cos \alpha \\ AH &= AB \cos \alpha = 2r \cos^2 \alpha \\ BH &= AB \sin \alpha = 2r \sin \alpha \cos \alpha \\ BC &= 2BH \end{aligned}$$

Pertanto, la quantità  $s$  da rendere massima diviene

$$s = AH + 2BC = 2r \cos^2 \alpha + 8r \sin \alpha \cos \alpha$$

e, ricordando che, per le formule di bisezione,

$$2 \cos^2 \alpha = \cos(2\alpha) + 1$$

e

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$$

possiamo riscrivere

$$s = r(\cos(2\alpha) + 4 \sin(2\alpha) + 1) \Rightarrow s - r = r(\cos(2\alpha) + 4 \sin(2\alpha))$$

Sia  $\beta$  l'angolo tale che  $\tan \beta = 4$ . Allora possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} s - r &= r \left( \cos(2\alpha) + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin(2\alpha) \right) = \\ &= \frac{r}{\cos \beta} (\cos(2\alpha) \cos \beta + \sin \beta \sin(2\alpha)) = \\ &= \frac{r}{\cos \beta} \cos(2\alpha - \beta) \end{aligned}$$

In base a quest'ultima uguaglianza, l'espressione  $s - r$ , e dunque  $s$ , raggiunge il massimo, allorquando  $\cos(2\alpha - \beta)$  è massimo. Ciò accade se  $2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\arctan 4}{2}$ . Ricordando la nota identità

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{17}$$

per tale valore abbiamo il massimo assoluto

$$s_{max} - r = \frac{r}{\cos \alpha} = r\sqrt{17} \Rightarrow s_{max} = r(\sqrt{17} + 1)$$

**Problema 4.1.2** (Sessione ordinaria 1974/75). *Si conduca, internamente ad un angolo retto  $\angle AOB$ , una semiretta  $OC$  che forma con  $OA$  un angolo  $\angle AOC = \alpha$ ; presi rispettivamente su  $OA$  e  $OB$  due punti  $M$  e  $N$  tali che  $OM = 1$  e  $ON = \sqrt{3}$ , siano  $M'$  e  $N'$  le rispettive proiezioni di  $M$  e  $N$  su  $OC$ . Detto  $P$  il punto medio di  $M'N'$ , si determini  $\alpha$  in modo che risulti massima l'area del triangolo  $NOP$ .*

*Soluzione trigonometrica.* Nella figura 4.4 nella pagina successiva, sia  $\angle AOC = \alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Analizziamo dapprima i casi limiti:

- se  $\alpha = 0$ , si ha che l'area di  $NOP$  vale  $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ ;
- se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , l'area di  $NOP$  vale 0.

Calcoliamo l'area del triangolo  $NOP$ . Poiché

$$\begin{aligned} OP &= \frac{1}{2} (OM' + ON') = \frac{1}{2} (OM \cos \angle AOC + ON \cos \angle BOC) = \\ &= \frac{1}{2} \left( OM \cos \alpha + ON \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

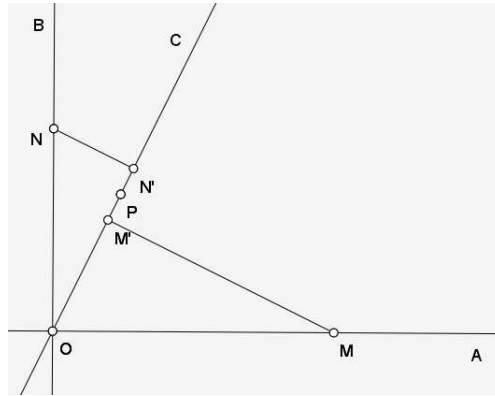


Figura 4.4: Soluzione trigonometrica Problema 4.1.2

l'area del triangolo  $NOP$ , per la formula trigonometrica dell'area, vale

$$\begin{aligned}
 A_{NOP} &= \frac{1}{2} ON \cdot OP \cdot \sin \angle BOC = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha
 \end{aligned}$$

e, per le formule di bisezione

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \\
 \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2\alpha))
 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 A_{NOP} &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos^2 \alpha = \\
 &= \frac{3}{8} \sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{8} (1 + \cos(2\alpha)) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\alpha) + \frac{1}{2} \cos(2\alpha) + \frac{1}{2} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(2\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(2\alpha) + \frac{1}{2} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

espressione che diviene massima, quando  $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1$  e ciò accade se  $2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ . In questo caso l'area vale

$$A_{NOP} = \frac{3}{8} \sqrt{3}$$

ed essendo tale valore maggiore di entrambe le aree trovate nei casi limiti, esso rappresenta il massimo assoluto.

*Soluzione sintetica.* Il problema è formulato solo in un caso particolare, ovvero con due lunghezze particolari di  $OM$  e  $ON$ . Qualora tali lunghezze dovessero essere cambiate, la soluzione trigonometrica che abbiamo fornito dovrebbe essere modificata, facendo attenzione ad alcuni passaggi: per un controllo dell'*olio... mentale*, lanciamo la sfida ai più audaci. Affrontiamo il caso generale, ma forniamo una dimostrazione squisitamente sintetica, che non solo determina il punto, ma ne fornisce una costruzione.

Il punto principale della dimostrazione è mostrare che, al variare della semiretta  $OC$  all'interno dell'angolo  $\angle AOB$ , il punto  $P$  descrive una semicirconferenza.

Con riferimento alla figura 4.5 nella pagina seguente, siano  $N''$  e  $M''$  i punti medi di  $ON$  e  $OM$ . Dimostriamo che, al variare della semiretta  $OC$ , l'angolo  $\angle N''PO$  rimane costante ed è uguale all'angolo  $\angle N''M''O$ . In tal modo si sarà dimostrato che il punto  $P$  appartiene alla semicirconferenza  $M''N''$ , che non contiene  $O$ , della circonferenza circoscritta al triangolo  $ON''M''$ .

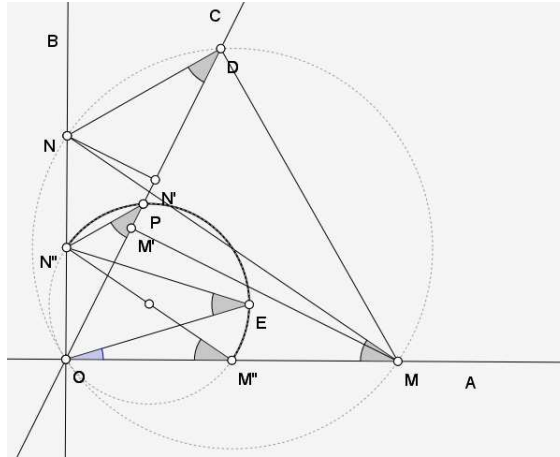


Figura 4.5: Soluzione sintetica Problema 4.1.2

Per fare ciò scegliamo sulla semiretta  $OC$ , oltre il punto  $N'$ , il punto  $D$  tale che  $OM' = N'D$ . In tal modo, per il teorema di Pitagora, risultano le due uguaglianze

$$ND^2 = NN'^2 + N'D^2 = NN'^2 + OM'^2$$

$$MD^2 = MM'^2 + M'D^2 = MM'^2 + ON'^2$$

Sommando membro a membro, si ottiene

$$\begin{aligned} ND^2 + MD^2 &= NN'^2 + OM'^2 + MM'^2 + ON'^2 = \\ &= (NN'^2 + ON'^2) + (OM'^2 + MM'^2) = \\ &= ON^2 + OM^2 = MN^2 \end{aligned}$$

Risulta, allora,  $ND^2 + MD^2 = MN^2$  e, quindi,  $\angle NDM = \frac{\pi}{2}$ . Nel quadrilatero  $OMDN$  si ha, pertanto,

$$\angle NDM + \angle NOM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

e, dunque, esiste la circonferenza passante per i quattro punti  $O$ ,  $M$ ,  $D$  e  $N$ . In tale circonferenza  $\angle NDO = \angle NMO$ , perché entrambi insistono sull'arco  $NO$ .

D'altra parte, nel triangolo  $NOD$  si ha che  $N''$  e  $P$  sono punti medi dei lati su cui giacciono, e, dunque, per il teorema di Talete, risulta  $PN''$  parallelo a  $ND$ , da cui si deduce  $\angle N''PO = \angle NDO$ . Analogamente, nel triangolo  $NOM$ , si ha che  $N''M'' \parallel NM$ , da cui  $\angle NMO = \angle N''M''O$ .

Grazie alle tre uguaglianze ottenute, ovvero

$$\angle NDO = \angle NMO, \quad \angle N''PO = \angle NDO, \quad \angle NMO = \angle N''M''O$$

segue che  $\angle N''PO = \angle N''M''O$ . Abbiamo, dunque, mostrato che l'angolo  $\angle N''PO$  rimane costante, ed essendo uguale a  $\angle N''M''O$ , abbiamo anche mostrato che  $P$  sta sulla semicirconferenza  $M''N''$ , che non contiene  $O$ , della circonferenza circoscritta a  $ON''M''$ .

A questo punto bisogna trovare su questa semicirconferenza il punto che rende massima l'area di  $NOP$ . Essendo  $ON$  costante, bisogna trovare  $P$  tale che la sua distanza da  $ON$  sia la massima possibile. Questo è il punto di tangenza fra la circonferenza e la retta parallela a  $ON$ , ovvero il punto medio  $E$  dell'arco  $N''O$  della circonferenza circoscritta a  $ON''M''$ . Tale punto appartiene *sicuramente* anche alla semicirconferenza  $M''N''$ . (Siete *sicuri* anche voi di bordo di questa collocazione non... *provvisoria*, né di... *emergenza* del punto  $P$  sulla semicirconferenza?). In tal caso l'angolo  $\angle AOE$ , che è quello richiesto dal problema, vale

$$\begin{aligned} \angle AOE &= \frac{\pi}{2} - \angle NOE = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \angle N''EO}{2} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\angle N''EO}{2} = \frac{\angle N''EO}{2} = \frac{\angle N''M''O}{2} = \frac{\angle NMO}{2} \end{aligned}$$

Si noti che il risultato appena trovato rispetta la precedente soluzione trigonometrica: infatti se  $OM = 1$  e  $ON = \sqrt{3}$ , il triangolo  $OMN$  è la metà di un triangolo equilatero e quindi  $\angle NMO = \frac{\pi}{3}$ . In tal caso

$$\angle AOE = \frac{\angle NMO}{2} = \frac{\pi}{6}$$

**Problema 4.1.3** (Sessione suppletiva 1974/75). *In una semicirconferenza di diametro  $AB = 2r$ , si conduca una corda  $AC$  tale che sia  $\angle CAB = 2\alpha$ . Detto  $D$  il punto medio dell'arco  $BC$  che non contiene  $A$ , si determini  $\alpha$  in modo che sia massima l'area del quadrilatero  $ABCD$ .*

*Soluzione.* Innanzitutto, essendo  $0 \leq \angle CAB \leq \frac{\pi}{2}$ , si ha che  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ .  
Esaminiamo i casi limiti:

- se  $\alpha = 0$ , il quadrilatero degenera in un segmento e  $A_{ABCD} = 0$ ;
- se  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $AC$  è tangente alla circonferenza e dunque il quadrilatero degenera in un triangolo rettangolo la cui area misura  $r^2$ .

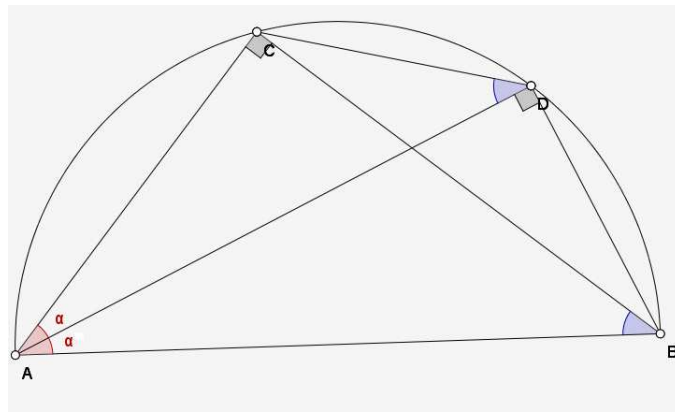


Figura 4.6: Problema 4.1.3

Con riferimento alla figura 4.6,  $D$  è il punto medio dell'arco  $BC$  e dunque la corda  $AD$  è la bisettrice dell'angolo  $\angle CAB$ .

Nel triangolo rettangolo  $ABD$  si ha

$$AD = AB \sin \angle ABD = 2r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2r \cos \alpha$$

$$BD = DC = AB \sin \angle DAB = 2r \sin \alpha$$

A questo punto troviamo le aree di  $ABD$  e  $ADC$ .

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BD = 2r^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$A_{ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AD \sin \angle CDA = 2r^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \angle CBA =$$

$$= 2r^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = 2r^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos(2\alpha)$$

essendo  $\angle CBA = \angle CDA$ , perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco  $AC$ .

Sommandole, si ottiene l'area del quadrilatero  $ABCD$

$$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{ADC} = 2r^2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + \cos(2\alpha)) = 4r^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha$$

dove abbiamo utilizzato  $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha$ .

Trascurando la costante, non rimane che rendere massima l'espressione  $\sin \alpha \cos^3 \alpha = (\sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} (\cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}$ . Essendo  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , siamo caduti in un caso particolare del **Problema 1.3.5**. La condizione di massimo si ha quando

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\frac{1}{2}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

Siccome  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ , la tangente è positiva e, dunque,  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ . In tal caso

$$A_{ABCD} = 4r^2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{3} r^2$$

e, poiché tale valore è maggiore di quelli assunti dall'area nei casi limiti, esso è un massimo assoluto. Dunque, l'angolo cercato è  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

**Problema 4.1.4** (Sessione suppletiva 1975/76). *Si considerino su una circonferenza di raggio unitario tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  tali che valga  $AB = BC$ . Studiare la funzione  $f(A, B, C) = AB^2 + BC^2 + CA^2$  e disegnarne il grafico.*

*Soluzione.* Con riferimento alla figura 4.7 nella pagina seguente, sia  $H$  il piede della perpendicolare da  $B$  a  $AC$ . Chiamiamo  $BH = x$ , con  $0 \leq x \leq 2$  e prolunghiamo  $BH$  fino ad incontrare la circonferenza in  $D$ .

Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo  $BAD$ , rettangolo in  $A$  perché l'angolo  $\angle BAD$  insiste su una semicirconferenza, si ha

$$\frac{CA^2}{4} = AH^2 = BH \cdot HD = x(2-x) \Rightarrow CA^2 = 4x(2-x)$$



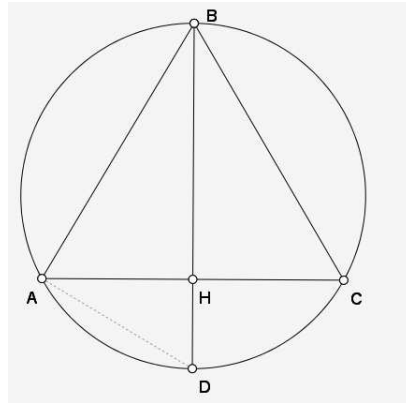


Figura 4.7: Problema 4.1.4

Applicando il primo teorema di Euclide nel triangolo  $BAD$ , si ha anche

$$AB^2 = BC^2 = BD \cdot BH = 2x$$

Pertanto

$$f(A, B, C) = AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4x + 4x(2-x) = 4x(3-x) = -4x^2 + 12x$$

Essendo  $0 \leq x \leq 2$ , il grafico di  $f(A, B, C)$  è un arco  $\gamma$  di parabola, come illustra chiaramente la figura 4.8 nella pagina successiva.

La concavità della parabola è rivolta verso il basso. L'ascissa del vertice, compresa nell'intervallo, che rappresenta un massimo assoluto, vale  $\frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$ .

Dunque, la quantità  $f(A, B, C)$  è massima, quando  $BH = x = \frac{3}{2}$  e, in questo caso, vale 9. In tale situazione vale anche  $AB = BC = CA = \sqrt{3}$  e, quindi, il massimo si ha quando il triangolo è equilatero.

Il minimo si ha, invece, per  $x = 0$ , e ciò accade se il triangolo degenera in un punto sulla circonferenza.

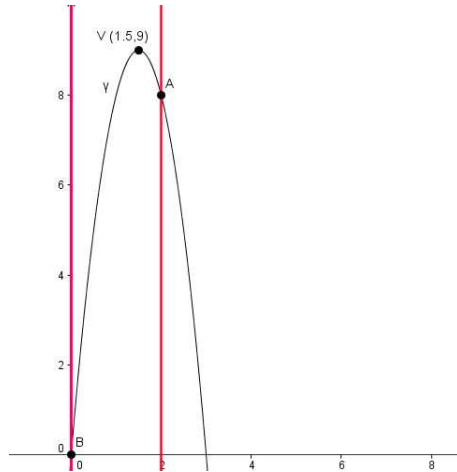


Figura 4.8: Grafico Problema 4.1.4

Abbiamo mostrato che, fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza, quello equilatero è tale che la somma dei quadrati dei lati è massima. Ora generalizziamo il risultato, dimostrando che il triangolo equilatero è quel triangolo inscritto in una circonferenza tale che la somma dei quadrati dei suoi lati è massima.

Verifichiamo che, dato un arco sotteso da una corda  $AB$ , il punto  $C$  sull'arco che rende massima la somma di quadrati  $AC^2 + BC^2$  è il punto medio dell'arco. Consideriamo un qualsiasi punto  $C$  sull'arco. Qualunque sia la scelta di  $C$ , l'angolo  $\angle ACB$  rimane costante perché insiste sullo stesso arco. Sia  $\angle ACB = \alpha$  e  $\angle CBA = \beta$  con  $0 < \beta < \pi - \alpha$ . Grazie al teorema dei seni

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{CB}{\sin \angle CAB} \Rightarrow CB = \frac{AB \sin(\pi - (\alpha + \beta))}{\sin \alpha} = \frac{AB \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle CBA} \Rightarrow AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin \alpha}$$

Dunque, l'espressione da rendere massima è

$$AC^2 + CB^2 = \frac{AB^2}{\sin^2 \alpha} (\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2 \beta)$$

Trascurando  $\frac{AB^2}{\sin^2 \alpha}$  che è una costante, bisogna massimizzare

$$\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2 \beta$$

e, per la formula di prostaferesi

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

e di duplicazione del coseno, possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2 \beta &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2(\alpha + \beta)) + 1 - \cos 2\beta] = \\ &= \frac{1}{2}[2 - (\cos(2(\alpha + \beta)) - \cos 2\beta)] = \\ &= 1 - \cos(2\beta + \alpha) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

L'espressione da rendere massima è  $1 - \cos(2\beta + \alpha) \cos(\alpha)$ . Ma, essendo  $\cos \alpha$  costante, ciò avviene se  $\cos(2\beta + \alpha)$  è minimo, ovvero, in rispetto delle limitazioni poste, quando  $2\beta + \alpha = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$  e, dunque, il triangolo  $ABC$  è isoscele, essendo, in questo caso,  $\angle CAB = \angle CBA$ .

Concludendo, dato un qualsiasi triangolo inscritto in una circonferenza, per quest'ultimo risultato, è possibile trovarne un altro isoscele che abbia la somma dei quadrati dei lati maggiore del primo. Inoltre, per il risultato del **Problema 4.1.4**, ogni triangolo isoscele inscritto in una circonferenza ha la somma dei quadrati dei lati minore di quella del triangolo equilatero inscritto. In definitiva:

**Fra tutti i triangoli inscritti in una circonferenza, quello che ha la somma dei quadrati dei lati massima è il triangolo equilatero.**

**Problema 4.1.5** (Sessione ordinaria 1980/81). *In un sistema di assi coordinati cartesiani, si scrivano le equazioni delle due circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  passanti per l'origine  $O$  ed aventi centri rispettivamente nei punti*

$C_1 = (2,0)$  e  $C_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ . Condotte per  $O$  due rette mutuamente perpendicolari, delle quali la prima incontra le due circonferenze rispettivamente in  $A$  e  $B$  e la seconda in  $C$  e  $D$ , si determini il quadrilatero  $ABCD$  avente area massima.

*Soluzione sintetica.* Lasciamo a voi, matematici allo sbaraglio, la soluzione analitica o trigonometrica, noi ne forniamo una sintetica.

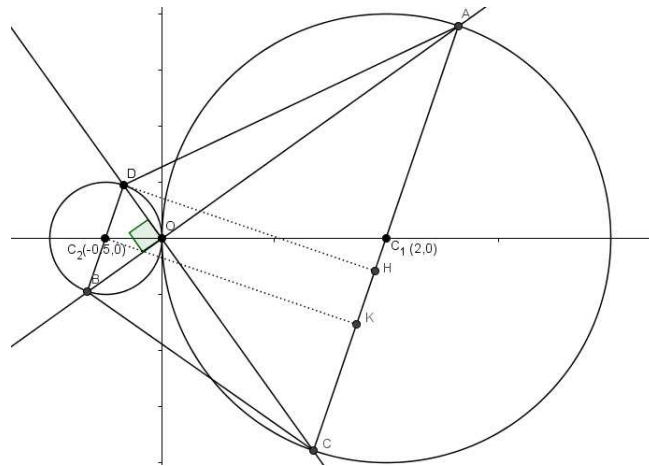


Figura 4.9: Problema 4.1.5

Riferendoci alla figura 4.9, per ipotesi si ha  $\angle DOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}$  e, dunque, tali angoli devono insistere su altrettante semicirconferenze. Quindi, la corda  $AC$  è un diametro della circonferenza  $\gamma_1$  e la corda  $BD$  è un diametro della circonferenza  $\gamma_2$ . Pertanto  $AC = 2r_1 = 4$  e  $BD = 2r_2 = 1$ .

Inoltre, essendo  $C_2BO$  un triangolo isoscele, risulta  $\angle C_2BO = \angle C_2OB$ . Analogamente,  $AOC_1$  è isoscele e, dunque,  $\angle AOC_1 = \angle OAC_1$ . Infine,  $\angle C_2OB = \angle AOC_1$  poiché angoli opposti al vertice. Dalle precedenti uguaglianze segue

$$\angle C_2BO = \angle OAC_1$$

il che implica che  $AC \parallel BD$ . Il quadrilatero  $ABCD$  è, pertanto, un trapezio di basi  $BD = 1$  e  $AC = 4$ . L'area, allora, risulta massima

se l'altezza  $DH$  è massima e, tracciando da  $C_2$  la perpendicolare a  $AC$ , avendosi  $C_2K = DH$ , bisogna che  $C_2K$  sia massimo.

Per il **Problema 2.1**,  $C_2K < C_2C_1$  e, dunque, il massimo si ha quando l'altezza eguaglia  $C_2C_1$ . Tale configurazione si realizza se  $C_2C_1$  è perpendicolare alle basi, ovvero scegliendo le rette in maniera tale che  $\angle AOC_1 = \frac{\pi}{4}$ .

In tal caso l'area vale

$$A_{ABCD} = \frac{(BD + AC) \cdot C_2C_1}{2} = \frac{5 \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{4}$$

**Problema 4.1.6** (Sessione ordinaria 1988/89). *In un piano sono assegnati una circonferenza  $\gamma$  di centro  $O$  e raggio  $r$  ed un punto  $A$  tale che  $OA = 2r$ ; si conducano per  $A$  due rette  $a$  e  $b$  tali che  $a$  sia perpendicolare alla retta  $OA$  e l'angolo formato tra le due sia  $\frac{\pi}{4}$ . Si determini sulla circonferenza il punto  $P$  tale che, condotte per esso la parallela alla retta  $a$  che incontra la retta  $b$  in  $M$  e la parallela alla retta  $b$  che incontra la retta  $a$  in  $N$ , la somma  $s = PM + PN$  abbia valore minimo.*

*Soluzione analitica.* Introduciamo un sistema di assi cartesiani, come mostrato nella figura 4.10 nella pagina successiva, in modo tale che l'asse delle  $x$  sia la retta  $OA$ ,  $A$  sia l'origine, l'asse  $y$  coincida con la retta  $a$  e  $r$  sia l'unità di misura. In tale sistema

$$A = (0, 0), \quad O = (-2, 0) \\ b : y = -x, \quad a : x = 0, \quad \gamma : (x + 2)^2 + y^2 = 1$$

Sicuramente il punto  $P$  è situato nell'angolo di disequazioni

$$\begin{cases} x < 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$$

poiché in tale angolo si trova la circonferenza  $\gamma$ .

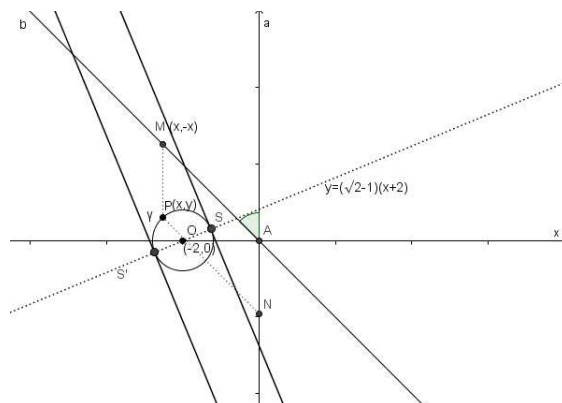


Figura 4.10: Soluzione analitica Problema 4.1.6

Sia  $P = (x, y)$  un punto arbitrario di  $\gamma$ . Chiaramente  $M = (x, -x)$  e quindi

$$|PM| = |y_M - y_P| = |-x - y| = -x - y$$

essendo  $x + y < 0$ . Inoltre

$$|PN| = |AM| = |x_P|\sqrt{2} = -x\sqrt{2}$$

essendo  $x < 0$ . Pertanto

$$s = PM + PN = -y - x - x\sqrt{2} = -x(\sqrt{2} + 1) - y \Rightarrow y = -x(\sqrt{2} + 1) - s$$

che, al variare di  $s$ , rappresenta un fascio improprio di rette con coefficiente angolare  $m = -(\sqrt{2} + 1)$  e ordinata all'origine  $-s$ . I valori di minimo e massimo di  $s$  si hanno in corrispondenza delle due rette del fascio tangenti alla circonferenza. In questo caso, però, i punti di tangenza  $S$  e  $S'$  sono tali che la retta che passa per  $O$ ,  $S$  e  $S'$  è perpendicolare (condizione di tangenza) alla retta del fascio. La retta che passa per  $O$ ,  $S$  e  $S'$  avrà, allora, coefficiente angolare  $-\frac{1}{-(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} - 1$  e, passando per  $O = (-2, 0)$ , equazione

$$OS : y = (\sqrt{2} - 1)(x + 2)$$

Dunque, le intersezioni di tale retta con la circonferenza  $\gamma$  sono i punti  $S$  e  $S'$  che realizzano rispettivamente minimo e massimo di  $s$ . Con semplici

calcoli otteniamo che tali punti sono le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)(x + 2) \\ (x + 2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \left( -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)$$

$$S' = \left( -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)$$

*Soluzione sintetica.* Come è illustrato in figura 4.11, prendiamo sulla retta  $b$  un segmento  $MB = MP$  e su  $a$  un segmento  $NC = PN$ . Il triangolo

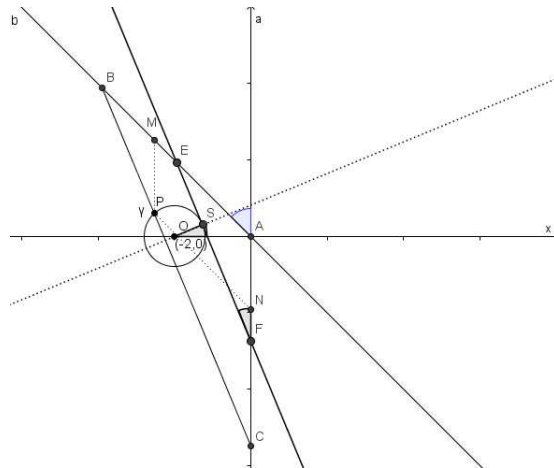


Figura 4.11: Soluzione sintetica Problema 4.1.6

$ABC$  così ottenuto è isoscele, essendo per costruzione

$$AC = AN + NC = AN + PN = MP + AM = AM + MB = AB$$

Inoltre  $s = PM + PN = AB = AC$  per costruzione e, dunque, bisogna trovare sulla circonferenza  $\gamma$  il punto tale che, costruendo il segmento  $AB$ , questo abbia lunghezza minima. In altri termini bisogna trovare la coppia di punti  $(B, C)$ , rispettivamente sulle rette  $b$  e  $a$ , tali che  $ABC$  sia isoscele,  $BC$  intersechi la circonferenza e  $AB = AC = s$  sia minimo. Ciò avviene se  $BC$  tangente la circonferenza. La coppia cercata, allora, è  $(E, F)$

in figura, a cui corrisponde il punto di tangenza  $S$ . Essendo  $OS \perp SF$  e  $OA \perp AF$  risulta

$$\angle SOA = \angle SFA = \frac{\pi - \angle EAF}{2} = \frac{\pi - \frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Pertanto, il punto  $S$  che realizza la condizione di minimo, è quello per cui  $\angle SOA = \frac{\pi}{8}$ .

**Problema 4.1.7** (Sessione suppletiva 1988/89). *Per il vertice  $A$  di un triangolo isoscele  $ABC$  di lato  $AB = a$  e di base  $BC = a\sqrt{3}$ , si conduca la retta non secante il triangolo tale che, condotte su di essa dai vertici  $B$  e  $C$  rispettivamente le perpendicolari  $BD$  e  $CE$ , risulti massimo il perimetro del quadrilatero  $BCED$ .*

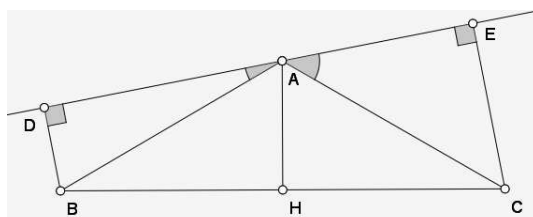


Figura 4.12: Problema 4.1.7

*Soluzione.* Con riferimento alla figura 4.12, notiamo che, condotta da  $A$  l'altezza  $AH$ , risulta

$$BH = BA \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, dunque, il triangolo  $ABH$  è metà di un triangolo equilatero. Vale pertanto  $\angle BAC = 2\angle HAB = \frac{2\pi}{3}$ .

Sia ora  $\angle DAB = \alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq \pi - \angle BAC = \frac{\pi}{3}$ . Risulta chiaramente  $\angle CAE = \frac{\pi}{3} - \alpha$  e, dunque, nei triangoli rettangoli  $BAD$  e  $CEA$  si hanno



le seguenti uguaglianze

$$AD = AB \cos \alpha = a \cos \alpha$$

$$BD = AB \sin \alpha = a \sin \alpha$$

$$AE = AC \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) = a \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$CE = AC \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) = a \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

Rendere massimo il perimetro di  $BCED$  equivale a rendere massima la somma  $BD + DE + EC$ , essendo la misura di  $BC$  fissa. Tale somma vale

$$BD + DE + EC = a \left( \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) + \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right)$$

Ricordando che, per le formule di prostaferesi, vale

$$\sin \alpha + \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)$$

possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} BD + DE + EC &= 2a \left( \sin \frac{\pi}{6} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \frac{\pi}{6} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ &= a(1 + \sqrt{3}) \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

e tale espressione assume valore massimo, quando  $\cos \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)$  è massimo, ovvero, rispettando le limitazioni poste, quando  $\alpha - \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ .

## 4.2 Problemi tratti dalle Olimpiadi della Matematica

**Problema 4.2.1** (Gara di Febbraio 2003). *In un quadrato  $ABCD$  di lato 2, un segmento  $MN$  di lunghezza 1 è vincolato ad avere  $M$  su  $AB$  e  $N$  su  $BC$ . Questo segmento divide il quadrato in un triangolo  $T$  e in un pentagono  $P$ . Trovare il valore massimo assunto dal rapporto  $\frac{T}{P}$ .*

*Soluzione.* Notiamo innanzitutto che  $T + P = 4$ , essendo  $A_{ABCD} = 4$ . Dunque, bisogna trovare il massimo valore che può assumere il rapporto  $\frac{T}{4 - T}$ . Siccome una frazione raggiunge il massimo, quando il reciproco della stessa è minimo, bisogna trovare il minimo di  $\frac{4 - T}{T} = \frac{4}{T} - 1$ . Il problema a questo punto è equivalente a trovare il minimo di  $\frac{4}{T}$ , situazione che si realizza se l'area del triangolo  $T$  è massima.

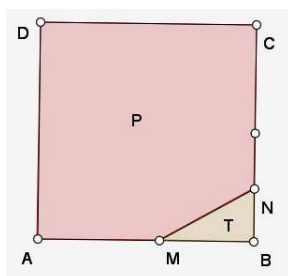


Figura 4.13: Problema 4.2.1

Con riferimento alla figura 4.13, siano  $BM = x$  e  $BN = y$ . L'ipotesi  $MN = 1$  può essere riscritta come  $x^2 + y^2 = 1$  grazie al teorema di Pitagora e dunque, sotto tale ipotesi, bisogna rendere massima l'area  $T$  di  $BMN$  che vale  $\frac{xy}{2}$ . Per il **Problema 1.3.4** ciò avviene se  $x = y$  e, poiché  $x^2 + y^2 = 1$ , risulta  $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Quindi  $T = \frac{xy}{2} = \frac{1}{4}$ . In questo caso  $\frac{T}{P}$  è massimo per quanto detto precedentemente e vale  $\frac{\frac{1}{4}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{15}$ .

**Problema 4.2.2** (Gara di Febbraio 2004). *Una lumaca si arrampica su una colonna cilindrica alta 8 metri, la cui circonferenza di base è lunga 3 metri. Sapendo che partendo dalla base raggiunge la cima facendo esattamente due volte il giro della colonna, e sapendo che si trova esattamente sopra il punto da cui era partita, determinare la strada più breve che può aver percorso la lumaca.*

*Soluzione.* Riformuliamo il problema utilizzando la geometria piana. A tal fine consideriamo che lo sviluppo della superficie di un cilindro è un rettangolo e, pertanto, se la lumaca striscia sulla superficie, vuol dire che si sta muovendo all'interno del rettangolo stesso. A questo punto sviluppiamo la superficie laterale del cilindro come nella figura 4.14, in maniera tale che la posizione iniziale della lumaca coincida con uno dei quattro vertici del rettangolo  $ABCD$ , supponiamo  $A$ .

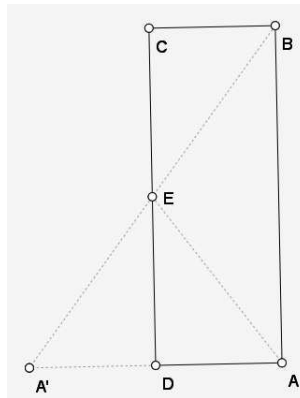


Figura 4.14: Problema 4.2.2

In figura, per le ipotesi del problema,  $AD = 3m$  e  $AB = 8m$ . La lumaca, inoltre, deve raggiungere la cima esattamente al di sopra del punto da cui era partita, ossia  $B$ . Siccome deve anche fare due volte il giro della colonna, deve esistere un punto  $E$  sul lato  $DB$  tale che il percorso si possa dividere in due fasi: il primo giro della colonna  $A \rightarrow E$  e il secondo giro  $E \rightarrow B$ .

A questo punto è doveroso notare che la lumaca può non muoversi descrivendo esclusivamente segmenti, ma potrebbe compiere il suo percorso anche con linee miste. A tal proposito ricordiamo che il segmento è il percorso più breve per congiungere due punti e quindi, per rendere minimo il percorso, la lumaca deve tracciare segmenti.

Il problema è presto riformulato: trovare su  $CD$  il punto  $E$  tale che  $AE + EB$  sia minima. Applicando il risultato mostrato nel **Problema di Erone**, tale punto  $E$  è l'intersezione di  $BA'$  con  $CD$ , dove  $A'$  è il simmetrico di  $A$  rispetto a  $D$ . Ma, essendo  $A'DBC$  un parallelogrammo, le diagonali si tagliano scambievolmente a metà e, dunque,  $CE = ED$ . Il punto cercato, allora, è il punto medio di  $CD$ . In tal caso

$$AE + EB = 2AE = 2\sqrt{AD^2 + DE^2} = 2\sqrt{3^2 + 4^2}m = 10m$$

che è il percorso minimo che la lumaca può compiere.

Furba la lumaca. Con la velocità che si ritrova, seguendo la luce, almeno... *accorcia le distanze!*

**Problema 4.2.3** (Gara di Febbraio 2009). *Il minuscolo, ma preziosissimo, Diamante Dodecaedrico si trova a 2 metri dalla parete sud e 3 metri dalla parete ovest di una stanza rettangolare le cui pareti nord e sud sono lunghe 4 metri e quelle est e ovest sono lunghe 3 metri. Un ladro si cala dal soffitto all'interno della stanza e tocca il pavimento a un metro dalla parete sud e a un metro dalla parete ovest. Si accorge, però, che deve immediatamente disattivare il sistema di allarme, tagliando almeno in un punto un filo che corre ad altezza da terra costante lungo le quattro pareti perimetrali della stanza. Quanti metri è lungo il percorso più breve che deve compiere per raggiungere prima un punto qualsiasi di una delle pareti, e poi il Diamante Dodecaedrico?*

*Soluzione.* Innanzitutto è necessario schematizzare la situazione esposta nella traccia. Nella figura 4.15,  $ABCD$  è la stanza rettangolare di dimensioni  $AB = CD = 4m$  e  $AD = BC = 3m$ . Il Diamante Dodecaedrico si trova nel punto  $P$  che realizza  $PH_1 = 3m$  e  $PK_1 = 2m$ , essendo  $PH_1$  e  $PK_1$  rispettivamente le distanze di  $P$  dai lati  $AD$  e  $AB$ . Il nostro Arsenio Lupin, invece, è nel punto  $L$  che realizza  $LH_2 = 1m$  e  $LK_2 = 1m$ , essendo  $LH_2$  e  $LK_2$  rispettivamente le distanze di  $L$  dai lati  $AD$  e  $AB$ .

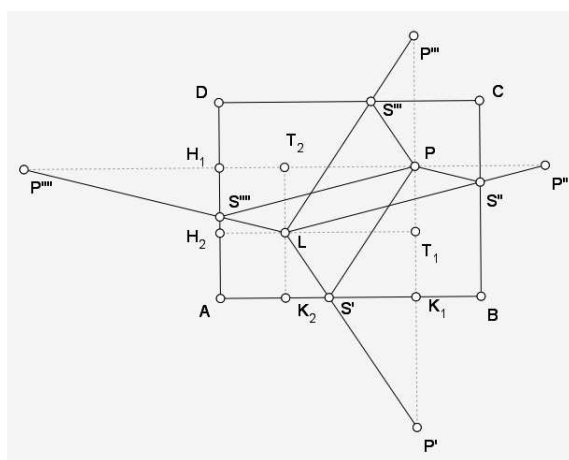


Figura 4.15: Problema 4.2.3

Arsenio Lupin deve muoversi da  $L$  in  $P$  toccando un lato del rettangolo (in cui potrà disattivare il sistema di allarme), in maniera tale da fare il minor cammino possibile. Siamo caduti, quindi, in un quesito che si può risolvere con l'ausilio del **Problema di Erone**.

Non sapendo quale delle quattro pareti conviene usare come appoggio, troviamo il cammino più breve per ogni parete. Siano, pertanto,  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  e  $P''''$  i simmetrici di  $P$  rispetto alle rette dei lati  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$ . Siano, allora,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  e  $S''''$  le intersezioni di  $LP'$ ,  $LP''$ ,  $LP'''$  e  $LP''''$  con le rispettive pareti. Siano  $T_1$  e  $T_2$  rispettivamente le proiezioni di  $L$  su  $PK_1$  e  $PH_1$ . Per il **Problema di Erone** i percorsi più brevi per

le pareti  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$  sono rispettivamente

$$\begin{aligned} LS' + S'P = LP' &= \sqrt{LT_1^2 + T_1P'^2} = \sqrt{(4+9)m^2} = \sqrt{13}m \\ LS'' + S''P = LP'' &= \sqrt{LT_2^2 + T_2P''^2} = \sqrt{(1+16)m^2} = \sqrt{17}m \\ LS''' + S'''P = LP''' &= \sqrt{LT_1^2 + T_1P'''^2} = \sqrt{(4+9)m^2} = \sqrt{13}m \\ LS'''' + S''''P = LP'''' &= \sqrt{LT_2^2 + T_2P''''^2} = \sqrt{(1+16)m^2} = \sqrt{17}m \end{aligned}$$

È chiara, pertanto, la conclusione di Arsenio Lupin: può indifferentemente scegliere la parete  $AB$  o  $CD$  e percorrere, come minimo,  $\sqrt{13}m$ .

**Problema 4.2.4** (Gara di Cesenatico 1996). *Fra i triangoli che hanno un lato  $AB$  fissato e area  $S$  assegnata, si determinino quelli per i quali il prodotto delle altezze è massimo.*

*Soluzione.* Notiamo che, essendo fissato un lato  $AB$  e l'area  $S$ , risulterà fissata anche l'altezza  $h$  relativa al lato  $AB$ . Pertanto il luogo dei punti  $C$  tali che  $ABC$  è un triangolo che soddisfa le ipotesi del problema è rappresentato da due rette parallele alla retta su cui giace  $AB$  e distanti  $h$  da essa. Siccome ogni triangolo che possiamo ottenere prendendo un vertice su una retta lo possiamo ottenere prendendo il simmetrico rispetto ad  $AB$ , che giace sull'altra, senza perdita di generalità possiamo considerarne una sola.

Con l'ausilio della trigonometria, calcoliamo le restanti due altezze  $AH$  e  $BK$  del triangolo

$$AH = AC \sin \angle ACH = AC \sin \gamma, \quad BK = BC \sin \angle KCB = BC \sin \gamma$$

Il prodotto da rendere massimo è, dunque,

$$h \cdot AH \cdot BK = h(AC \cdot BC \sin \gamma) \cdot \sin \gamma$$

Ma, essendo  $AC \cdot BC \sin \gamma = 2S$ , non rimane che rendere massima la quantità  $2Sh \cdot \sin \gamma$  e, dunque, trascurando la costante, bisogna massimizzare  $\sin \gamma$ .

A questo punto richiamiamo il risultato ottenuto nel **Problema 2.9**: esiste un punto  $D \in r$  tale che l'angolo  $\angle ADB$  è massimo. Il punto è sulla circonferenza per  $AB$  tangente in  $D$  a  $r$ . Si distinguono, ora, due casi:

- **Caso 1: l'angolo massimo  $\angle ADB$  è minore o uguale di  $\frac{\pi}{2}$** ; riferendoci alla figura 4.16, si ha che, per ogni altro  $C \in r$ ,

$$\sin \angle ADB > \sin \angle ACB$$

poiché la funzione seno è crescente nell'intervallo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Dunque, il punto  $D$  è il punto che rende massimo il seno dell'angolo ed è, quindi, il punto cercato.

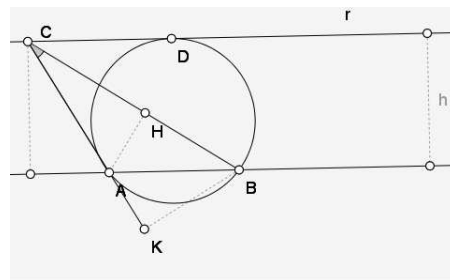


Figura 4.16: Caso 1 Problema 4.2.4

- **Caso 2: l'angolo massimo  $\angle ADB$  è maggiore di  $\frac{\pi}{2}$** ; con riferimento alla figura 4.17 nella pagina seguente, consideriamo la circonferenza di diametro  $AB$  che interseca nei punti  $E$  e  $F$  la retta  $r$ . Si ha che, per ogni punto  $C$  su  $r$ ,

$$\sin \angle AEB = \sin \angle AFB = \sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > \sin \angle ACB$$

poiché  $0 < \angle ACB < \pi$  e, in questo intervallo,  $\frac{\pi}{2}$  è massimo assoluto. In questo caso, quindi, i punti cercati sono due, ossia  $E$  e  $F$ .

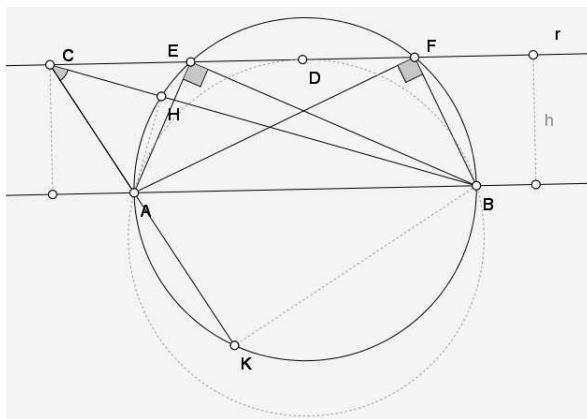


Figura 4.17: Caso 2 Problema 4.2.4

**Problema 4.2.5** (Gara di Cesenatico 1997). *Una striscia di carta con bordi paralleli distanti 3cm viene piegata in modo che una parte di essa risulti parzialmente sovrapposta alla parte rimanente. Qual è l'area minima della zona ombreggiata in figura?*

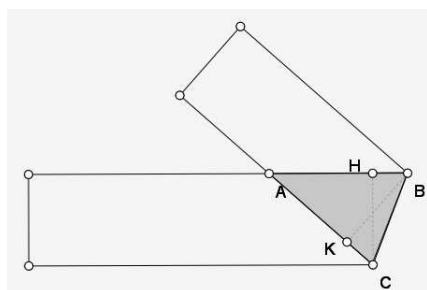


Figura 4.18: Problema 4.2.3

*Soluzione.* Con riferimento alla figura 4.18, condotte da  $C$  e  $B$  le perpendicolari  $CH$  e  $BK$ , risulta chiaramente  $CH = BK = 3\text{cm}$ . L'area del



triangolo può essere allora espressa come

$$A_{ABC} = \frac{AC \cdot BK}{2} = \frac{3}{2}AC$$

e sarà minima, quando è minima la lunghezza  $AC$ . Per il **Problema 2.1**, ciò avviene quando  $A \equiv H$  e, dunque, bisogna piegare la striscia di carta in modo tale che la zona ombreggiata sia un triangolo rettangolo. In tal caso l'area, che è minima, vale  $\frac{3}{2} \cdot 3cm^2 = \frac{9}{2}cm^2$ .

**Problema 4.2.6** (Gara di Cesenatico 2007). *Sia dato nel piano un esagono regolare. Trovare il punto tale che la somma delle distanze di questo dai vertici dell'esagono è minima. Analogamente trovare il punto tale che la somma delle distanze di questo dai lati è minima.*

*Soluzione.* Sia  $ABCDEF$  l'esagono regolare e  $O$  il suo centro, come mostrato nella figura 4.19.

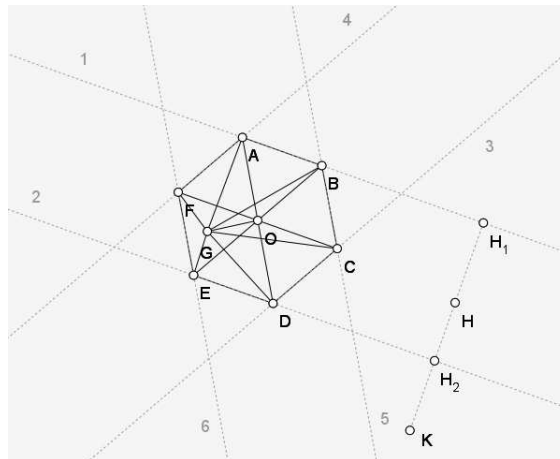


Figura 4.19: Problema 4.2.6

Dimostriamo che  $O$  è il punto che rende minima la somma delle distanze di un punto qualsiasi dai vertici. Infatti, preso qualunque altro punto  $G$ , possiamo scrivere le tre **Disuguaglianze triangolari** applicate ai triangoli  $GAD$ ,  $GBE$  e  $GCF$

$$GA + GD > AD$$

$$GB + GE > BE$$

$$GC + GF > CF$$

e, sommando membro a membro,

$$\begin{aligned} GA + GB + GC + GD + GE + GF &> AD + BE + CF = \\ &= OA + OB + OC + OD + OE + OF \end{aligned}$$

da cui risulta chiaramente che, per l'arbitrarietà di  $G$ ,  $O$  è il punto che rende minima la somma delle distanze dai vertici.

Per la seconda parte del problema facciamo un'osservazione preliminare. Vogliamo, infatti, dimostrare che ogni punto compreso nella striscia delimitata dalle rette 1 e 2 in figura, ha somma delle distanze da queste ultime costante. Questo è quasi ovvio, dal momento che, condotte da un qualsiasi punto  $H$  in questa striscia le perpendicolari  $HH_1$  e  $HH_2$  alle rette 1 e 2, si ha che

$$HH_1 + HH_2 = H_1H_2$$

e  $H_1H_2$  è costante, essendo altezza della striscia. D'altra parte, ogni punto  $K$  all'esterno della striscia delimitata dalle rette 1 e 2 è tale che la somma delle distanze dalle stesse sia maggiore di  $H_1H_2$ . Infatti

$$KH_2 + KH_1 = 2KH_2 + H_1H_2 > H_1H_2$$

Ragionamenti analoghi possono essere fatti per le strisce 3, 4 e 5, 6. Possiamo, dunque, dedurre che, se esistono punti che realizzano la condizione di minimo richiesta dalla traccia, essi appartengono all'intersezione delle tre strisce delimitate da 1, 2; 3, 4 e 5, 6. Essendo l'intersezione di queste strisce l'esagono stesso, vuol dire che tali punti devono essere cercati all'interno dell'esagono.

D'altronde, per ogni punto all'interno dell'esagono, la somma delle distanze dai lati non è che la somma delle altezze delle varie strisce che

è costante, indipendentemente dal punto. Pertanto, i punti cercati sono tutti quelli interni all'esagono e sulla frontiera del poligono stesso.

Anche in questo *poligono*, come nei precedenti, tutti i *tiri* sono andati... *a segno!*

**Problema 4.2.7** (IMO 1961). *In un triangolo di lati  $a, b$  e  $c$ , dimostrare che, essendo  $A$  l'area,*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

*e discutere i casi di uguaglianza.*

*Soluzione.* Proviamo preliminarmente un'identità che ci sarà utile. Vogliamo dimostrare che

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

Moltiplichiamo le prime due parentesi e poi le altre due, notando la fattorizzazione notevole. Sviluppando, risulta

$$\begin{aligned} & (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \\ & = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = \\ & = (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \\ & = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.

A questo punto ricordiamo che l'area di un triangolo  $ABC$ , per la formula nota di Erone, vale

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \end{aligned}$$

Sostituendo nella disuguaglianza ed elevando poi al quadrato, rimane da mostrare che

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq \sqrt{3} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq \\ &\geq 3(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \end{aligned}$$

Sfruttando l'identità precedente e sviluppando i calcoli, la disuguaglianza richiesta è equivalente alla seguente

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 &\geq \\ \geq -3a^4 - 3b^4 - 3c^4 + 6a^2b^2 + 6b^2c^2 + 6c^2a^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \end{aligned}$$

per la cui dimostrazione ricorriamo alla nota disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica in due variabili mostrata nel **Teorema 1.1.1**, applicandola tre volte come segue

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + b^4}{2} &\geq \sqrt{a^4b^4} \Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \\ \frac{b^4 + c^4}{2} &\geq \sqrt{b^4c^4} \Rightarrow b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2 \\ \frac{c^4 + a^4}{2} &\geq \sqrt{c^4a^4} \Rightarrow c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2 \end{aligned}$$

e dalla cui somma

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

otteniamo quanto volevamo mostrare. Il caso di uguaglianza si ha, avendo applicato la disuguaglianza  $AM \geq GM$ , quando  $a^4 = b^4 = c^4$ , ovvero  $a = b = c$ , ossia nel triangolo equilatero.

Da questo problema, mantenendo fissa l'area o la somma dei quadrati dei lati di un triangolo qualsiasi, discendono direttamente due corollari duali:

Fra i triangoli di area costante, quello con somma dei quadrati dei lati minima è il triangolo equilatero.

e:

Fra i triangoli che hanno somma dei quadrati dei lati assegnata, quello di area massima è il triangolo equilatero.

**Problema 4.2.8** (IMO 1981).  $P$  è un punto interno al triangolo  $ABC$  e  $D$ ,  $E$  e  $F$  sono le proiezioni del punto  $P$  sulle rette dei lati  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , come mostrato nella figura 4.20. Trovare i punti  $P$  che rendono minima l'espressione

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

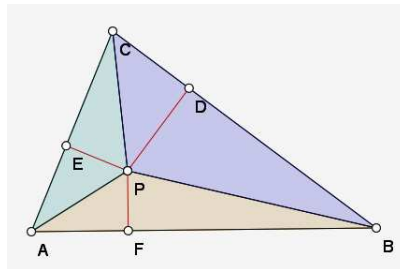


Figura 4.20: Problema 4.2.8

*Soluzione.* Applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz dimostrata nel **Teorema 1.1.3** alle due terne di numeri  $\left(\sqrt{\frac{BC}{PD}}, \sqrt{\frac{CA}{PE}}, \sqrt{\frac{AB}{PF}}\right)$  e  $(\sqrt{BC \cdot PD}, \sqrt{CA \cdot PE}, \sqrt{AB \cdot PF})$  ottenendo

$$\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right) (BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \geq (BC + CA + AB)^2$$

da cui, dividendo, si ottiene

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \geq \frac{(BC + CA + AB)^2}{BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF}$$

Valgono, inoltre, le seguenti uguaglianze

$$BC \cdot PD = 2A_{PBC}$$

$$CA \cdot PE = 2A_{PCA}$$

$$AB \cdot PF = 2A_{PAB}$$

che, sommate, forniscono

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF = 2(A_{PBC} + A_{PCA} + A_{PAB}) = 2A_{ABC}$$

per cui, sostituendo nell' ultima disuguaglianza ottenuta,

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \geq \frac{(AB + BC + CA)^2}{2A_{ABC}}$$

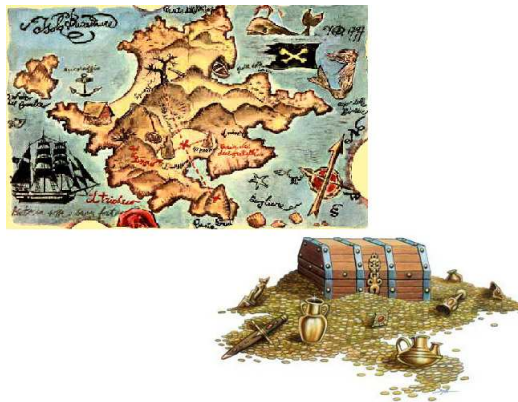
Dunque, l'espressione che vogliamo rendere minima è sempre maggiore o uguale di una determinata costante che non dipende dalla posizione di  $P$ , ma solo dal tipo di triangolo scelto. La stessa raggiunge il minimo, nel caso di uguaglianza. Avendo usato la disuguaglianza dimostrata nel **Teorema 1.1.3**, l'uguaglianza si ha se le due terne sono proporzionali, e cioè, se

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\frac{BC}{PD}}}{\sqrt{BC \cdot PD}} &= \frac{\sqrt{\frac{CA}{PE}}}{\sqrt{CA \cdot PE}} = \frac{\sqrt{\frac{AB}{PF}}}{\sqrt{AB \cdot PF}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{PD} &= \frac{1}{PE} = \frac{1}{PF} \Rightarrow \\ \Rightarrow PD &= PE = PF \end{aligned}$$

Il caso di uguaglianza, e quindi il minimo, si ha quando  $PD = PE = PF$ , ovvero per un punto equidistante dai lati di un triangolo. Esiste solo un punto interno al triangolo con questa proprietà: l'incentro, ovvero l'intersezione delle bisettrici degli angoli interni del triangolo.

Abbiamo navigato a vele spiegate su un oceano d'estasi. Una corsa affascinante che ci ha lasciato in uno stato di magica dipendenza. Di fronte

all'ultimo problema poi siamo rimasti attoniti, sbalorditi: un incanto, che ci ha trasmesso una nostalgia di questo mare di numeri. Abbiamo avuto la sensazione, con questo problema, di essere tornati al punto di partenza, alla disuguaglianza di Schwartz-Cauchy e alla stessa voglia di riprendere il largo. Una circumnavigazione, quindi, un percorso finito ma illimitato, perché di qui si può ripartire nuovamente per affrontare altri problemi ed assistere così al corpo a corpo tra il sole della nostra passione e le nubi nere delle difficoltà, dal cui duello gli orizzonti sembrano insanguinarsi. Abbiamo imparato un atteggiamento nuovo con cui affrontare i problemi, un modo nuovo di posare gli occhi per vedere ciò che non si vede, quello sguardo singolare con cui riusciamo ora a cogliere ciò che è banale e renderne conto da una prospettiva insolita, quell'arte di tessere un legame tra cose che in apparenza non l'hanno. La soluzione così diventa trascinate, coinvolgente, ma nello stesso tempo apre uno spazio in cui ognuno può sbrigliare anche la sua fantasia per trovare soluzioni alternative, inedite: **la soluzione nella soluzione**. Ormai siamo in possesso di mappe concettuali, le cui incredibili ramificazioni rivelano ad ogni contatto dei mondi sconosciuti, permettono di scoprire tesori che nessun pirata può rubarci, nessun virus può distruggere.



*"Nessuna disciplina, più della matematica, è atta a dare il senso, a chi la possiede, di un indistruttibile tesoro spirituale."*

Gaetano Scorza