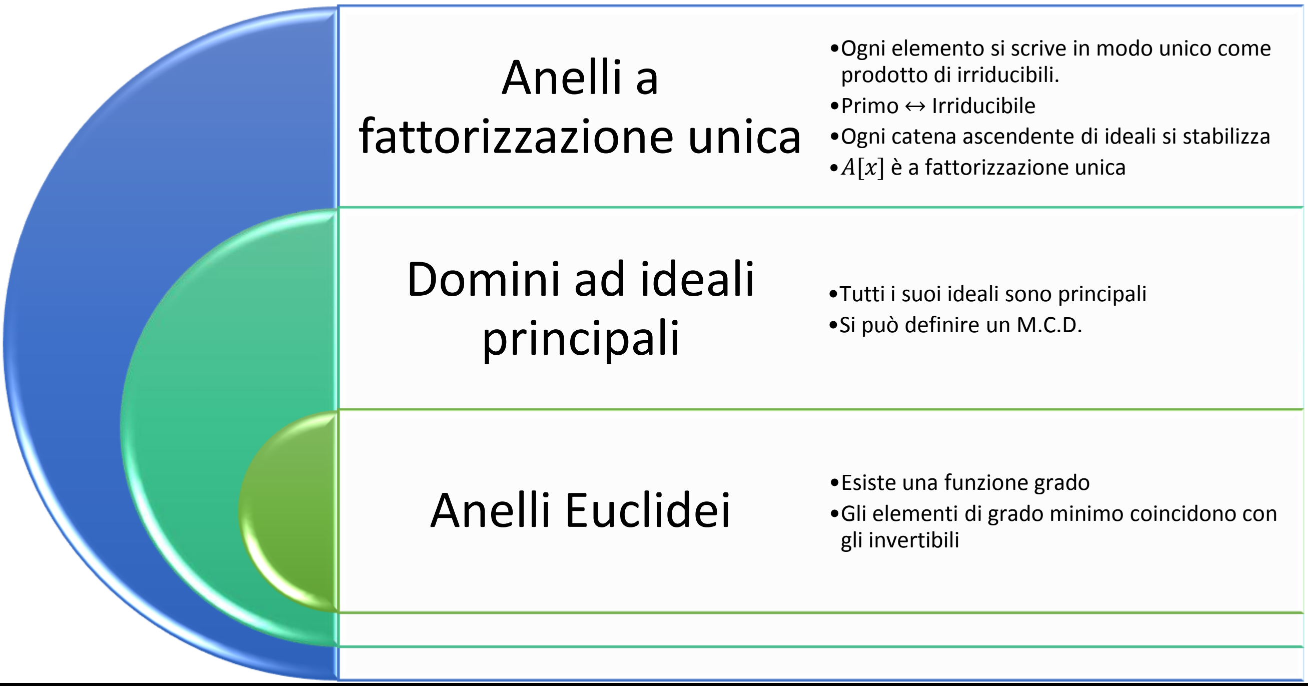
Capitolo 5: Anelli speciali:

Introduzione:
Gli anelli speciali sono anelli dotati di ulteriori proprietà molto forti che ne rendono agevole lo studio.

Proposizione:
Anelli euclidei $\subseteq$ Domini ad ideali principali $\subseteq$ Anelli a fattorizzazione unica



Anelli a fattorizzazione unica:

Un dominio di integrità A si dice Anello a fattorizzazione unica se ogni elemento di A diverso da 0 e non invertibile si scrive in modo unico (A meno dell'ordine e della moltiplicazione per elementi invertibili) come prodotto di elementi irriducibili.

Caratterizzazione:

A è a fattorizzazione unica $\leftrightarrow$ Valgono:

1- Ogni catena ascendente di ideali principali si stabilizza.

2- Ogni elemento irriducibile è primo.

Idea:

Dato un anello a fattorizzazione unica A studiamo l'anello $A[x]$ dei polinomi a coefficienti in A.

Definizione (Contenuto):

Sia $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$, il contenuto di f è $c(f) = M.C.D.(a_n, \dots, a_1, a_0)$

Definizione (Primitivo):

$f \in A[x] \mid c(f) = 1$

Lemma (Prodotto polinomi primitivi è primitivo):

Sia A un anello a fattorizzazione unica e $f, g \in A[x]$. Se $c(f) = c(g) = 1 \rightarrow c(f \cdot g) = 1$

Teorema:

A è un dominio di integrità $\leftrightarrow$ $A[x]$ è un dominio di integrità.

Lemma di Gauss:

Siano A un anello a fattorizzazione unica e $f, g \in A[x]$, allora: $c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g)$

Corollario:

Siano $f, g \in A[x]$, g primitivo e $h \in K[x]$ dove K è il campo quoziente di A; se $f = gh$ allora $h \in A[x]$

Teorema:

Sia $f \in A[x]$:

1. Se $\deg(f) = 0, f \in A$ allora f irriducibile in $A[x]$ $\leftrightarrow$ f irriducibile in A.
2. Se $\deg(f) > 0$, f è irriducibile in $A[x]$ $\leftrightarrow$ f è primitivo ed è irriducibile in $K[x]$ dove K è il campo dei quozienti di A.

Teorema:

Sia A un anello a fattorizzazione unica $\rightarrow A[x]$ è a fattorizzazione unica.

<u>Criterio di irriducibilità di Eisenstein:</u>

Siano A un anello a fattorizzazione unica, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$ e p un elemento primo.
Se:
1. p non divide a_n
2. $p \mid a_i \ \forall\, 0 \leq i < n$
3. p^2 non divide a_0

Allora $f(x)$ è **irriducibile**.

Corollario:

Se p è un numero primo, allora il polinomio $\sum_{i=0}^{p-1} x^i$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Dominio ad ideali principali:

Un dominio di integrità si dice un dominio a ideali principali se tutti i suoi ideali sono principali.

Definizione (Primo):

Sia $x \in A \setminus \{0\}$, x non invertibile, allora x si dice primo se: $\forall a, b \in A$, $x|ab \rightarrow x|a$ o $x|b$

Osservazione:

x primo equivale a dire che (x) è un ideale primo.

Definizione (Irriducibile):

Sia $x \in A \setminus \{0\}$, x non invertibile, allora x si dice irriducibile se: $\forall a, b \in A$, $x = ab \rightarrow a$ invertibile o b invertibile.

Proposizione:

Sia A un dominio ad ideali principali, x è irriducibile $\leftrightarrow$ (x) è massimale.

Corollario:

In un dominio ad ideali principali $x \in A$ primo $\leftrightarrow$ x irriducibile.

Proposizione (Importante):

Ogni catena ascendente di Ideali principali di un dominio ad ideali principali A si stabilizza.

Equivalente:

Se $(x_1) \subseteq (x_2) \subseteq \cdots \subseteq (x_k) \subseteq (x_{k+1}) \subseteq \cdots$ è una catena ascendente di Ideali di A allora $\exists k \in \mathbb{N}$ | $(x_n) = (x_k)\ \forall n \geq k$

Osservazione:

Si può definire un M.C.D. fra due elementi di un anello ad ideali principali a meno di invertibili.

Attenzione:

La differenza con gli anelli euclidei è che non è possibile applicare l'algoritmo di Euclide (Che sfrutta la funzione grado). Quindi non abbiamo un modo standard di calcolarlo.

Teorema (di Fattorizzazione Unica):

Sia A un dominio ad ideali principali, ogni elemento di A diverso da 0 si scrive in modo unico (A meno dell'ordine e della moltiplicazione per elementi invertibili) come prodotto di elementi irriducibili.

Anelli euclidei (E):

Un dominio di integrità A si dice anello euclideo se ∃ una funzione (grado) $d: A\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ |

1. $\forall x, y \in A\setminus\{0\}$ si ha $d(xy) \geq d(x)$
2. $\forall x \in A$, $\forall y \in A\setminus\{0\}$ $\exists q, r \in A$ | $x = qy + r$ e $d(r) < d(y)$ oppure $r = 0$

Esempio:
Anello dei polinomi $K[x]$ con funzione il grado del polinomio.
Anello $\mathbb{Z}$ con grado il valore assoluto.

Esempio:
Interi di Gauss, $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ dove la funzione grado è: $d(a + ib) = a^2 + b^2$

Definizione (Elementi di gradi minimo):

Dato m il minimo valore ottenibile dalla funzione grado $\{x \in A\setminus\{0\} \mid d(x) = m\} \subseteq A\setminus\{0\}$

Proposizione:
Gli elementi di grado minimo di A coincidono con A^*

Proposizione:

Tutti gli ideali di un anello euclideo sono generati da un elemento (Ideali principali)

Definizione (Divisione in un anello euclideo):

Siano $a, b \in A$, diciamo che a divide b se $\exists c \in A \mid b = ca$

Proposizione:
Sia A un anello euclideo, un MCD tra due elementi si può trovare con l'algoritmo delle divisioni successive.

Osservazione:
L'unicità del MCD è assicurata solo a meno di un fattore moltiplicativo, ossia d, u sono MCD tra a e $b \leftrightarrow d = tu$ con $t \in A^*$

Esempi:

Esempio 1:
Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss e studiamo $\big((18+6i):(10)\big)$
Ricordiamo che $\big((18+6i):(10)\big) \coloneqq \{a \in \mathbb{Z}[i] \mid a(10) \subseteq (18+6i)\}$

Soluzione:
Ricordiamo che il modo che abbiamo per determinare se un elemento è irriducibile è la Norma euclidea (Se la norma è un primo è irriducibile).
La condizione espressa è equivalente a $18+6i \mid 10a$ ma $\|18+6i\| = (18+6i)(18-6i) \neq p$ primo.
Quindi: $6(3+i) \mid 10a$ ma questo è equivalente (In un anello speciale vale la legge di eliminazione) a: $3(3+i\,)| \, 5a$ osserviamo che nessuno dei due è irriducibile in quanto hanno norma rispettivamente 10 e $25a^2$. Dunque ricordandoci che a meno di unità l'unico irriducibile di norma 2 è $1+i$ allora:
$3+i=(1+i)(2-i)$ ma 5 è divisibile per $(2-i)$ infatti $5=(2-i)(2+i)$ → la condizione diventa:
$3(1+i)(2-i)| \, (2-i)(2+i)a \to 3(1+i)| \, a \to \big((18+6i):(10)\big) = (3+3i)$