

APV

1

Giulio Del Corso

Indice:

Capitolo 1: Spazi normati, spazi metrici, spazi di funzioni continue e topologia

- 4 Prodotti scalari e Norme
- 5 Distanza e Spazi metrici
- 6 Nozioni di Topologia di uno spazio metrico
- 8 Spazi completi e Spazi di Banach
- 9 Teorema di Fréchet – Kuratowski e Completamenti
- 10 Teorema di estensione per densità di una funzione
- 11 Proprietà universale del completamento
- 12 Varie nozioni di compattezza
- 14 Spazi di funzioni continue
- 15 Teorema di Stone-Weierstrass
- 16 Teorema delle contrazioni
- 18 Teorema di Korovkin e Teorema di Ascoli – Arzelà
- 19 Curve rettificabili
- 20 Applicazioni lineari tra spazi vettoriali normati

- 22 Spazio delle funzioni lineari e continue
- 23 Spazio delle funzioni bilineari e continue
- 25 Perturbazioni Lipschitziane dell'Identità

Capitolo 2: Calcolo differenziale in \mathbb{R}^n

- 27 Differenziale di Fréchet
- 28 Combinazione, composizione ed inversa di funzioni differenziabili
- 30 Teorema del valor medio
- 31 Derivate direzionali e parziali
- 32 Differenziazione parziale e totale
- 33 Teorema del differenziale totale
- 34 Gradiente, Jacobiana ed Hessiana
- 36 Simmetria del differenziale secondo
- 38 Spazio convesso
- 39 Teorema di inversione locale
- 41 Teorema della funzione implicita (Dini)
- 42 Massimi e minimi per funzioni a più variabili
- 44 Massimi e minimi vincolati
- 46 Teorema dei moltiplicatori di Lagrange
- 47 Linearità e differenziabilità in senso complesso
- 48 T. di non retrazione e T. del punto fisso di Brouwer

Capitolo 3 Equazioni differenziali ordinarie in \mathbb{R}^n

- 50 Equazioni differenziali
- 51 Sistemi differenziali
- 52 Problema di Cauchy, T. di esistenza e unicità locale
- 53 Dipendenza continua dai dati iniziali, prolungamento delle soluzioni
- 54 Soluzione massimale e globale
- 55 Equazioni differenziali a variabili separate
- 57 Equazioni differenziali lineari di primo ordine
- 58 Equazioni di Bernoulli, Riccati, non lineari omogenee
- 59 Sistemi di equazioni differenziali lineari
- 60 Operatore di transizione
- 61 Equazioni differenziali lineari non omogenee usando l'operatore autonomo
- 62 Esponenziazione di matrici
- 63 Fuga dai compatti
- 64 Analisi qualitativa e Lemma di Gronwall

Capitolo 4: Forme differenziali ed integrali di linea

- 66 Forme differenziali
- 67 Integrale di linea
- 68 Forme differenziali esatte
- 69 Forme differenziali chiuse
- 70 Derivata sotto il segno di integrale
- 71 Omotopie
- 72 Dominio semplicemente connesso

Capitolo 5: Misura ed integrale di Lebesgue

- 74 Misura di Lebesgue
- 75 Intervalli e misura elementare
- 76 Teoria della misura
- 77 T. di Estensione e Algebra di Borel
- 79 Controesempio di Vitali
- 80 Funzioni misurabili
- 82 Funzioni semplici e Teorema delle funzioni semplici
- 83 Integrale di Lebesgue
- 84 Teorema di Beppo – Levi, Disuguaglianza di Fatou
- 85 Funzioni integrabili e disuguaglianza di Markov
- 86 Scomposizione di funzioni integrabili
- 87 Spazio delle funzioni integrabili, quoziente e convergenza dominata
- 88 Integrazione per serie
- 90 Spazi di misura prodotto
- 91 Teorema di Fubini, Teorema di Tonelli
- 92 Insiemi di misura
- 93 Formula del cambio di variabili
- 94 Misura k -dimensionale di Lebesgue su sottospazi lineari di \mathbb{R}^n

Spazi normati, spazi metrici, spazi di funzioni continue, topologia

Definizione (Prodotto Scalare):

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso, un prodotto scalare su X è un'applicazione da $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) dotata delle seguenti proprietà:

1. $\langle u, u \rangle_X \geq 0 \forall u \in X$ e $\langle u, u \rangle_X = 0 \leftrightarrow u = 0$
2. $\langle u, v \rangle_X = \langle v, u \rangle_X \forall u, v \in X$
3. $\langle \lambda u + \mu u^*, v \rangle_X = \lambda \langle u, v \rangle_X + \mu \langle u^*, v \rangle_X \forall u, u^* \in X, \lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$

Notazione:

$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle_X$$

Esempio:

In \mathbb{R}^n $\langle x, y \rangle_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ è detto prodotto scalare canonico su \mathbb{R} .

In \mathbb{R}^n $\langle x, y \rangle_n = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ è detto prodotto scalare canonico su \mathbb{C} .

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

Se X è uno spazio con prodotto scalare allora si ha:

$$|\langle x, y \rangle_X| \leq \langle x, x \rangle_X^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle_X^{\frac{1}{2}} \quad \forall x, y \in X$$

Dimostrazione:

Fissati $x, y \in X$; $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (x + \lambda y), (x + \lambda y) \rangle_X = \langle x, x \rangle_X + \lambda \langle y, x \rangle_X + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle_X + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle_X = \\ &= \langle x, x \rangle_X + \langle \lambda y, x \rangle_X + \overline{\langle \lambda y, x \rangle_X} + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle_X = \langle x, x \rangle_X + 2 \cdot \operatorname{Re} \langle \lambda y, x \rangle_X + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle_X \end{aligned}$$

Se $\langle y, x \rangle_X = 0$ finita la dimostrazione.

Se $\langle y, x \rangle_X \neq 0$ se scegliamo $\lambda = -\langle x, x \rangle_X \langle y, x \rangle_X^{-1}$ otteniamo al tesi.

Definizione (Norma):

Dato X spazio vettoriale, una norma su X è una funzione $\| \cdot \|: X \rightarrow [0, \infty[$ tale che:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}; \forall x \in X$
3. $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\| \quad \forall x, x' \in X$

Se su X è definita una norma allora $(X, \| \cdot \|)$ si dice **Spazio normato**.

Definizione (Norma di Frobenius):

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Osservazione:

$\| \cdot \|_2$ è detta norma euclidea.

$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$ è detta norma uniforme.

Esempi di norme su $C[a, b]$:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|f\|_\infty = \sup_{t \in A} f(t)$$

Teorema (Condizioni norma indotta da un prodotto scalare):

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora la norma di X è indotta da un prodotto scalare $\leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Dimostrazione:

Acquistapace 2 pagina 29

Definizione (Distanza):

Sia X un insieme non vuoto, una distanza o metrica su X è una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ |

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

Definizione (Spazio metrico):

È uno spazio dotato di una distanza (X, d)

Osservazione:

Tutti gli spazi normati sono metrici con la distanza $d(x, y) = \|x - y\|$

Nozioni di topologia:

Definizione (Palla aperta):

Sia (X, d) uno spazio metrico. Se $x_0 \in X$ e $r > 0$ allora la palla di cenro x_0 e raggio r è l'insieme:

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

Definizione (Intorno):

Sia (X, d) uno spazio metrico e $x_0 \in X$, allora un intorno di x_0 è un insieme $U \subseteq X \mid \exists r > 0$ per cui $B(x_0, r) \subseteq U$

Definizione (Aperto):

Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice aperto se $\forall x_0 \in A \exists r > 0 \mid B(x_0, r) \subseteq A$.

Definizione (Spazio topologico):

Uno spazio topologico è un insieme X unito un insieme $Q \subseteq P(X)$, detto dei suoi aperti, tale che:

$$\emptyset, X \in Q$$

$$A, B \in Q \rightarrow A \cap B \in Q$$

$$A_i \in Q \rightarrow \bigcup_i A_i \in Q$$

Definizione (Successione convergente):

Sia (X, d) uno spazio metrico e x_n una successione contenuta in X . Allora x_n converge ad un punto $x \in X$ (Ha limite x) se risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (x_n \rightarrow x)$$

Osservazione:

Se X è normato $x_n \rightarrow x \leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

Definizione (Punto di accumulazione):

Sia (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X, A \subseteq X$ allora x_0 è un punto di accumulazione per $A \leftrightarrow$ ogni intorno di x_0 ha intersezione non banale con A .

Equivalente:

\exists una successione $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ che converge ad x_0 .

Definizione (Chiuso):

Sia (X, d) uno spazio metrico. $B \subseteq X$ si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Proposizione:

Sia (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora A è aperto $\leftrightarrow A^c$ è chiuso.

Definizione (Chiusura, parte interna, frontiera):

Dato $E \subseteq (X, d)$.

\bar{E} è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti E (Chiusura)

E° è l'unione di tutti gli aperti contenuti in E (Parte interna)

$\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ (Frontiera)

Definizione (Limitato):

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice limitato se \exists una palla $B(x_0, r)$ contenente A .

Definizione (Funzione continua):

Siano (X, d) ; (Y, δ) due spazi metrici. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu > 0 \mid d(x, x_0) < \mu \rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Osservazione:

La funzione f si dice continua se è continua in ogni suo punto.

Definizione (Successione di Cauchy):

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x_n := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ una successione contenuta in X .

Diciamo che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \forall n, m \geq \bar{n}$

Osservazione:

Ogni successione convergente è di Cauchy.

Proprietà successioni di Cauchy:

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy, allora:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata (Equivalente: appartiene definitivamente ad una palla aperta)

Se esiste una sottosuccessione convergente ad \bar{x} allora $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a \bar{x}

Osservazione:

Uno spazio metrico compatto per successioni è completo in quanto ogni successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente.

Definizione (Spazio Completo):

Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente ad un elemento di X .

Definizione (Spazio di Banach):

Uno Spazio di Banach è uno spazio vettoriale normato completo.

Se la norma è indotta da un prodotto scalare si dice **Spazio di Hilbert**.

Proposizione:

Uno spazio metrico (X, d) è compatto \leftrightarrow è completo e totalmente limitato.

Dimostrazione:

Acquistapace 2 pagina 43

Quozienti di spazi normati:

Sia V un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$

Il quoziente E/V si può dotare di una norma $\|\cdot\|_{E/V}$ | $\pi: E \rightarrow E/V$ è una funzione continua e aperta con

$$\pi(B_E(0, r)) = B_{E/V}(0, r)$$

Costruzione:

Basta porre (E verificare) la norma:

$$\forall \xi \in E/V \quad \|\xi\|_{E/V} := \inf_{\pi(x)=\xi} \|x\|_E$$

Equivalente:

$$\text{Se } \xi = x_0 + V \text{ allora } \|\xi\|_{E/V} := \inf_{v \in V} \|x_0 + v\|_E$$

Osservazione:

Se E è di Banach allora lo è anche E/V con la norma così indotta.

Teorema di Fréchet – Kuratowski:

Ogni spazio metrico (X, d) si immerge "isometricamente" in uno spazio di Banach.

Equivalente:

$$\exists \Phi: X \rightarrow (E, \|\cdot\|) \mid \forall x, x' \in X \quad d(x, x') = \|\Phi(x) - \Phi(x')\|$$

Dimostrazione:

Fissiamo $x_0 \in X$ e consideriamo la seguente funzione:

$$\varphi_x: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0) \text{ ossia } \varphi_x := d(\cdot, x) - d(\cdot, x_0)$$

φ_x è limitata

$$\forall y \in X \quad |\varphi_x(y)| = |d(y, x) - d(y, x_0)| \leq d(x, x_0) \rightarrow \|\varphi_x\|_\infty \leq d(x, x_0) < +\infty$$

φ_x è continua

È differenza di due distanze che sono funzioni continue.

φ_x è 2-Lipschitziana

$$|\varphi_x(y) - \varphi_x(z)| = |d(y, x) - d(y, x_0) - d(z, x) + d(z, x_0)| \leq 2 \cdot |d(y, z)|$$

Quindi $\forall x \in X \quad \varphi_x \in C^0(X, \mathbb{R})$ è ben definita.

Concludiamo dimostrando che:

$$\forall x, x' \quad \|\Phi(x) - \Phi(x')\|_\infty = \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, x')| = d(x, x')$$

Infatti:

$$\forall x, x', y \quad |d(y, x) - d(y, x')| \leq d(x, x') \rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(x')\|_\infty \leq d(x, x')$$

Ponendo $y = x'$ allora:

$$|d(x', x) - d(x', x')| = d(x, x') \rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(x')\|_\infty \geq d(x, x')$$

Quindi:

$$\|\Phi(x) - \Phi(x')\|_\infty = d(x, x')$$

Definizione (Completamento):

Un completamento di uno spazio metrico (X, d) è uno spazio metrico completo (X', d') assieme ad una inclusione $j: (X, d) \rightarrow (X', d')$ che sia:

$$\text{Isometrica } d(x, x') = d'(j(x), j(x')) \quad \forall x, x' \in X$$

$$\text{Densa } \overline{j(X)} = X'$$

Osservazione:

Esiste per il Teorema di Fréchet – Kuratowski.

Teorema (Estensione per densità di una funzione unif. continua a valori in uno spazio metrico completo):

Sia X uno spazio metrico e Y uno spazio metrico completo, $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso in X e $f: A \rightarrow Y$ una funzione uniformemente continua.

Allora $\exists! \tilde{f}: X \rightarrow Y$ uniformemente continua | $\tilde{f}|_A = f$.

Inoltre f e \tilde{f} hanno lo stesso modulo di continuità.

Dimostrazione:**Esistenza:**

Sia $\tilde{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ con $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ una qualsiasi successione convergente ad $x \in X$

Osservazione:

Per densità di A in X questa successione esiste (Ogni punto di X è di accumulazione per A).

Osservazione:

Se $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e f è uniformemente continua allora $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy.

$$\text{Infatti } d(f(x_p), f(x_q)) \leq \omega(d(x_p, x_q))$$

Quindi essendo Y completo \forall successione scelta $\exists! \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \in Y$

Dunque $\tilde{f}(x)$ è ben definita in quanto il limite non dipende dalla successione di Cauchy scelta.

Consideriamo infatti $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x'_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ convergenti ad $x \in X$

Allora la successione $\xi_{2i+k} = \begin{cases} x_i & \text{se } k = 0 \\ x'_i & \text{se } k = 1 \end{cases}$ (Unione delle due) è di Cauchy convergente ad

$x \in X$

$$\text{Allora } \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \tilde{f}(x) \rightarrow \lim_{\substack{i \rightarrow +\infty \\ k=0,1}} f(\xi_{2i+k}) = \tilde{f}(x) \rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x'_k) = \tilde{f}(x)$$

Quindi $\tilde{f}(x)$ è ben definita $\forall x \in X$

Unicità:

Siano $\tilde{f}_1(x); \tilde{f}_2(x)$ due funzioni uniformemente continue, allora sono anche continue.

Due funzioni che coincidono su un denso coincidono sull'insieme intero.

Modulo:

Sia ω modulo di continuità per $f: A \rightarrow Y$

Osservazione:

$$\omega: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty] \mid \omega(0) = 0; \lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0; d(f(x), f(x')) \leq \omega(d(x, x')) \forall x, x' \in A$$

Allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x, x' \in A \ d(x, x') < \delta \rightarrow d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

Consideriamo lo stesso ε e di conseguenza lo stesso δ su Y :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x, x' \in X \ d(x, x') < \delta \rightarrow d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

Questo deriva dal fatto che, considerando le sue successioni $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x'_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ con

$$x_k \rightarrow x, x'_k \rightarrow x', \text{ da } d(x, x') < \delta \rightarrow d(x_k, x'_k) < \delta \text{ definitivamente in } A \rightarrow d(f(x_k), f(x'_k)) \leq \varepsilon$$

$$\text{definitivamente } \rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f(x_k), f(x'_k)) = d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

Quindi i due moduli di continuità sono gli stessi.

Proprietà universale del completamento metrico:

Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio metrico completo, $f: X \rightarrow Y$ una funzione uniformemente continua.

Allora:

$\exists! \tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y \mid \tilde{f} \circ j = f$ con \tilde{X} completamento di X e j inclusione isometrica e densa di X in \tilde{X} .

$$\begin{array}{ccc} (X, d) & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow j & \nearrow \tilde{f} \\ & (\tilde{X}, \tilde{d}) & \end{array}$$

Inoltre \tilde{f} è uniformemente continua.

Osservazione:

Il completamento di uno spazio metrico è unico a meno di isometrie.

Completezza negli spazi normati:

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, allora sono equivalenti:

1. E è completo (Ossia è uno spazio di Banach)
2. Se $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ con $\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\| < +\infty$ (Assoluta convergenza) allora $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ è convergente in E
3. Se $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ è una successione e $\|u_k\| \leq 2^{-k} \forall k \in \mathbb{N}$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ è convergente in E

Dimostrazione:

1 \rightarrow 2

Sia $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ con $\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\| < +\infty$. Definiamo $S_n := \sum_{k=0}^n u_k$, $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \|u_k\|$

Allora σ_n è convergente in \mathbb{R} e dunque è di Cauchy. Per disuguaglianza triangolare si ha:

$$\forall p, q \quad \|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=p+1}^q u_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|u_k\| = |\sigma_p - \sigma_q|$$

Allora S_n è di Cauchy per E , dunque converge essendo per ipotesi E è completo.

2 \rightarrow 3

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 2 < +\infty \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$$

3 \rightarrow 1

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy, ci basta esibire una sottosuccessione convergente.

Per ipotesi $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k \in \mathbb{N}$ (imponiamo $n_{k+1} > n_k$) $\mid \forall p, q \geq n_k \quad \|x_p - x_q\| \leq 2^{-k}$

Definiamo $\begin{cases} u_0 = x_{n_0} \\ u_k = x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \end{cases}$ allora $\|u_k\| = \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq 2^{-(k-1)}$

Da questo segue che $\sum_{j=0}^k u_j = x_{n_k}$ converge per l'ipotesi da cui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ converge in E .

Varie nozioni di compattezza:

Sia X uno spazio topologico:

Definizione (Compattezza secondo Heine-Borel):

X si dice compatto secondo Heine-Borel se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Definizione (Numerabilmente compatto):

X si dice numerabilmente compatto se ogni ricoprimento aperto numerabile ammette un sottoricoprimento finito.

Definizione (Separabile):

X si dice separabile se esiste un sottoinsieme numerabile e denso.

Definizione (Proprietà di Lindelöf):

X gode della proprietà di Lindelöf se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile.

Definizione (Proprietà di Bolzano-Weierstrass):

X gode della proprietà di Bolzano-Weierstrass se ogni sottoinsieme di X di cardinalità infinita ammette un punto di accumulazione.

Dato (X, d) spazio metrico.

Definizione (Sequenzialmente compatto).

X si dice sequenzialmente compatto se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente.

Definizione (Totalmente limitato):

X si dice totalmente limitato se $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_n \in X \mid X = \bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, \varepsilon)$

Proprietà:

Proposizione:

X è compatto secondo Heine-Borel \leftrightarrow Numerabilmente compatto e gode della proprietà di Lindelöf

Proposizione:

X è numerabilmente compatto \leftrightarrow gode della proprietà di Bolzano-Weierstrass (Per sottoinsiemi numerabili)

Proposizione:

(X, d) spazio metrico è sequenzialmente compatto \leftrightarrow numerabilmente compatto e primo - numerabile

Proposizione:

Uno spazio metrico è separabile \leftrightarrow gode della proprietà di Lindelöf

Proposizione:

Uno spazio metrico è sequenzialmente compatto \leftrightarrow è completo e totalmente limitato.

Dimostrazioni:

Appunti pagina 314

Spazi di funzioni continue:

Proposizione:

Lo spazio normato $(C[a, b], \| \cdot \|_\infty)$ è completo (Spazio di Banach)

Dimostrazione:

Acquistapace 2 pagina 44

Osservazione:

$(C[a, b], \| \cdot \|_k)$ non è completo.

Esempio interessante:

$(C[a, b], \| \cdot \|_1)$ non è completo.

Consideriamo la successione di funzioni:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ n \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right) & \text{se } \frac{a+b}{2} \leq t \leq \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq b \end{cases}$$

Questa successione di funzioni è di Cauchy ma converge ad una funzione non continua.

Definizione:

Sia S uno spazio metrico ed $(E, \| \cdot \|)$ uno spazio vettoriale normato, possiamo definire:

$$UC_b(S, E) = \{f: S \rightarrow E \mid f \text{ uniformemente continua e limitata}\}$$

Teorema (di Weierstrass):

Le funzioni polinomiali su $[a, b]$ sono un insieme denso sullo spazio di Banach $(C^0(a, b), \| \cdot \|_\infty)$

Dimostrazione:

Appunti pagina 338

Polinomi di Bernstein:

Si definisce come n -esimo polinomio di Bernstein di f :

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ per } t \in [0,1]$$

Verso il teorema di Stone Weierstrass:

Definizione (Algebra di funzioni):

Un'algebra di funzioni A è uno spazio vettoriale di funzioni stabile anche per il prodotto di funzioni
($f, g \in A \rightarrow f \cdot g \in A$)

Definizione (Reticolo):

Un reticolo R di funzioni su S è un sottoinsieme di \mathbb{R}^S stabile per massimo e minimo
($f, g \in R \rightarrow f \vee g, f \wedge g \in R$)

Osservazione:

$$\begin{cases} f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \text{ min} \\ f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ max} \end{cases}$$

Quindi un sottospazio vettoriale R è un reticolo $\leftrightarrow f \in R \rightarrow |f| \in R$

Definizione (Famiglia separante):

$F \subseteq \mathbb{R}^S$ si dice famiglia separante $\leftrightarrow \forall x, y \in S, x \neq y \exists f \in F \mid f(x) \neq f(y)$

Teorema di Stone-Weierstrass:

Sia X uno spazio topologico compatto e $A \subseteq C^0(X, \mathbb{R})$ un'algebra separante di funzioni continue su X . Allora le possibilità sono due:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= C^0(X, \mathbb{R}) \\ \exists x_0 \in X \mid \bar{A} &= \{f \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid f(x_0) = 0\} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 349

Osservazione:

Ogni algebra uniformemente chiusa di funzioni limitate è un reticolo.

Teorema di Stone-Weierstrass caso complesso:

Sia X uno spazio topologico compatto e $(C^0(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ l'algebra delle funzioni continue a valori in \mathbb{C} . Sia $A \subseteq C^0(X, \mathbb{C})$ un'algebra separante di funzioni continue |

$$1 \in A; f \in A \rightarrow \bar{f} \in A$$

Allora: $\bar{A} = C^0(X, \mathbb{C})$

Dimostrazione:

Appunti 364

Teorema delle contrazioni:

Definizione (Contrazione):

Sia (X, d) uno spazio metrico, una contrazione su X è un'applicazione $F: X \rightarrow X$ per la quale $\exists \lambda \in [0,1[$ | $d(F(x), F(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x') \quad \forall x, x' \in X$

Osservazione:

Le contrazioni sono funzioni uniformemente continue.

Tutte le $f \in C^1(\mathbb{R})$ con derivata limitata sono contrazioni (Per il Teorema di Lagrange).

Teorema delle Contrazioni:

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $F: X \rightarrow X$ una contrazione.

Allora F ha un unico punto fisso, ossia $\exists! \bar{x} \in X \mid F(\bar{x}) = \bar{x}$

Dimostrazione:

Per ipotesi $\exists \lambda \in [0,1[$ | $d(F(x), F(x')) \leq \lambda d(x, x') \quad \forall x, x' \in X$

Sia $x^* \in X$ arbitrario. Definiamo la successione: $\begin{cases} x_0 = x^* \\ x_{n+1} = F(x_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Osserviamo che $d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \rightarrow$
 $\rightarrow d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \cdot d(x_1, x_0)$

Generalizzando $m > n$ allora $d(x_m, x_n) \leq \sum_{h=n}^{m-1} d(x_{h+1}, x_h) \leq \sum_{h=n}^{m-1} \lambda^h \cdot d(x_1, x_0)$ ed essendo la serie convergente allora la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy in X .

Essendo X completo essa converge ad un elemento $\bar{x} \in X$, dimostriamo che è un punto fisso:

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, F(\bar{x})) &\leq d(\bar{x}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(\bar{x})) = d(\bar{x}, x_{n+1}) + d(F(x_n), F(\bar{x})) \leq \\ &\leq d(\bar{x}, x_{n+1}) + \lambda \cdot d(x_n, \bar{x}) \end{aligned}$$

Da cui, per $n \rightarrow \infty$, $d(\bar{x}, F(\bar{x})) = 0 \rightarrow F(\bar{x}) = \bar{x}$

Esso è unico in quanto se $\underline{x} \in X$ altro punto fisso, avremmo:

$$d(\bar{x}, \underline{x}) = d(F(\bar{x}), F(\underline{x})) \leq \lambda \cdot d(\bar{x}, \underline{x}) \text{ che è assurdo.}$$

Osservazione:

Alcune applicazioni $F: X \rightarrow X$ possono diventare contrazioni cambiando la metrica su X .

Proposizione (Contrazione n -esima):

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $F: X \rightarrow X \mid \exists n \in \mathbb{N}$ per cui $F^n: X \rightarrow X$ sia una contrazione.

Allora F ha un unico punto fisso.

Inoltre questo può essere ottenuto iterando F a partire da un qualunque $x_0 \in X$

Dimostrazione:

Dal teorema delle contrazioni $\exists! y \in X \mid F^n(y) = y$, se ci fossero due punti fissi di F allora sarebbero anche punti fissi di F^n , Assurdo.

Detto $\bar{x} \in X \mid F^n(\bar{x}) = \bar{x} \rightarrow F^n(F(\bar{x})) = F(F^n(\bar{x})) = F(\bar{x}) \rightarrow$ per unicità del punto fisso $F(\bar{x}) = \bar{x}$

Sia $x_0 \in X$ e consideriamo le iterazioni $F^h(x_0)$ e suddividiamole per classi di resto modulo n .

Dato $0 \leq r \leq n - 1$ allora abbiamo $F^h(x_0) = F^{nk+r}(x_0) = (F^n)^k(F^r(x_0))$ che per il teorema delle contrazioni converge ad \bar{x} per qualunque $0 \leq r \leq n - 1$

Allora $F^h(x_0) \rightarrow \bar{x} \quad \forall x_0 \in X$

Teorema delle contrazioni dipendenti da parametro:

Siano (B, δ) uno spazio metrico, (X, d) uno spazio metrico completo e $T: B \times X \rightarrow X$ un'applicazione continua. Supponiamo inoltre che $\exists \lambda \in [0, 1[\mid d(T(b, x), T(b, x')) \leq \lambda \cdot d(x, x') \quad \forall x, x' \in X \quad \forall b \in B$

Allora $\forall b \in B \exists! x_b \in X \mid T(b, x_b) = x_b$ e la funzione $b \rightarrow x_b$ da B in X è continua.

Dimostrazione:

Acquistapace 2 pagina 62.

Proposizione:

Tutte le norme di uno spazio vettoriale reale finitamente generato sono equivalenti.

Dimostrazione:

Basta osservare che data una norma qualsiasi ($\| \cdot \|$) e fissata una di riferimento ($\| \cdot \|_\infty$) queste sono equivalenti.

Pagina 81 appunti.

Teorema di Korovkin:

Sia $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sequenza di trasformazioni lineari e positive di $C^0([0,1])$ (Generalizzabile a $C^0([a,b])$).

Dette $f_0(x) = 1$; $f_1(x) = x$; $f_2(x) = x^2$

Se vale:

$$\forall i = 0,1,2 \quad \|L_n(f_i) - f_i\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

Allora:

$$\forall f \in C^0([0,1]); \|L_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 342

Definizione (Famiglia equicontinua di applicazioni):

Siano X, Y spazi metrici, X compatto.

Una famiglia $\Lambda \subseteq C^0(X, Y)$ si dice uniformemente equicontinua \leftrightarrow Le $f \in \Lambda$ ammettono un modulo di continuità comune.

Oppure:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x, x' \in X; \forall f \in \Lambda \quad d(x, x') < \delta \rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Oppure:

La funzione di valutazione $v: \Lambda \times X \rightarrow Y \mid v(f, x) = f(x)$ è uniformemente continua.

Osservazione:

$$\Lambda \text{ è dotata della distanza uniforme: } d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Dimostrazione equivalenza:

Appunti pagina 319

Proposizione:

Siano X uno spazio metrico compatto ed E uno spazio di Banach.

Sia $\Lambda \subseteq C^0(X, E)$ con Λ compatto.

Allora Λ è una famiglia equicontinua.

Dimostrazione:

Appunti pagina 322

Corollario:

$\bar{\Lambda}(X) = \{f(x) \mid f \in \bar{\Lambda}, x \in X\}$ è compatto in E .

Teorema di Ascoli – Arzelà:

Siano X uno spazio metrico compatto ed $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Sia $\Lambda \subseteq C^0(X, E)$.

Allora Λ è relativamente compatto $\leftrightarrow \Lambda$ è una famiglia equicontinua e

$\forall x \in X, \Lambda(x) = \{f(x) \mid f \in \Lambda\}$ è relativamente compatto.

Dimostrazione:

Appunti pagina 323

Definizione (Lunghezza di una curva):

Sia $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, la **lunghezza** di una curva φ è il numero (eventualmente infinito):
 $l(\varphi) = \sup_{\sigma} l(S_{\sigma})$ con σ ogni possibile suddivisione finita di I .

Definizione (Curva rettificabile):

Una curva φ è rettificabile se ha lunghezza $l(\varphi)$ finita.

Teorema

Sia $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 , allora vale:

$$l(\varphi) = \int_I |\varphi'(t)|_n dt$$

Quindi ogni curva di classe C^1 definita su di un intervallo chiuso e limitato è rettificabile.

Dimostrazione:

Acquistapace 2 pagina 366

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali normati:

Proposizione:

Le operazioni di somma $(+ : E \times E \rightarrow E)$, prodotto per scalare $(\cdot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E)$ e norma $(\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R})$ su di uno spazio vettoriale normato $(E, \| \cdot \|)$ sono continue.

Dimostrazione:

Somma:

Supponiamo la norma continua e consideriamo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E ; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x ;$

$(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E ; (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x'$

Allora $\|x_n + x'_n - x - x'\| \leq \|x_n - x\| + \|x'_n - x'\|$.

Prodotto:

Consideriamo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E ; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$, allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ vale $\|\lambda(x_n - x)\| = |\lambda| \cdot \|x_n - x\|$ che è continua perché la norma è continua.

Norma:

La norma è 1-Lipschitziana e quindi continua.

Infatti $\forall x, y \in E \quad \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

Corollario:

Ogni applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow (E, \| \cdot \|)$ spazio vettoriale normato è continua.

(Definita come: dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow L(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ con $v_i = L(e_i)$)

Dimostrazione:

Le proiezioni $\pi_i(x) = x_i$ sono funzioni continue, la funzione $L_i(x_i) = x_i v_i$ sono continue e le operazioni su $(E, \| \cdot \|)$ sono continue.

Dunque $L(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ è continua.

Proposizione:

Sia $L: X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali normati.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. L è Lipschitziana ($\exists C \in \mathbb{R} \mid \forall x, y \in X \ \|Lx - Ly\|_Y = \|L(x - y)\|_Y = \|Lv\|_Y \leq C \cdot \|x - y\|_X = C \cdot \|v\|_X$)
2. L è continua
3. L è localmente limitata in 0 ($\exists U$ intorno di 0 $\mid \|L\|_{\infty, U} < +\infty$)

Dimostrazione:

1 \rightarrow 2

Risultato noto

2 \rightarrow 3

L continua $\rightarrow L$ continua in 0. Allora fissato $\varepsilon = 1 \exists U$ intorno di 0, $U \subseteq X \mid L(U) \subseteq B(0, 1) \cap Y \rightarrow \|Lx\|_Y \leq 1 \ \forall x \in U \rightarrow \|L\|_{\infty, U} \leq 1 < +\infty$

3 \rightarrow 1

Sapendo vera la terza possiamo individuare un intorno $U = B(0, \delta) \cap X$ per il quale

$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in U \ \|Lx\|_Y \leq M$

Consideriamo $u \in U \setminus \{0\}$ e definiamo $u' := \frac{\delta}{2} \cdot \frac{u}{\|u\|}$ che ha norma $\frac{\delta}{2}$. Allora $\|Lu'\|_Y = \left\| L \frac{\delta}{2} \frac{u}{\|u\|} \right\|_Y \rightarrow$

$\rightarrow \|Lu\|_Y \leq \frac{2M}{\delta} \|u\|_X = C \cdot \|u\|_X$

Dato che per $x = 0$ la condizione è verificata allora la funzione è Lipschitziana.

Osservazione:

Per $L: X \rightarrow Y$ lineare e continua la quantità $M = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|_Y$ è la migliore costante di Lipschitz per L .

Osservazione:

Non tutte le applicazioni lineari fra spazi normati sono continue.

Esempio:

Consideriamo V spazio vettoriale con sopra definite due norme $\|\cdot\|_1$; $\|\cdot\|_2$ e prendiamo la funzione identità:

$\text{Id}_V: (V, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V, \|\cdot\|_2)$ è continua se e solo se la topologia indotta da $\|\cdot\|_1$ è più fine di quella indotta da $\|\cdot\|_2$

Osservazione pratica:

Dato X un insieme dotato delle due seguenti topologie τ_1 ; τ_2 indotte dalle norme $\|\cdot\|_1$; $\|\cdot\|_2$. Sono equivalenti:

1. $\|\cdot\|_1$ è più fine di $\|\cdot\|_2$
2. $\text{Id}_X: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ è continua.
3. $\exists C \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1$

Spazio delle funzioni lineari e continue:

$$L(X, Y) := \{L: X \rightarrow Y \mid L \text{ lineare}; \|L\|_{\infty, \bar{B}(0,1)} < +\infty\}$$

Con $(X, \|\cdot\|_X)$; $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi vettoriali normati.

Osservazione:

Questo è lo spazio vettoriale delle funzioni lineari e continue.

La norma $\|\cdot\|_{\infty, \bar{B}(0,1)}$ è detta **Norma degli operatori** su $L(X, Y)$

Si può equivalentemente definire come:

$$\|A\|_{\infty, \bar{B}(0,1)} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Osservazione:

Y completo $\rightarrow (L(X, Y), \|\cdot\|_{\infty, \bar{B}(0,1)})$ è completo.

Osservazioni sul teorema delle contrazioni:

Sia X uno spazio di Banach, $L \in L(X) := L(X, X) \mid \|L\|_{\infty, \bar{B}(0,1)} < 1 \rightarrow L$ è una contrazione.

Definizione (Gruppo lineare di uno spazio di Banach):

Dato X uno spazio di Banach allora $GL(X) := \{L \in L(X) \mid \exists k \in L(X) \mid LK = KL = \text{Id}\}$

Osservazione:

$GL(X)$ è aperto in $L(X)$.

Osservazione:

Se $A \in GL(X) \rightarrow B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subseteq GL(X)$ e $\forall H \mid \|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ vale:

$$(A - H)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^1HA^{-1} + \dots$$

Spazio delle applicazioni bilineari e continue:

Definizione (Bilineare):

Siano E, F, G spazi di Banach, un'applicazione $B: E \times F \rightarrow G$ si dice bilineare se è lineare rispetto ad entrambe le componenti.

Proposizione:

Sia $B: E \times F \rightarrow G$ bilineare. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. B è continua su $E \times F$
2. $\|B(u, v)\| \leq C\|u\|\|v\| \quad \forall (u, v) \in E \times F$
3. B è limitata su di un intorno di $(0,0) \in E \times F$

Dimostrazione:

3 \rightarrow 2

Per ipotesi $\exists c \geq 0, \exists r > 0 \mid \forall (u, v) \in E \times F, \|v\|, \|u\| \leq r$ vale:

$$\|B(u, v)\| \leq c$$

Supponendo $u \neq 0, v \neq 0$ (Funziona comunque) vale per omogeneità:

$$\left\| B\left(\frac{u}{\|u\|}r, \frac{v}{\|v\|}r\right) \right\| \leq \frac{r^2}{\|u\|\|v\|} \|B(u, v)\| \leq c \rightarrow \exists c_1 = \frac{c}{r^2} \mid \|B(u, v)\| \leq \frac{c}{r^2} \|u\|\|v\| = C_1 \|u\|\|v\|$$

2 \rightarrow 1

Sfruttiamo la bilinearità di B .

$$B(u, v) - B(u_0, v_0) = B(u, v) - B(u, v_0) + B(u, v_0) - B(u_0, v_0) = B(u - u_0, v) + B(u, v - v_0)$$

Da cui:

$$\|B(u, v) - B(u_0, v_0)\| \leq \|B(u - u_0, v)\| + \|B(u, v - v_0)\| \leq C(\|u - u_0\| + \|v - v_0\|) = o(1)$$

Per $u \rightarrow u_0, v \rightarrow v_0$

1 \rightarrow 3

B è Lipschitziana sui limitati, dunque:

$$(u - u_0, v - v_0) \in B((0,0), r) \rightarrow \|B(u, v) - B(u_0, v_0)\| \leq Cr(\|u - u_0\| + \|v - v_0\|)$$

Quindi B è limitata in un intorno di $(0,0)$

Norma di un'applicazione bilineare continua:

Sia $B: E \times F \rightarrow G$ bilineare, si definisce come norma di B la minima costante C per cui vale

$$\|B(u, v)\| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall (u, v) \in B((0,0), 1)$$

Equivalente:

$$\|B\| := \sup_{\|u\|, \|v\| \leq 1} \|B(u, v)\|$$

Osservazione:

$$B \text{ è continua} \leftrightarrow \|B\| < +\infty$$

Definizione:

$L^2(E \times F, G) := \{B: E \times F \rightarrow G \text{ bilineari e continue}\}$ è uno spazio vettoriale normato (Norma sopra definita) completo in quanto lo è G .

Perturbazioni Lipschitziane dell'Identità:

Sia E uno spazio di Banach, $\Omega \subseteq E$ un aperto, $f: \Omega \rightarrow E$ una funzione θ -Lipschitziana con $\theta < 1$, allora:

La mappa $(\text{Id} + f): \Omega \rightarrow E$ è aperta ($(\text{Id} + f)(\Omega)$ è aperto in E)

La mappa $(\text{Id} + f): \Omega \rightarrow (\text{Id} + f)(\Omega)$ è un omeomorfismo Lipschitziano con inversa Lipschitziana (Si dice omeomorfismo bilipschitziano).

La costante di Lipschitz di $(\text{Id} + f)$ è $1 + \theta$

La costante di Lipschitz di $(\text{Id} + f)^{-1}$ è $\frac{1}{1-\theta}$

Inoltre vale:

$$g = (\text{Id} + f)^{-1} - \text{Id} = -f \circ (\text{Id} + f)^{-1}$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 74

Osservazione:

Se $f = H$ è lineare allora $\text{Id} - H$ è invertibile.

Calcolo differenziale in \mathbb{R}^n

Definizione (Funzione differenziabile secondo Fréchet):

Siano E, F due spazi di Banach a dimensione finita e $\Omega \subseteq E$ un aperto.

Una funzione $f: \Omega \rightarrow F$ si dice differenziabile secondo Fréchet in $x_0 \in \Omega$ se

$\exists L \in L(E, F) \mid f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$

Equivalente:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Notazione di Landau:

Se $x_0 \in E, U$ intorno di x_0 e $f, g: U \rightarrow F$ si dice:

$$f \in O(g), x \rightarrow x_0 \leftrightarrow \exists C > 0 \mid \|f(x)\| \leq C \cdot \|g(x)\| \forall x \in U$$

$$f \in o(g), x \rightarrow x_0 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \|x - x_0\| < \delta \rightarrow \|f(x)\| = \varepsilon \cdot \|g(x)\| \forall x \in U$$

$$\text{In particolare: } g \in o(\|h\|) \leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Osservazione:

Siccome stiamo lavorando con un aperto $\Omega \subseteq E \rightarrow \exists \lambda \mid B(x_0, \lambda) \subseteq \Omega$ tutte queste definizioni diventano sensate ponendo come condizione $\|h\| < \lambda$

Proposizione (Unicità):

Siano E, F due spazi di Banach a dimensione finita e $\Omega \subseteq E$ un aperto.

Supponiamo che esista una funzione $f: \Omega \rightarrow F \mid f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$

Allora L è unico.

Dimostrazione:

Sia $M \in L(E, F) \mid f(x_0 + h) = f(x_0) + Mh + o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$

Sapendo che $f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$ sottraiamo membro a membro e otteniamo: $(L - M)h = o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$

Fissato dunque $v_0 \in E \forall t \in \mathbb{R} (L - M)(tv_0) = o(|t| \cdot \|v_0\|) = o(|t|) \rightarrow (L - M)v_0 = o(1) \rightarrow L v_0 = M v_0 \forall v_0 \rightarrow L = M$

Definizione (Differenziale di Fréchet):

Se $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ è differenziabile secondo Fréchet si dice differenziale di Fréchet di f in x_0 l'unica applicazione lineare e continua $L: E \rightarrow F \mid f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$

Notazione:

Si indica con $Df(x_0), df(x_0)$ o Df_{x_0}

Osservazione(Differenziabile \rightarrow continua):

Se f è differenziabile in x_0 allora è continua in x_0

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(\|h\|) = f(x_0) + o(1) \text{ per } \|h\| \rightarrow 0$$

Osservazione (Relazione differenziabile - derivabile):

Sia $E = F = \mathbb{R}, f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ allora f è differenziabile in $x_0 \in U \leftrightarrow$ è derivabile in quel punto.

$$\text{Inoltre vale: } Df(x_0) = f'(x_0)$$

Proprietà del differenziale:

Consideriamo nelle seguenti proposizioni E, F, G come spazi di Banach e Ω, V degli opportuni aperti.

Proposizione (Combinazione lineare):

Siano $f, g: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ due funzioni differenziabili in x_0 .

Allora una qualsiasi combinazione lineare delle due è ancora differenziabile in x_0 .

Inoltre: $D(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda \cdot Df(x_0) + \mu \cdot Dg(x_0)$

Dimostrazione:

I tre passaggi sono:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + Dg(x_0)h + o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Segue per linearità:

$$(\lambda f)(x_0 + h) = (\lambda f)(x_0) + \lambda \cdot Df(x_0)h + o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

$$(\mu g)(x_0 + h) = (\mu g)(x_0) + \mu \cdot Dg(x_0)h + o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Infine sommandole:

$$(\lambda f + \mu g)(x_0 + h) = (\lambda f + \mu g)(x_0) + (\lambda \cdot Df(x_0) + \mu \cdot Dg(x_0))h + o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Proposizione (Composizione):

Siano $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ differenziabile in $x_0 \in \Omega$ e $g: V \subseteq F \rightarrow G$ differenziabile in $y_0 = f(x_0)$ con $f(\Omega) \subseteq V$

Allora $(g \circ f): \Omega \subseteq E \rightarrow G$ è differenziabile in $x_0 \in \Omega$

Inoltre: $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$

Dimostrazione:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + Dg(y_0)k + o(\|k\|) \text{ per } k \rightarrow 0$$

Da cui:

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + k) + Dg(y_0)k + o(\|k\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Ma $g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + k)$ con $k = Df(x_0)h + o(\|h\|)$ per $h \rightarrow 0$

Dunque osservando che:

$$Dg(f(x_0)) \circ o(\|h\|) = O(o(\|h\|)) = o(\|h\|)$$

$$o(\|Df(x_0)h + o(\|h\|)\|) = o(O(\|h\|)) = o(\|h\|)$$

Segue la tesi.

Proposizione (Inversa):

Sia $f: \Omega \subseteq E \rightarrow V \subseteq F$ un omeomorfismo differenziabile in $x_0 \in \Omega$, con $Df(x_0)$ invertibile (Ossia $\exists [Df(x_0)]^{-1} \in L(F, E)$)

Allora $f^{-1}: V \subseteq F \rightarrow \Omega \subseteq E$ è differenziabile in $y_0 = f(x_0)$ e $D(f^{-1})(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$

Dimostrazione:

Senza perdere di generalità consideriamo $x_0 = 0_E ; y_0 = 0_F$

Per ipotesi: $f(h) = Df(0)h + o(\|h\|), h \rightarrow 0$

Ponendo $h = f^{-1}(k)$ otteniamo:

$$k = Df(0)f^{-1}(k) + o(\|f^{-1}(k)\|), k \rightarrow 0 \rightarrow f^{-1}(k) = [Df(0)]^{-1}k + o(\|f^{-1}(k)\|), k \rightarrow 0$$

Dato che:

$$f^{-1}(k) - [Df(0)]^{-1}k = o(\|f^{-1}(k)\|), k \rightarrow 0 \text{ allora } \exists U \text{ intorno di } 0 \mid$$

$$\forall x \in U \quad \|f^{-1}(k) - [Df(0)]^{-1}k\| \leq \frac{1}{2} \|f^{-1}(k)\|$$

Da questo segue:

$$\|f^{-1}(k)\| = \|f^{-1}(k) + [Df(0)]^{-1}k - [Df(0)]^{-1}k\| \leq$$

$$\leq \|f^{-1}(k) - [Df(0)]^{-1}k\| + \|[Df(0)]^{-1}k\| \leq \frac{1}{2} \|f^{-1}(k)\| + \|[Df(0)]^{-1}\| \|k\| \rightarrow \|f^{-1}(k)\| \leq$$

$$\leq 2 \cdot \|[Df(0)]^{-1}\| \|k\|$$

Quindi:

$$\|f^{-1}(k)\| = O(\|k\|), k \rightarrow 0 \rightarrow o(\|f^{-1}(k)\|) = o(O(\|k\|)) = o(\|k\|), k \rightarrow 0$$

Allora f^{-1} è differenziabile in $y_0 = 0$ e per la regola di composizione $D(f^{-1})(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$

Definizione (Funzione differenziabile):

Una funzione $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ si dice differenziabile se è differenziabile $\forall x \in \Omega$

In questo caso resta definita un'applicazione:

$$Df: \Omega \rightarrow L(E, F) \mid x \rightarrow Df(x)$$

Definizione (Classe):

Si dice che una funzione f è di classe C^{k+1} (In simboli $f \in C^{k+1} \leftrightarrow Df \in C^k$)

Esempio:

Consideriamo f ha differenziale secondo in $x_0 \in \Omega \leftrightarrow \exists Df(x) \forall x \in U$ intorno di x_0 e Df è differenziabile in x_0 .

Abbiamo allora: $D(Df)(x_0) \in L(E, L(E, F))$

Teorema del valor medio:

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$.

$$\text{Allora } \|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \cdot \sup_{a < t < b} \|f'(t)\|$$

Dimostrazione:

Se $\sup_{a < t < b} \|f'(t)\| = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare.

Sia dunque $M > \sup_{a < t < b} \|f'(t)\|$ e consideriamo:

$$\phi(M) = M(b - a) - \|f(b) - f(a)\|$$

Questa funzione è una retta affine e dunque è continua.

Se dimostriamo che $\forall M > \sup_{a < t < b} \|f'(t)\|$ si ha $\phi(M) \geq 0$ per il teorema di permanenza del segno si ottiene la tesi.

Consideriamo $\varphi: [a, b] \rightarrow (E, \|\cdot\|) \mid \varphi(t) = \|f(t) - f(a)\| - Mt$

Dimostriamo che b è il minimo di φ :

Sia $t_0 \in [a, b], t \in]t_0, b]$. Allora:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|f(t) - f(a)\| - Mt = \|f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) - f(a)\| - Mt \leq \\ &\leq \|f(t_0) - f(a)\| + \|f'(t_0)\|(t - t_0) + o(t - t_0) - Mt \leq \\ &\leq \|f(t_0) - f(a)\| + M(t - t_0) + o(t - t_0) - Mt = \|f(t_0) - f(a)\| - Mt_0 + o(t - t_0) = \\ &= \varphi(t_0) + o(t - t_0) \end{aligned}$$

Quindi: $\varphi(t_0) \geq \varphi(t) \rightarrow b$ è il minimo di φ

Perciò $\forall t \in [a, b] \varphi(t) \geq \varphi(b)$

Scegliendo $t = a$ otteniamo:

$$\|f(a) - f(a)\| - Ma \geq \|f(b) - f(a)\| - Mb \rightarrow M(b - a) - \|f(b) - f(a)\| = 0 \rightarrow \phi(M) \geq 0$$

Derivate parziali e direzionali:

Introduzione:

Sia $\Omega \subseteq E$ un aperto, $f: \Omega \rightarrow F$ con E, F spazi di Banach e siano $x_0 \in \Omega, v \in E$.

Allora è ben definita in un intorno I di $0 \in \mathbb{R}$ la funzione:

$$\phi: I \rightarrow E \mid \phi(t) = f(x_0 + tv) \in E$$

Definizione (Derivata direzionale):

Se ϕ è derivabile in $t = 0$ diciamo che f ammette derivata direzionale in x_0 nella direzione v .

Notazione:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \frac{d}{dt} f(x_0 + tv) \Big|_{t=0}$$

Osservazione (Differenziabile \rightarrow esistenza di ogni derivata direzionale):

Se f è differenziabile in x_0 allora ammette ogni derivata direzionale e vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Df(x_0) \cdot v$$

Definizione (Derivata parziale):

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow F$

La derivata direzionale nella direzione e_i ($1 \leq i \leq n$) è detta derivata parziale.

Notazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ oppure } \delta_i(x) \text{ oppure } \frac{\partial f}{\partial e_i}(x)$$

Proprietà:

Vale la seguente scala di implicazione ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$):

1. f è differenziabile secondo Fréchet
2. f è G -Differenziabile (Gateaux-Differenziabile) in x_0 , ossia ha tutte le derivate direzionali $\mid \exists L$ lineare e continua $\mid \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Lv$
3. f ammette derivate direzionali in x_0 .
4. f ammette derivate parziali in x_0 .

Differenziazione parziale:

Introduzione:

Sia $f: \Omega \subseteq E \times F \rightarrow G$ con E, F, G spazi di Banach.

Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$, consideriamo gli insiemi:

$$\Omega^{x_0} := \{y \in F \mid (x_0, y) \in \Omega\} \subseteq F$$

$$\Omega^{y_0} := \{x \in E \mid (x, y_0) \in \Omega\} \subseteq E$$

Questi due insiemi sono detti **sezioni** di Ω lungo E ed F .

Consideriamo le due funzioni:

$$\alpha: \Omega^{y_0} \subseteq E \rightarrow G \mid \alpha(x) = f(x, y_0)$$

$$\beta: \Omega^{x_0} \subseteq F \rightarrow G \mid \beta(y) = f(x_0, y)$$

Se f è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ significa che:

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)[u, v] + o(\|u\| + \|v\|) \text{ per } u, v \rightarrow 0$$

Ponendo $v = 0$ e poi $u = 0$ otteniamo:

$$f(x_0 + u, y_0) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)[u, 0] + o(\|u\|) \text{ per } u \rightarrow 0$$

$$f(x_0, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)[0, v] + o(\|v\|) \text{ per } v \rightarrow 0$$

Quindi α, β sono i differenziali rispettivamente in x_0, y_0

Definizione (Differenziale parziale):

f ammette differenziale parziale nella prima variabile $\leftrightarrow \alpha: \Omega^{y_0} \rightarrow G$ è differenziabile.

f ammette differenziale parziale nella seconda variabile $\leftrightarrow \beta: \Omega^{x_0} \rightarrow G$ è differenziabile.

Osservazione:

$$D_1 f(x_0, y_0) \in L(E, G)$$

$$D_2 f(x_0, y_0) \in L(F, G)$$

Osservazione (Differenziabile \rightarrow parzialmente differenziabile):

Se f è differenziabile allora ammette differenziali parziali e vale:

$$D_1 f(x_0, y_0)[u] = Df(x_0, y_0)[u, 0]$$

$$D_2 f(x_0, y_0)[v] = Df(x_0, y_0)[0, v]$$

Definizione (Differenziale totale):

Il differenziale della funzione f in (x_0, y_0) è detto differenziale totale.

Teorema del differenziale totale:

Siano E, F, G spazi di Banach, $f: \Omega \subseteq E \times F \rightarrow G$ con Ω aperto e $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Supponiamo che:

1. f sia differenziabile parzialmente rispetto alla prima variabile in (x_0, y_0)
2. f sia differenziabile parzialmente rispetto alla seconda variabile in un intorno U di (x_0, y_0) (Incluso in Ω)
3. $\alpha_f: U \rightarrow L(F, G) \mid \alpha_f(x, y) = D_2f(x, y)$ sia continua.

Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) e vale:

$$Df(x_0, y_0)[u, v] = D_1f(x_0, y_0)[u] + D_2f(x_0, y_0)[v]$$

Dimostrazione:

Bisogna verificare che, dati $u \in E, v \in F$ vale:

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + D_1f(x_0, y_0)[u] + D_2f(x_0, y_0)[v] + o(\|u\| + \|v\|), u, v \rightarrow 0$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} & \|f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)[u] - D_2f(x_0, y_0)[v]\| = \\ = & \|f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)[u] - D_2f(x_0, y_0)[v] - f(x_0 + u, y_0) + f(x_0 + u, y_0)\| \leq \\ \leq & \|f(x_0 + u, y_0 + v) - D_2f(x_0, y_0)[v] - f(x_0 + u, y_0)\| + \|f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)[u]\| \end{aligned}$$

Per ipotesi:

$$\|f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)[u]\| = o(\|u\|)$$

Stimiamo il primo pezzo usando il teorema del valore medio:

$$\text{Consideriamo } \varphi: [0,1] \rightarrow G \mid \varphi(t) = f(x_0 + u, y_0 + tv) - tD_2f(x_0, y_0)[v]$$

$$\text{Vogliamo dimostrare che: } I = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| = o(\|v\|), u, v \rightarrow 0$$

Per il teorema del valore medio:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{a \leq t \leq b} \|\varphi'(t)\| \text{ dove } \varphi'(t) = D_2f(x_0 + u, y_0 + tv)[v] - D_2f(x_0, y_0)[v]$$

Per la proprietà submoltiplicativa della norma:

$$\|\varphi'(t)\| = \|D_2f(x_0 + u, y_0 + tv)[v] - D_2f(x_0, y_0)[v]\| \leq$$

$$\leq \|D_2f(x_0 + u, y_0 + tv) - D_2f(x_0, y_0)\| \cdot \|v\| = o(1)\|v\| = o(\|v\|), (u, v) \rightarrow (0,0)$$

La tesi segue dalla continuità di $D_2f(x, y)$ in (x_0, y_0)

Gradiente, Jacobiana ed Hessiana:

Idea:

Lavorando con spazi vettoriali speciali, ad esempio \mathbb{R}^n , è possibile dare rappresentazioni distinte del differenziale.

Esempio:

Caso $E = F = \mathbb{R}$ si ha la seguente corrispondenza:
$$\begin{cases} L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R} \\ f \sim f[1] \\ Df(x) \sim f'(x) \end{cases}$$

Caso \mathbb{R}^n :

Se $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$ allora $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^n$ dove ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ corrisponde all'unica applicazione lineare $f_v \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \forall u \in \mathbb{R}^n \quad f_v[u] = (v^t u)$

Associamo dunque $Df(x_0)$ al vettore v . Questo vettore è detto **gradiente** di f .

Notazione:

Il gradiente di f è indicato con: $\nabla f(x)$

Scrittura del differenziale mediante gradiente:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + o(\|h\|), h \rightarrow 0$$

Vale anche (Caratterizzazione per derivate parziali):

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

Quindi il gradiente è il vettore contenente le derivate parziali della funzione.

Quindi:

$$\nabla f(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x) \text{ è la derivata direzionale lungo } v.$$

Matrice Jacobiana:

Consideriamo il caso $E = \mathbb{R}^n$; $F = \mathbb{R}^m$

Allora $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \sim M(n, m, \mathbb{R})$

Quindi al differenziale $Df(x)$ facciamo corrispondere la matrice (Detta matrice Jacobiana) data da:

$$Lx = \sum_{i,j} a_{i,j} x_j e_i = \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} x_j e_i$$

Dunque:

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \partial_1 f_m & \cdots & & \partial_n f_m \end{pmatrix} = (\partial_1 f \quad \partial_2 f \quad \cdots \quad \partial_n f) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Rappresentazione del differenziale secondo (Matrice Hessiana):

Nel caso $E = \mathbb{R}^n$; $F = \mathbb{R}$ si ha che:

$L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \sim M(n, \mathbb{R})$ secondo la corrispondenza che associa alla forma bilineare

la matrice $B = (b_{i,j}) \mid b_{i,j} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$

Il differenziale può dunque essere rappresentato da una matrice detta **Hessiana**:

$D^2 f(x) \sim Hf(x)$ sfruttando il fatto che:

$$Df^2(x)[e_i, e_j] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x_0 + se_i + te_j) \Big|_{s=0} = \partial_i \partial_j f(x) = \partial_{i,j}^2 f(x)$$

Dunque:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f & \partial_{1,2}^2 f & \cdots & \partial_{1,n}^2 f \\ \partial_{2,1}^2 f & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \partial_{n,1}^2 f & \cdots & & \partial_{n,n}^2 f \end{pmatrix}$$

Osservazioni carina:

Caso 1: $\mathbb{R} \rightarrow^{\gamma} \mathbb{R}^n \rightarrow^f \mathbb{R}$

Allora: $D(f \circ \gamma)(x) = (f \circ \gamma)'(x) = \nabla f(x)(\gamma(x))\gamma'(x)$

Caso 2: $\mathbb{R} \rightarrow^{\gamma} \mathbb{R}^n \rightarrow^F \mathbb{R}^m$

Allora: $D(F \circ \gamma)(x) = JF(x)[\gamma'(x)]$

Esempio di calcolo:

Consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \ln|x^2 y|$

La funzione è definita su tutto \mathbb{R}^2 meno gli assi cartesiani.

Ricaviamo il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{|x^2 y|} \cdot \frac{|x^2 y|}{x^2 y} \cdot 2yx = \frac{2}{x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{|x^2 y|} \cdot \frac{|x^2 y|}{x^2 y} \cdot x^2 = \frac{1}{y}$$

Allora:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{2}{x_0}, \frac{1}{y_0} \right)$$

Quindi:

$$Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{x_0} h_1 + \frac{1}{y_0} h_2$$

Simmetria del differenziale secondo:

Introduzione (Differenziale secondo):

Dati E, F spazi di Banach e $\Omega \subseteq E$ un aperto, una funzione $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ ammette differenziale secondo in $x_0 \in \Omega$ se vale:

$$Df(x_0 + u) = Df(x_0) + D^2f(x_0)u + o(\|u\|), u \rightarrow 0$$

Osservazione:

Significa semplicemente che il differenziale ammette differenziale.

Lo sviluppo rimane in $L(E, F)$

Siccome:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x_0 + su + tv) |_{t=0} &= Df(x_0 + su + tv)[v] |_{t=0} = Df(x_0 + su)[v] \\ \frac{\partial}{\partial s} f(x_0 + su + tv) |_{s=0} &= Df(x_0 + su + tv)[u] |_{s=0} = Df(x_0 + su)[u] \end{aligned}$$

Vale:

$$D^2f(x_0)[u, v] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x_0 + su + tv) |_{\substack{t=0 \\ s=0}} = D(Df)(x_0)[u][v]$$

Lemma:

Con le solite ipotesi sia $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ una funzione differenziabile $\forall x \in \Omega$ e sia Df differenziabile in $x_0 \in \Omega$.

Allora vale lo sviluppo:

$$f(x_0 + u + v) - f(x_0 + u) - f(x_0 + v) + f(x_0) = D^2f(x_0)[u, v] + o(\|u\| + \|v\|), u, v \rightarrow 0$$

Dimostrazione:

Sia R il resto dell'espressione prima definita.

Consideriamo $\varphi: [0, 1] \rightarrow F \mid \varphi(t) = f(x_0 + u + tv) - f(x_0 + tv) - t \cdot D^2f(x_0)[u, v]$

Allora $R = \varphi(1) - \varphi(0)$ da cui $\|R\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\|$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= Df(x_0 + u + tv)[v] - Df(x_0 + tv)[v] - D^2f(x_0)[u, v] = \\ &= \{Df(x_0 + u + tv) - Df(x_0 + tv) - D^2f(x_0)[u]\}[v] \end{aligned}$$

Questi sono elementi di $L(E, F)$, sviluppandoli al primo ordine otteniamo:

$$\{Df(x_0) + D^2f(x_0)[u + tv] - Df(x_0) - D^2f(x_0)[tv] - D^2f(x_0)[u] + o(\|u\| + \|v\|)\}[v]$$

Dove $[u + tv]$ è l'incremento per il primo sviluppo e $[tv]$ quello del secondo.

Allora rimane $o(\|u\| + \|v\|)[v]$ dunque:

$$\|\varphi'(t)\| \leq o(\|u\| + \|v\|)\|v\|, \|u\|, \|v\| \rightarrow 0$$

Questo vale uniformemente per $t \in [0, 1]$

Quindi per il teorema del valor medio:

$$\|R\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\varphi'(t)\| = o(\|u\| + \|v\|)\|v\| = o(\|u\| + \|v\|)$$

Osservazione:

Dunque il differenziale secondo e la differenza discreta sono uguali a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo.

Teorema di simmetria del differenziale secondo:

Nelle ipotesi di prima $D^2f(x_0) \in L^2(E \times E, F)$ è simmetrico.

Dimostrazione:

Dal lemma, poiché la differenza discreta seconda è simmetrica in u e v , si ha:

$$D^2f(x_0)[u, v] - D^2f(x_0)[v, u] = o((\|u\| + \|v\|)^2)$$

Essendo il primo termine lineare in u e in v deve essere identicamente nullo.

Se infatti abbiamo $B \in L^2(E \times E, F) \mid B(u, v) = o((\|u\| + \|v\|)^2)$, $u, v \rightarrow 0$ si ha che,

fissati u_0, v_0 :

$$t^2 \cdot B(u_0, v_0) = B(t \cdot u_0, t \cdot v_0) = o((\|t \cdot u_0\| + \|t \cdot v_0\|)^2) = o(t^2) \rightarrow B(u_0, v_0) = o(1), t \rightarrow 0$$

da cui, per l'arbitrarietà dei punti scelti:

$$B(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in E \times E$$

Definizione (Convesso):

Siano $E; F$ spazi di Banach, $\Omega \subseteq E$ si dice convesso se:

$$\forall x, y \in \Omega ; t \in [0,1] \text{ vale } x_t := tx + (1 - t)y \in \Omega$$

Proposizione:

Se $\Omega \subseteq E$ è un aperto convesso e $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ è differenziabile $\forall x \in \Omega$ con $\|Df\|_{\infty, \Omega} < +\infty$.

Allora f è Lipschitziana con costante $\|Df\|_{\infty, \Omega} < +\infty$.

Inoltre $\|Df\|_{\infty, \Omega} < +\infty$ è la miglior costante di Lipschitz.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Si ha } \|f(y) - f(x)\| &= \left\| [f(x + t(x - y))]_{t=0}^{t=1} \right\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t(y - x))[y - x]\| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t(y - x))\| \cdot \|y - x\| \leq \sup_{\xi \in \Omega} \|Df(\xi)\| \cdot \|y - x\| = \|Df\|_{\infty, \Omega} \cdot \|y - x\| \end{aligned}$$

Attenzione:

La prima disuguaglianza segue dal teorema del valor medio.

Inoltre sebbene siano state indicate tutte nel medesimo modo $\|Df\|_{\infty}$ è la norma operatore su $L(E, F)$ mentre $\|y - x\|$ è la norma su E

Teorema di inversione locale:

Siano E, F due spazi di Banach, $\Omega \subseteq E$ un aperto e $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F \mid f \in C^1(\Omega)$ (Ossia f differenziabile su Ω con $Df: \Omega \rightarrow L(E, F) \mid x \rightarrow Df(x)$ continua).

Sia $x_0 \in \Omega$ con $Df(x_0)$ invertibile ($Df(x_0) \in \text{Inv}(E, F)$).

Allora f è localmente invertibile in x_0 , ossia $\exists V \subseteq \Omega$ intorno di $x_0 \mid f(V) \subseteq F$ è un aperto e $f|_V: V \rightarrow f(V)$ è bigettiva con inversa di classe C^1 .

Dimostrazione:

Consideriamo $A \in \text{Inv}(E, F)$, $A = Df(x_0)$, $A^{-1} = [Df(x_0)]^{-1}$, $A^{-1} \in \text{Inv}(F, E)$

A^{-1} è un omeomorfismo lineare, dunque è equivalente provare che:

$A^{-1}f: \Omega \subseteq E \rightarrow E$ è localmente invertibile in x_0 .

Infatti se $A^{-1}f: \Omega \rightarrow A^{-1}f(\Omega)$ è invertibile e di classe C^1 anche $A \circ A^{-1}f = f: \Omega \rightarrow f(\Omega)$ lo è.

L'applicazione $A^{-1}f$ è differenziabile in Ω e vale:

$$D(A^{-1}f)(x) = D(A^{-1})(f(x)) \circ Df(x) = A^{-1} \circ Df(x)$$

In particolare per x_0 sotto le ipotesi del teorema vale: $A^{-1} \circ Df(x_0) = D(A^{-1}f)(x_0) = I$

Siccome il differenziale Df è continuo:

$$\begin{aligned} \exists r > 0 \mid B(x_0, r) \subseteq \Omega \text{ e } \|D(A^{-1}f) - I\|_{\infty, B(x_0, r)} &= \|D(A^{-1}f - I)\|_{\infty, B(x_0, r)} = \\ &= \|A^{-1}f - I\|_{\infty, B(x_0, r)} \leq \lambda < 1 \end{aligned}$$

Scegliamo arbitrariamente $\lambda = \frac{1}{2}$ e sia $V := B(x_0, r)$

$$\text{Allora } A^{-1}f = I + g \text{ con } g = A^{-1}f - I \text{ e dunque } \|Dg\|_{\infty, V} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Dunque g è $\frac{1}{2}$ -Lipschitziana in quanto V è convesso.

Per il teorema delle perturbazioni Lipschitziane dell'identità $A^{-1}f$ è un'applicazione aperta, dunque $A^{-1}f(V) \subseteq E$ è aperto.

Inoltre sappiamo che:

$$A^{-1}f: V \rightarrow A^{-1}f(V) \text{ è un omeomorfismo in quanto aperta e bigettiva.}$$

Quindi $f: V \rightarrow f(V)$ è un omeomorfismo per quanto detto prima.

Manca solo da dimostrare che $f^{-1}: f(V) \rightarrow V$ è differenziabile in $f(V)$ con differenziale continuo.

Per il teorema del differenziale della funzione inversa osserviamo che $\forall x \in V \ Df(x) \in \text{Inv}(E, F)$

$$\begin{aligned} \text{Infatti } A^{-1}Df(x) &= I + (A^{-1}Df(x) - I) \in \text{Inv}(E, E) \text{ purché } \|A^{-1}Df(x) - I\|_{\infty, V} \leq \frac{1}{2} < 1 \\ \text{e } Df(x) &= A + A^{-1}Df(x) \text{ è invertibile } \forall x \in V \end{aligned}$$

Allora f è differenziabile in ogni $y \in f(V)$ e $Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$

Osserviamo che Df è composizione di molteplici funzioni:

$$f(V) \xrightarrow{f^{-1}} V \xrightarrow{Df} \text{Inv}(E, F) \xrightarrow{\text{Inv}} \text{Inv}(F, E) \mid y \rightarrow f^{-1}(y) \rightarrow Df(f^{-1}(y)) \rightarrow [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$$

Con Inv indichiamo la funzione che inverte, osserviamo inoltre che $\text{Inv}(E, F)$ e $\text{Inv}(F, E)$ sono aperti nei rispettivi spazi.

Sappiamo già che f^{-1} e Df sono continue, dimostriamo che Inv è continua (Dimostreremo che Inv è addirittura differenziabile), detto questo allora Df^{-1} è continua, ossia $f^{-1} \in C^1(f(V), E)$

Osservazione (Differenziale di un'applicazione lineare):

Il differenziale di un'applicazione lineare è l'applicazione stessa.

Osservazione (Generalizzazione):

Se f^{-1} e Df sono di classe C^k allora con lo stesso teorema segue che Df^{-1} è di classe C^k da cui $f^{-1} \in C^k(f(V), E)$

Teorema della funzione implicita:

Introduzione:

Diciamo che T è localmente in $(x_0, y_0) \in T$ il grafico di una funzione se $\exists U$ intorno di x_0 ; V intorno di y_0 | $\forall (x, y) \in U \times V$ $(x, y) \in T \leftrightarrow y = u(x)$

Ossia $U \times V \cap T = \text{Graf}(u)$

Teorema della funzione implicita o del Dini:

Siano E, F, G spazi di Banach e siano $\Omega \subseteq E \times F$ un aperto. Sia inoltre $f \in C^1(\Omega, G)$

Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ con $f(x_0, y_0) = 0$ e sia infine $Df(x_0, y_0)$ lineare, continua ed invertibile da F in G .

Allora $T := \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}$ è localmente in $(x_0, y_0) \in T$ il grafico di una funzione di classe C^1 nella prima variabile.

L'equazione $f(x, y) = 0$ definisce dunque in maniera implicita una funzione nella prima variabile.

Equivalentemente:

$\exists U$ intorno aperto di x_0 , $\exists V$ intorno aperto di y_0 , $U \times V \subseteq \Omega$

$\exists u \in C^1(U, F) \mid \forall (x, y) \in U \times V$ $f(x, y) = 0 \leftrightarrow y = u(x)$

Ossia $U \times V \cap T = \text{Graf}(u)$

Dimostrazione:

Appunti pagina 130

Limite sotto il segno di derivata:

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni differenziabili dell'aperto connesso $\Omega \subseteq E$ a valori in F (Con E, F spazi di Banach).

Supponiamo che:

$\forall x \in \Omega \exists r > 0 \mid Df_n$ converge uniformemente su $B(x, r) \subseteq \Omega$

$\exists x_0 \in \Omega \mid f_n(x_0)$ converge in F

Allora:

$f_n(x)$ converge in $F \forall x \in \Omega$ e la convergenza è uniforme sulle stesse palle $B(x, r)$ dove Df_n converge uniformemente.

Dimostrazione:

Appunti pagina 134

Massimi e minimi relativi per funzioni a più variabili:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, consideriamo $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^2(A, \mathbb{R})$

Definizione (Massimo e minimo relativo):

$\bar{x}_0 \in A$ si dice un punto di massimo relativo per f se $\exists U$ intorno di $\bar{x}_0 \mid f(\bar{x}_0) \geq f(x) \forall x \in U$

$\bar{x}_0 \in A$ si dice un punto di minimo relativo per f se $\exists U$ intorno di $\bar{x}_0 \mid f(\bar{x}_0) \leq f(x) \forall x \in U$

Lemma 1:

Sia $B(x_0, r)$ una palla di \mathbb{R}^m e sia $f \in C^2(B(x_0, r))$.

Fissato $x \in B(x_0, r)$ la funzione $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid F(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ è di classe C^2 e:

$$F'(t) = \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle_m \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$$F''(t) = \langle H(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle_m \quad \forall t \in [-1, 1]$$

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 343

Lemma 2:

Sia $B(x_0, r)$ una palla di \mathbb{R}^m e sia $f \in C^2(B(x_0, r))$.

Allora $\forall x \in B(x_0, r) \exists \varepsilon \in [0, 1] \mid$

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle_m + \frac{1}{2} \langle H(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle_m$$

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 343

Teorema:

Sia $f \in C^2(A)$ con A aperto di \mathbb{R}^n e sia $x_0 \in A$.

Valgono i seguenti fatti:

1. Se x_0 è un punto di massimo relativo per f , allora $\nabla f(x_0) = 0$ e la forma quadratica associata alla matrice Hessiana $H(x_0)$ è semidefinita negativa. Il viceversa è falso.
2. Se x_0 è un punto di minimo relativo per f , allora $\nabla f(x_0) = 0$ e la forma quadratica associata alla matrice Hessiana $H(x_0)$ è semidefinita positiva. Il viceversa è falso.
3. Se $\nabla f(x_0) = 0$ e la forma quadratica della matrice Hessiana $H(x_0)$ è definita negativa, allora x_0 è un punto di massimo relativo per f . Il viceversa è falso.
4. Se $\nabla f(x_0) = 0$ e la forma quadratica della matrice Hessiana $H(x_0)$ è definita positiva, allora x_0 è un punto di minimo relativo per f . Il viceversa è falso.

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 344

Osservazione (Punti stazionari):

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x_0) = 0$ si dice stazionario per f .

Se un punto stazionario non è né di massimo né di minimo si dice **punto di sella**.

Esempio:

Consideriamo $f(x, y) = 2x^3 + x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Calcoliamo le due derivate parziali e imponiamo che entrambe siano uguali a 0 (Altrimenti il gradiente è non nullo):

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 6x^2 + 2x = 0 \\ f_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

Quindi i punti fissi sono solo:

$$(0, 0); \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

Vogliamo capire se sono punti di massimo o di minimo relativo (Possono anche essere punti di sella):

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x,x}^2 f & \partial_{x,y}^2 f \\ \partial_{y,x}^2 f & \partial_{y,y}^2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; Hf\left(-\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi:

L'Hessiana di $(0, 0)$ è definita positiva $\rightarrow (0, 0)$ è un punto di minimo relativo.

L'Hessiana di $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ non è definita, perciò è un punto di sella.

Massimi e minimi vincolati:

Idea:

Si tratta di studiare i punti di massimo e di minimo per una funzione differenziabile definita su di un aperto di \mathbb{R}^n , se è un punto interno allora il gradiente si annulla, ma se invece questo punto appartiene alla frontiera non possiamo utilizzare questo sistema.

Studiamo dunque alcune funzioni definite su insiemi privi di parti interne.

Definizione (Varietà r -dimensionale):

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una varietà r -dimensionale di classe C^k ($k \in \mathbb{N}$ o $k = +\infty$) se:

$\forall x_0 \in M \exists U$ intorno di x_0 in \mathbb{R}^n e un'applicazione di classe C^k $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $DF(x_0)$ di rango massimo
 $| M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$

Definizione (Vincolo):

∂K compatto di \mathbb{R}^n privo di parte interna, supponiamo anche che sia una varietà r -dimensionale di classi C^1 contenuta in un aperto A .

Osservazione:

I punti di ∂K possono essere descritti:

In maniera parametrica:

$$\partial K = \{x = v(t), t \in [a, b]\} \text{ con } v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ funzione vettoriale derivabile } | \\ v'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$$

Esempio:

Il disco unitario ∂K in \mathbb{R}^2 in forma parametrica è scritto come:

$$\partial K = \{(x, y) = (\cos(t), \sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\} \text{ con funzione che parametrizza:} \\ v(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Come curve di livello:

$$\partial K = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\} \text{ con } \varphi: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ funzione differenziabile con } \nabla \varphi(x) \neq 0 \forall x \in \partial K$$

Esempio:

Rombo di vertici $(\pm 1, 0)$; $(0, \pm 1)$, allora si può scrivere nella forma:

$$K = \{(x, y) \mid |y| \leq 1 - |x|\}$$

Quindi ∂K si può esprimere come curva di livello della funzione $\varphi(x, y) = |x| + |y| - 1$

$$\text{Dunque } \partial K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) = 0\}$$

Definizione (Massimi/Minimi vincolati):

Sono i massimi e i minimi raggiunti dalla funzione sul vincolo.

Definizione (Punto stazionario vincolato per f su K):

È un punto x_0 di ∂K nella quale la curva di livello di f è tangente a ∂K .

Idea:

I massimi e i minimi sono quei punti nei quali la curva di livello di f è tangente a ∂K .

Teorema pratico (Forma parametrica):

Sia f una funzione differenziabile definita su di un aperto A di \mathbb{R}^n e sia $K \subseteq A$ chiuso e limitato con frontiera ∂K della forma:

$\partial K = \{x = v(t) \mid t \in [a, b]\}$ con $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione vettoriale derivabile $\mid v'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$

Se $x_0 = v(t_0) \in \partial K$, $t_0 \in]a, b[$ allora x_0 è un punto stazionario vincolato per f su ∂K .

In particolare:

$$\nabla f(x_0) \cdot v'(t_0) = 0$$

Dimostrazione:

Sia $t_0 \in]a, b[\mid x_0 = v(t_0)$, la funzione $F(t) = f(v(t))$ ha un massimo o un minimo del punto t_0 .

Quindi $F'(t_0) = 0 = \nabla f(x_0) \cdot v'(t_0)$

Inoltre $v'(t)$ è tangente a ∂K quindi $\nabla f(x_0) = \nabla f(v(t_0))$ è perpendicolare a ∂K in x_0 .

Teorema del rango:

Sia $F: A \subseteq \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ (A aperto di \mathbb{R}^r , $r < n$) una funzione di classe C^1 .

Supponiamo che in $x_0 \in A$ si abbia $DF(x_0)$ di rango massimo (In particolare $\det \left(\frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x_0) \right)_{i,j} \neq 0$)

Allora esiste un intorno U di $x_0 \mid F(U)$ è il grafico di una funzione h delle r variabile x_1, \dots, x_r a valori in \mathbb{R}^k con $k = n - r$ di classe C^1

Inoltre il piano r -dimensionale tangente a questo grafico è il piano passante per $F(x_0)$ generato dai vettori

$$\frac{\delta F}{\delta x_i}(x_0), i = 1, \dots, r$$

Infine se $F \in C^m \rightarrow h \in C^m$

Dimostrazione:

Appunti pagina 181.

Teorema (M. Lagrange):

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(A)$ e K una varietà r -dimensionale di classe C^1 .

Se $x_0 \in K$ è un massimo o un minimo relativo di $f|_K$ allora x_0 è un punto stazionario vincolato per f su K .

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 95,

Esempio (Studio di una funzione vincolata):

Consideriamo $f(x, y) = x^2 - y^2$ su $r = \{\text{triangolo di estremi } (0,0), (1,3), (3,1)\}$

Individuiamo i punti in cui si annullano le derivate parziali:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x = 0 \\ f_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dal teorema precedente segue che $(0,0)$ è un punto stazionario vincolato.

Le tre rette che compongono il triangolo sono:

$$\begin{cases} r_1: y = 3x & f(x, 3x) = -8x^2 \\ r_2: y = \frac{x}{3} & \rightarrow f\left(x, \frac{x}{3}\right) = \frac{8}{9}x^2 \\ r_3: y = 4 - x & f(x, 4 - x) = 8x - 16 \end{cases}$$

Allora dato che:

$$f(0,0) = 0; f(3,1) = 8; f(1,3) = -8$$

Risulta che:

$(0,0)$ è un punto di sella

$(3,1)$ è un punto di massimo

$(1,3)$ è un punto di minimo

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e $K = \{x \in A \mid G(x) = 0\}$ con $G: A \rightarrow \mathbb{R}^k, k < n$ di classe $C^1 \mid DG(x)$ abbia rango massimo $(k) \forall x \in K$.

Allora $x_0 \in K$ è un punto stazionario vincolato per f su $K \leftrightarrow \exists m_0 \in \mathbb{R}^k \mid (x_0, m_0) \in A \times \mathbb{R}^k$ sia un punto stazionario per la funzione Lagrangiana $L(x, m) = f(x) - \langle m, G(x) \rangle_k$

Ossia $\nabla f(x_0) - \sum_{j=1}^k m_j \nabla G_j(x_0) = 0$

Osservazione:

È un teorema utile nel caso in cui la varietà sia data sotto forma di luogo di 0 di una funzione.

Linearità e differenziabilità in senso complesso:

Osservazione 1:

Se V è un \mathbb{C} -Spazio vettoriale allora è anche un \mathbb{R} -Spazio mediante l'operatore $J \in L(V)$ |

$$J(x) = ix ; J^2 = -\text{Id}$$

Dunque:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

In maniera equivalente un \mathbb{R} -Spazio può essere esteso ad un \mathbb{C} -Spazio.

Definizione (Spazio normato complesso):

Uno spazio normato complesso è un \mathbb{C} -Spazio vettoriale dotato di una norma come \mathbb{R} -Spazio.

Esiste sempre una norma equivalente "complessa", ossia tale che:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

Osservazione:

Un \mathbb{R} -Spazio normato V insieme ad un $J \in L(V) \mid J^2 = -\text{Id}$ (Operatore continuo e lineare) ammette un'estensione della moltiplicazione per scalare $\mid J(x) = ix$ e una norma equivalente complessa.

Osservazione:

In questa struttura una funzione $T: V \rightarrow V$ \mathbb{R} -lineare è \mathbb{C} -lineare $\Leftrightarrow JT = TJ$

Osservazione (Differenziabile):

Se $E_{\mathbb{C}} ; F_{\mathbb{C}}$ sono \mathbb{C} -Spazi di Banach, $\Omega \subseteq E_{\mathbb{C}}$ è un aperto, $f: \Omega \rightarrow F_{\mathbb{C}}$ è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists L \in L_{\mathbb{C}}(E, F)$ |

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

Osservazione:

Una tale funzione è \mathbb{C} -Differenziabile \Leftrightarrow è \mathbb{R} -Differenziabile e $Df(x_0)J_E = J_E Df(x_0)$ dove $J_E \in L(E, E)$ è la moltiplicazione per i in E .

Proprietà equivalenti:

$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in senso complesso in $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ se:

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + o(z - z_0), z \rightarrow z_0$$

$$f \text{ è } \mathbb{R}\text{-Differenziabile e } Df(z_0) \text{ commuta con } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione (Equazioni di Cauchy – Riemann):

Allora $Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e allora $f(x, y) = f_1(x, y) + i \cdot f_2(x, y)$ che devono rispettare le

$$\text{equazioni di Cauchy – Riemann: } \begin{cases} \delta_1 f_1 = -\delta_2 f_2 \\ \delta_2 f_1 = \delta_1 f_2 \end{cases}$$

Teorema di non retrazione:

$\nexists r: B \rightarrow \delta B$ continua $\mid r|_{\delta B} = \text{Id}_{\delta B}$

Teorema del punto fisso di Brouwer:

Ogni $f: B \rightarrow B$ continua ha almeno un punto fisso.

Notazione:

$B := B(0,1, \mathbb{R}^n)$

Schema della dimostrazione:

Appunti pagina 576-580

Equazioni differenziali ordinarie in \mathbb{R}^n

Equazioni differenziali:

Introduzione:

Un'equazione differenziale è una identità che lega fra loro (Al variare del valore x in un insieme assegnato) i valori della funzione $y(x)$ e delle sue derivate successive $y'(x)$; $y''(x)$; ...

Osservazione:

La funzione è $y \in C^0(I, \mathbb{R})$.

Definizione (Equazione differenziale ordinaria):

È un'equazione differenziale nella quale la variabile x appartiene ad un intervallo di \mathbb{R}

Esempio:

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0, x \in I$$

Con f una funzione continua nei suoi $m + 2$ argomenti e I intervallo di \mathbb{R} .

L'incognita è la funzione y

Definizione (Equazione differenziale alle derivate parziali):

È un'equazione differenziale nella quale la variabile x appartiene ad \mathbb{R}^n

Definizione (Ordine di un'equazione differenziale):

L'ordine di una equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che vi compare.

Definizione (Forma normale):

Un'equazione differenziale è detta in forma normale se si presenta nella forma:

$$y^{(m)}(x) - g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x)) = 0, x \in I$$

Ossia se è messa in evidenza la derivata di massimo grado.

Notazione:

Nella scrittura dell'equazione differenziale si può omettere (x)

Definizione (Sistema differenziale):

Un sistema differenziale è un'identità della forma:

$$f(x, u(x), u'(x)) = 0, x \in I$$

Con $u: I \rightarrow \mathbb{R}^m$

Forma normale di un sistema differenziale:

$$u'(x) = g(x, u(x)), x \in I$$

Osservazione pratica:

Ogni equazione differenziale di ordine m può essere trasformata in un sistema di m equazioni differenziali di primo ordine.

Sia $y \in C^m(I)$ che risolva l'equazione:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0, x \in I$$

Introduciamo le funzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = y(x) \\ u_1(x) = y'(x) \\ \vdots \\ u_{m-1}(x) = y^{(m-1)}(x) \end{array} \right. \quad \text{e otteniamo una funzione } u = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) \text{ che risolve il sistema$$

differenziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_0)' = u_1 \\ (u_1)' = u_2 \\ \vdots \\ (u_{m-2})' = u_{m-1} \\ f(x, u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, (u_{m-1})') = 0 \end{array} \right.$$

Osservazione:

Non tutte le equazioni differenziali sono risolubili.

Osservazione pratica:

Tutte le equazioni in forma normale sono risolubili.

Esempio:

$$y' = f(x), x \in [a, b]$$

Le soluzioni sono:

$$y(x) = \int_a^x f(t)dt + c, x \in [a, b] \text{ e } c \text{ costante arbitraria.}$$

Non è ovviamente detto che si sappia ricondurre ad una forma esplicita $\int_a^x f(t)dt$

Problema di Cauchy:

Idea:

Siccome ogni equazione differenziale in forma normale ammette infinite soluzioni vogliamo selezionarne una.

È detto problema di Cauchy la soluzione di un'equazione differenziale di cui abbiamo precisato un dato valore.

Risolvere un problema di Cauchy significa individuare una funzione di cui sappiamo descrivere la pendenza punto per punto e di cui sappiamo il valore in un punto assegnato.

Esempio di formulazione del problema di Cauchy (Caso sistemi di primo ordine):

$$\begin{cases} y' = g(x, y), x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{ con } x_0, y_0 \text{ assegnati.}$$

Teorema di esistenza e unicità locale:

Dato il sistema differenziale $u' = g(x, u)$, $x \in I$ e le ipotesi:

1. $g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ funzione continua definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$
2. g è localmente Lipschitziana in A rispetto alla variabile vettoriale u ; uniformemente rispetto ad x .
Quindi per ogni compatto $K \subseteq A \exists H_K \geq 0$ costante per cui risulta $|g(x, y) - g(x, u)|_m \leq H_K |y - u|_m$

Sia $(x_0, u_0) \in A$ il punto per cui passa la funzione, $R = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x - x_0| \leq a, |u - u_0|_m \leq b\}$ un cilindro compatto e M, H le costanti definite come:

M : è quel valore ≥ 0 che esiste per il teorema di Weierstrass $|g(x, u)|_m \leq M \quad \forall (x, u) \in R$

$H \geq 0 \mid |g(x, y) - g(x, u)|_m \leq H |y - u| \quad \forall (x, y), (x, u) \in R$

Allora esistono un intervallo $J = [x_0 - h, x_0 + h]$, $0 < h \leq a$ e un'unica funzione $u: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 |

$$\begin{cases} u'(x) = g(x, u(x)) \quad \forall x \in J \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Inoltre il grafico di u è tutto contenuto in R .

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 414

Teorema di esistenza di Peano:

Sia $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aperto, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e si consideri un'equazione differenziale ordinaria di primo grado esplicita definita su D :

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Allora ogni problema a valori iniziali per $f: y(x_0) = y_0; (x_0, y_0) \in D$, possiede una soluzione locale

$z: I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intorno di $\mathbb{R} \mid z'(x) = f(x, z(x)) \quad \forall x \in I$

Attenzione:

La soluzione può non essere unica.

Dipendenza continua dal dato iniziale:

Idea:

Nei sistemi differenziali una piccola differenza nel dato iniziale u_0 del problema di Cauchy (errori di misura) porta a piccoli errori della soluzione.

Proposizione:

Siano $(x_0, u_0), (x_0, y_0) \in A$ due punti sufficientemente vicini, allora le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = g(x, u) & \forall x \in J \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}; \begin{cases} y' = g(x, y) & \forall x \in J' \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Verificano la disuguaglianza $|u(x) - y(x)|_m \leq C|u_0 - y_0|_m \quad \forall x \in J'' = J \cap J'$

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 418

Teorema del prolungamento delle soluzioni:

Nelle ipotesi del teorema precedente sia Q un arbitrario rettangolo chiuso e limitato $| Q \subseteq A$ e contenente il punto iniziale (x_0, u_0) (Come punto interno).

Allora la soluzione locale u del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = g(x, u) & \forall x \in J \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Può essere univocamente estesa ad un intervallo chiuso $[x_1, x_2]$ con $x_1 < x_0 < x_2$ in modo che i punti $(x_1, u(x_1)); (x_2, u(x_2))$ appartengano alla frontiera di Q

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 420

Osservazione:

Siccome il teorema precedente ha solo un valore locale ma per ogni punto posso nuovamente applicarlo questo teorema è conseguenza dell'“incollamento” dei pezzi così ottenuti.

Osservazione:

Questa estensione può essere fatta fino a quando riusciamo il grafico della soluzione giace nell'aperto A dove è definito g .

Definizione (Soluzione massimale):

Detta $J(x_0, u_0)$ la famiglia degli intervalli J contenenti x_0 come punto interno e per i quali il problema di Cauchy ammetta soluzione u_J .

Allora detto $J_0 = \cup J(x_0, u_0)$ allora definiamo $u(x) = u_J(x)$ se $x \in J, J \in J(x_0, u_0)$

Questa soluzione è detta massimale.

Proposizione (Soluzione globale):

Nelle ipotesi per cui la funzione $g(x, u)$ sia definita su una striscia $S = [c, d] \times \mathbb{R}^m$, sia continua e Lipschitziana nella variabile u rispetto ad x allora $\forall (x_0, u_0) \in S$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = g(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

È globale, ossia definita sull'intero intervallo $[c, d]$

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 422

Equazioni a variabili separate:

Un'equazione differenziale della forma:

$$y' = f(x)g(y), x \in I; f \text{ continua su } I, g \text{ continua su un altro intervallo } J.$$

Si dice equazione a variabili separate.

Osservazione:

Una funzione che risolve l'equazione dovrà avere dominio e codominio: $f: S \subseteq I \rightarrow J$

Metodo risolutivo:

1° Passo (Soluzioni costanti):

Si cercano gli $y_0 \in J \mid g(y_0) = 0$ (Ricordiamo che g ed f sono assegnate, y la nostra funzione incognita).

Per ciascuno di quei punti la funzione:

$$y(x) = y_0 \quad \forall x \in I \text{ è soluzione.}$$

2° Passo:

Si cercano le soluzioni non costanti y . Selezioniamo due intervalli $I' \subseteq I; J' \subseteq J \mid g(s) \neq 0, s \in J'$

Quindi dividendo per $g(y(x))$ otteniamo:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \quad \forall x \in I'$$

3° Passo:

Si calcolano le primitive, indichiamo con F la primitiva di f in I' e con γ la primitiva di $\frac{1}{g}$ in J' .

Allora:

$$\gamma(y(x)) = F(x) + c, x \in I'$$

Osservazione:

c la scegliamo in maniera arbitraria ai fini dei conti ma risulterà fissata nel caso in cui io imponga delle condizioni di Cauchy.

4° Passo:

Si osserva che $\gamma' = \frac{1}{g} \neq 0$ in J' per ipotesi $\rightarrow \gamma$ strettamente monotona in $J' \rightarrow \exists \gamma^{-1}$.

Quindi:

$$y(x) = \gamma^{-1}(F(x) + c), x \in I'$$

Attenzione:

Questo procedimento non esaurisce l'insieme delle soluzioni

Esempio:

Studiamo $y' = x(1 + y^2)$.

In questo caso:

$$f(x) = x ; g(y) = 1 + y^2$$

1° Passo:

$1 + y^2$ non si annulla mai, dunque non esistono funzioni costanti che siano soluzioni di questa equazione.

2°,3° Passo:

Dividiamo per $1 + y^2$:

$$\frac{y'}{1+y^2} = x \rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = x dx \rightarrow \arctan y(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

Quindi:

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

Osservazione:

Non essendo la funzione definita su tutto \mathbb{R} bisogna prestare attenzione al fatto che variando la costante cambia non solo la funzione che risolve l'equazione ma addirittura il suo dominio.

Equazioni differenziali lineari di primo ordine:

Le equazioni lineari di primo ordine sono facilmente studiabili, esse sono della forma:

$$u' = a(x)u + b(x), x \in I$$

Notazione:

a, b sono detti coefficienti dell'equazione e sono funzioni continue in I

Ricavare la soluzione:

Moltiplicando entrambi i membri per $e^{-A(x)}$ con A funzione primitiva di a in I :

$$e^{-A(x)}b(x) = e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = \frac{d}{dx}(e^{-A(x)}y(x)), x \in I$$

Dunque $e^{-A(x)}y(x)$ è una primitiva di $e^{-A(x)}b(x)$ in I , quindi scelto arbitrariamente $x_0 \in I$ esisterà $c \in \mathbb{R}$ |

$$e^{-A(x)}y(x) = \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t)dt + c, x \in I$$

Quindi la funzione $y(x)$ sarà sempre del tipo:

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t)dt + c \right), x \in I$$

Osservazione:

Modificare la primitiva scelta o il punto iniziale non cambia il risultato.

Esempio 1:

Risolvere l'equazione $y' = 2xy + x^3$

Una primitiva di $2x$ è x^2 (Scegliere sempre la più semplice)

Moltiplichiamo per e^{-x^2} e otteniamo: $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y(x)) = x^3e^{-x^2}$

La primitiva di $x^3e^{-x^2}$ negli estremi da me scelti è: $\int_0^1 t^3e^{-t^2} dt = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$

Quindi:

$$e^{-x^2}y(x) = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2} + c = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + c_1$$

(Fondere insieme i pezzi non dipendenti dal parametro)

Perciò le soluzioni dell'equazione sono:

$$y(x) = -\frac{x^2+1}{2} + c_1e^{-x^2}, c_1 \in \mathbb{R}$$

Osservazione:

Imponendo la condizione di Cauchy c_1 diventa un numero.

Ad esempio se $y(33) = -700 \rightarrow c_1 = -155e^{-1089}$

Esempio 2:

Non sempre i calcoli possono essere svolti.

Ad esempio l'equazione differenziale:

$$y' = e^{-x^2} \text{ ha come soluzione: } y(x) = c + \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Casi particolari: Equazioni di Bernoulli, Riccati ed equazioni non lineari omogenee

Equazioni di Bernoulli:

L'equazione differenziale:

$$y' = p(x)y + q(x)y^a$$

Dove $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ è detta equazione di Bernoulli.

Proprietà:

Mediante la sostituzione $v(x) = y(x)^{1-a}$ diventa un'equazione lineare nell'incognita $v(x)$

Esempi:

$$y' = 2y - 3y^2; y' = -2xy + x^3y^3; y' = \frac{xy^3 + x^2}{y^2}$$

Equazioni di Riccati:

L'equazione differenziale:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), x \in I$$

È detta equazione di Riccati.

Proprietà:

Se conosciamo una soluzione $\varphi(x)$, allora mediante la sostituzione $y(x) = \varphi(x) + \frac{1}{v(x)}$ l'equazione diventa lineare nell'incognita $v(x)$.

Esempio:

$$y' = y^2 - xy + 1$$

Equazioni non lineari omogenee:

L'equazione differenziale:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), g \text{ funzione assegnata continua.}$$

È detta equazione non lineare omogenea.

Proprietà:

Mediante la sostituzione $v(x) = \frac{y(x)}{x}$ diventa a variabili separabili nell'incognita $v(x)$

Esempi:

$$y' = 2 - \frac{x}{y}; y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}; x^2y' = y^2 + xy + 4x^2$$

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari in \mathbb{R}^n :

Un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari in \mathbb{R}^n è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} u_1'(t) = a_{1,1}(t) \cdot u_1(t) + \dots + a_{1,n}(t) \cdot u_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) = a_{n,1}(t) \cdot u_1(t) + \dots + a_{n,n}(t) \cdot u_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Con $t \in I$ intervallo di \mathbb{R} ; $a_{i,j}(t), b_i(t) \in C^0(I, \mathbb{R})$

Scritture equivalenti:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ con } A(t) \in C^0(I, M(n, \mathbb{R})), b(t) \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$$

Equazioni lineari scalari di ordine n :

Introduzione:

Sia $P \in \mathbb{C}[x]$; $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$; $a_n \neq 0$

Consideriamo la funzione $D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \mid D(u) = u'$

Sia inoltre $P(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^k$

Definizione (Equazione lineare di ordine n):

È l'equazione differenziale $P(D)u = 0$

Esempio:

$$p(x) = x^2 + 1 \text{ allora } P(D)u = u'' + u$$

Osservazione:

Questa formulazione ci permette di scrivere il problema come un sistema in \mathbb{R}^n del primo ordine:

$$u'(t) = A \cdot u(t) \rightarrow \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & 0 & 1 \\ & & & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Osservazione:

L'equazione $P(D)u = 0$, $\deg P = n$ ha un sottospazio n -dimensionale di soluzioni ($\ker P(D)$) ognuna delle quali è fissata dalle condizioni iniziali imposte.

Operatore di transizione associato al cammino $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{R}))$:

Dato $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{R})) \exists! \omega = \omega_A \in C^0(I \times I, M(n, \mathbb{R}))$ detta Matrice (o operatore) di transizione associata ad $A \mid \forall (t, s) \in I \times I, \omega_A$ è derivabile nella prima variabile e soddisfa l'equazione matriciale:

$$\begin{cases} \delta_1 \omega_A(t, s) = A(t) \omega_A(t, s) \\ \omega_A(s, s) = \text{Id}_n \end{cases}$$

Osservazione:

Vale inoltre lo sviluppo convergente uniformemente sui compatti:

$$\omega_A(t, s) = \sum_{k=0}^{+\infty} V_k(t, s)$$

$$\text{Con } V_0(t, s) = \text{Id}_n ; V_{k+1}(t, s) = \int_s^t A(t_k) V_k(t_k, s) dt_k$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 157

Proprietà dell'operatore di transizione:

$$\omega(t, s) \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \forall (t, s) \in I \times I$$

$$\forall (t, s, r) \in I \times I \times I : \omega(t, r) = \omega(t, s) \omega(s, r)$$

Equazioni differenziali lineari non omogenee usando l'operatore autonomo:

Proposizione:

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \\ u(s) = x_0 \end{cases} \text{ con } A(t) \in C^0(I, M(n, \mathbb{R})), b \in C^0(I, \mathbb{R}^n) \text{ ammette un'unica soluzione.}$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 162

In particolare:

$\omega_A(t, s)x_0$ è la soluzione dell'equazione autonoma:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(s) = x_0 \end{cases}$$

Mentre:

$$\int_s^t \omega_A(t, e)b(e)de \text{ è la soluzione dell'equazione non omogenea con dato nullo in } t = s$$

Definizione (Determinante Wronskiano):

$\bar{\omega}(t, s) = \det \omega(t, s)$ con $\omega(t, s)$ un operatore di transizione associato al cammino $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{R}))$

Osservazione (Equazione di Liouville):

Il determinante Wronskiano verifica l'equazione di Liouville:

$$\begin{cases} \delta_1 \bar{\omega}(t, s) = \text{tr } A(t)\bar{\omega}(t, s) \\ \bar{\omega}(s, s) = 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$\bar{\omega}(t, s) = \exp\left(\int_s^t \text{tr} A(e)de\right)$$

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie:

Data l'equazione differenziale non omogenea:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \\ u(s) = x_0 \end{cases}$$

Consideriamo $u(t) = \omega_A(t, s)y(t)$ da cui:

$$u'(t) = (\omega_A(t, s)y(t))' = A(t)\omega_A(t, s)y(t) + \omega_A(t, s)y'(t) = A(t)u(t) + \omega_A(t, s)y'(t)$$

Ponendo $b(t) = \omega_A(t, s)y'(t) \rightarrow y'(t) = \omega_A(s, t)b(t)$ possiamo integrare e otteniamo la soluzione.

Dunque la formula risolutiva vale anche per le equazioni matriciali non omogenee del tipo:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(s) = x_0 \end{cases} \text{ con } A, B \in C^0(I, M(n, \mathbb{R}))$$

Si ha:

$$X(t) = \omega_A(t, s)x_0 + \int_s^t \omega_A(t, r)B(r)dr$$

Esponenziazione di matrici:

Definizione (Esponenziale di una matrice):

Data $A \in M(n, \mathbb{R})$ allora:

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Proposizione:

Vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\text{Id} + \frac{A}{n} \right)^n$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 169

Proprietà:

$e^{A+B} = e^A e^B$ purché $AB = BA$

Se $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = A \oplus B \rightarrow e^{A \oplus B} = e^A \oplus e^B$

Stabilità asintotica dell'esponenziale:

Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$, si ha:

1. $e^{tA} = o(1), t \rightarrow +\infty \leftrightarrow \forall \lambda_i \in \text{Spettro}(A), \text{Re}(\lambda_i) < 0$
2. $e^{tA} = O(1), t \rightarrow +\infty \leftrightarrow \forall \lambda_i \in \text{Spettro}(A), \text{Re}(\lambda_i) \leq 0$
3. $e^{tA} = o(1), t \rightarrow +\infty \leftrightarrow \forall \lambda_i \in \text{Spettro}(A) \subseteq \mathbb{R}$ e ogni autovalore è semisemplice, ossia A è diagonalizzabile.

Dimostrazione:

Appunti pagina 171

Lemma della fuga dai compatti:

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $K \subseteq \Omega$ un compatto.

Sia $u:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ su di un intervallo massimale.

Allora: $\exists b' < b, a < b' < b \mid (t, u(t)) \notin K \forall b' < t < b$

Dimostrazione:

Appunti pagina 241

Proposizione:

Siano E, F due spazi di Banach, $\Omega \subseteq E$ un aperto ed $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ una funzione continua e differenziabile in $\Omega \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in \Omega$

Supponiamo che esista $\lim_{x \rightarrow x_0} Df(x) = L \in L(E, F)$

Allora: f è differenziabile in x_0 e vale $Df(x_0) = L$

Dimostrazione:

Appunti pagina 242

Analisi qualitativa:

Idea:

Non essendo sempre possibile ricavare in forma esplicita la soluzione di un'equazione differenziale talvolta dobbiamo limitarci a studiare direttamente l'equazione così da individuare il comportamento di alcune curve integrali.

Esempio:

1° Passo:

Individuiamo le curve isocline, cioè quelle curve sulle quali la pendenza di tutte le rette integrali che le attraversano è la stessa.

Nell'esempio sono le iperboli di equazione $y = \frac{x}{c-x}$

Infatti dato un punto di una di queste iperboli $(x_0, \frac{x_0}{c-x_0})$ allora la pendenza è:

$$y'(x_0) = x_0 \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right) = x_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{c-x_0}}\right) = c$$

2° Passo:

Studiamo l'equazione differenziale derivandola rispetto ad x :

$$y'' = 1 + \frac{1}{y} - x \frac{y'}{y^2} = \frac{(y+1)(y-x)(y+x)}{y^3}$$

A questo punto possiamo studiare il piano suddividendolo per regioni di concavità e convessità in base al segno assunto dai fattori che compongono y'' .

Quindi:

$y = \pm x$ sono costituite da punti di flesso per le soluzioni.

$x < 0, y \in [-1, 0]$ le soluzioni sono decrescenti.

$x < 0, -1 < y < 0$ le soluzioni sono crescenti.

Osservazione:

Le soluzioni sono pari \rightarrow i grafici sono simmetrici.

Se individuo una soluzione allora per il teorema di unicità nessun'altra può attraversarla.

In questo caso, siccome la retta $y = -1$ è una soluzione, essa non può essere attraversata da altre curve integrali. Infine siccome per $y > 0$ $|y'(x)| > |x| \rightarrow |y'(x)| \rightarrow +\infty, x \rightarrow \pm\infty$.

Allora nessuna curva integrale ammette asintoti obliqui.

Lemma di Gronwall:

Siano u, v due funzioni continue in un intervallo $[a, b]$ che verificano $u \geq 0$ in $[a, b]$ e

$$v(x) \leq c + \int_a^x v(t)u(t)dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Dove c è una costante reale, risulta allora: $v(x) \leq c \cdot \exp\left(\int_a^x u(t)dt\right) \quad \forall x \in [a, b]$

Dimostrazione:

Acquistapace 1 pagina 434

Osservazione:

Il Lemma di Gronwall vale anche se le funzioni continue u, v verificano $u \geq 0$ in $[a, b]$ e

$$v(x) \leq c + \int_x^b v(t)u(t)dt \quad \forall x \in [a, b]$$

In tal caso la conclusione è: $v(x) \leq c \cdot \exp\left(\int_x^b u(t)dt\right) \quad \forall x \in [a, b]$

Forme differenziali

Forme differenziali:

Sia $f: \Omega \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\Omega \subseteq E$ con E spazio di Banach.

Considerando lo spazio duale $E^* := L(E, \mathbb{R})$ si ha:

$$Df: \Omega \subseteq E \rightarrow E^*$$

Domanda:

Data $\omega: \Omega \subseteq E \rightarrow E^*$, $\omega \in C^0(\Omega)$ è possibile determinare una funzione:

$$f: \Omega \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1(\Omega) \mid Df = \omega?$$

Definizione (1-Forma differenziale):

$\omega: \Omega \subseteq E \rightarrow E^*$, $\omega \in C^0(\Omega)$ si dice 1-Forma differenziale

Definizione (Integrale curvilineo o di linea):

Per $\omega \in C^0(\Omega, E^*)$, $\Omega \subseteq E$ aperto e $\gamma \in C^1([a, b], \Omega)$ si definisce integrale curvilineo (o di linea) di ω lungo γ il numero:

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)] dt$$

Definizione (Equivalenza e Orientazione):

Date due funzioni $\varphi: [a, b] \rightarrow \Omega$; $\Psi: [c, d] \rightarrow \Omega$ di classe C^1 .

Queste si dicono equivalenti e con uguale orientazione se:

$$\exists p: [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ diffeomorfismo} \mid \Psi(t) = \varphi(p(t)) \text{ con } p(c) = a; p(d) = b$$

Si dicono invece equivalenti e con orientazione opposta se:

$$\exists p: [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ diffeomorfismo} \mid \Psi(t) = \varphi(p(t)) \text{ con } p(c) = b; p(d) = a$$

Proprietà:

Date due funzioni $\varphi: [a, b] \rightarrow \Omega$; $\Psi: [c, d] \rightarrow \Omega$ di classe C^1 .

Se sono equivalenti e con uguale orientazione:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega(\varphi(t))[\varphi'(t)] dt = \int_c^d \omega(\varphi(p(t)))[\varphi'(p(t))]p'(t) dt = \int_c^d \omega(\Psi(t))[\Psi'(t)] dt = \int_{\Psi} \omega$$

Se invece sono equivalenti con orientazione opposta:

$$\int_{\varphi} \omega = - \int_{\Psi} \omega$$

Osservazione:

L'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta dipende solo dagli estremi del cammino e non dalla primitiva scelta

Definizione (Giustapposizione di cammini e somma integrale):

Data una coppia di cammini:

$$\begin{cases} \delta_1 \in C^0([a, b], X) \\ \delta_2 \in C^0([b, c], X) \end{cases} \mid \delta_1(b) = \delta_2(b)$$

Si chiama giustapposizione di cammini e si indica $\delta_1 \# \delta_2(t) := \begin{cases} \delta_1(t), & t \in [a, b] \\ \delta_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$

Osservazione (Integrale della giustapposizione):

$$\int_{\delta_1 \# \delta_2} \omega = \int_{\delta_1} \omega + \int_{\delta_2} \omega$$

Definizione (Forma esatta):

$\omega: \Omega \subseteq E \rightarrow E^*$, $\omega \in C^0(\Omega)$ si dice 1-Forma differenziale esatta (o differenziale esatto) se $\exists f: \Omega \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega) \mid Df = \omega$
 f è detta **primitiva** di ω

Osservazione:

Se $\omega \in C^k(\Omega) \rightarrow f \in C^{k+1}(\Omega)$

Osservazione:

Se f è una primitiva di ω anche $f + c$, $c \in \mathbb{R}$ è una primitiva di ω
Se Ω è un aperto connesso allora ogni primitiva di ω è della forma $f + c$, $c \in \mathbb{R}$

Idea:

Cercare condizioni necessarie e sufficienti affinché una 1-Forma differenziale sia esatta.

Condizione necessaria 1:

Se $\omega = Df$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ allora $\forall \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, $\gamma \in C^1([a, b])$ la funzione $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verifica:

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b Df(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Proposizione (Forma esatta):

$\omega \in C^0(\Omega \subseteq E, E^*)$ con Ω aperto e connesso, E spazio di Banach, è esatta $\leftrightarrow \forall \gamma \in C^1([a, b], \Omega)$ (Classe C^1 a tratti) l'integrale $\int_\gamma \omega$ dipende solo da $\gamma(a)$, $\gamma(b)$.

Una funzione $\gamma \in C^1([a, b], \Omega)$ ha tale proprietà \leftrightarrow è giustapposizione di cammini C^1 .

Equivalente:

$\forall \gamma \in C^1([a, b], \Omega)$ chiuso ($\gamma(a) = \gamma(b)$) vale $\oint_\gamma \omega = 0$

Dimostrazione:

Appunti pagina 286

Condizione necessaria 2:

Sappiamo che se $f: \Omega \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile due volte in $x_0 \in \Omega$ allora $D^2f(x_0) \in L^2_{simmetriche}(E \times E, \mathbb{R})$ è simmetrica.

Dunque se $\omega \in C^1(\Omega, E^*)$ è differenziabile in x_0 allora $D\omega(x) = L^2_{simmetriche}(E, E^*) \cong L^2_{simmetriche}(E \times E, \mathbb{R})$ quindi $D\omega x, v = D\omega x v, u$

Definizione (Forma differenziale chiusa):

Diciamo che $\omega \in C^1(\Omega, E^*)$ è una forma chiusa $\leftrightarrow D\omega$ è simmetrica.

Osservazione:

Se stiamo lavorando con \mathbb{R}^n la condizione è equivalente a imporre che la matrice associata alla forma differenziale sia simmetrica.

Condizione necessaria 3:

Ogni $\omega \in C^1(\Omega, E^*)$ esatta è anche chiusa.

Attenzione:

Il viceversa è falso, infatti $\omega: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^* \mid \omega(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ è chiusa ma sulla circonferenza goniometrica:

$$\oint_{\text{circonferenza}} \omega = \int_0^{2\pi} -\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

Lavoro:

Il lavoro compiuto da un campo di forza F di componenti A, B, C lungo una curva φ è dato da:

$$\int_{\varphi} (Adx + Bdy + Cdz)$$

Se il campo è Conservativo, ossia esiste una funzione potenziale $U \mid$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A; \frac{\partial U}{\partial y} = B; \frac{\partial U}{\partial z} = C$$

Allora la 1-Forma differenziale $Adx + Bdy + Cdz$ è esatta e dunque il lavoro dipende solo dal punto iniziale e finale.

Caso reale:

Se $E = \mathbb{R}^n$ allora $E^* = (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ mediante l'isomorfismo canonico:

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \mid \phi(e_i) = d_{x_i}$$

Dunque la base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$ è:

$$\{d_{x_i}\}_{i=1, \dots, n} \text{ con } d_{x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid d_{x_i}(v) = v_i$$

Questo ci permette di scrivere in maniera vettoriale le forme differenziali, infatti:

$\omega: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ si può scrivere come: $\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)d_{x_i}$ con $a_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Dunque vale l'analogia:

$$F = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i(x)e_i; \omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)d_{x_i}$$

Derivata sotto il segno di integrale:

Lemma:

Sia $f: [a, b] \times (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua.

Allora la funzione seguente è continua:

$$F: X \rightarrow \mathbb{R} \mid F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

Dimostrazione:

Sia ω modulo di continuità per f , allora F ammette modulo di continuità $(b - a)\omega$

Infatti se $x, x' \in X$ vale:

$$|F(x) - F(x_1)| = \left| \int_a^b (f(t, x) - f(t, x_1)) dt \right| \leq \int_a^b \omega(d(x, x')) dt = (b - a)\omega(d(x, x'))$$

Proposizione:

Siano $I = [a, b]; J = [\alpha, \beta]; f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^0(I \times J, \mathbb{R}); \delta_1 f \in C^0(I \times J, \mathbb{R})$, allora l'integrale:

$$F(x) = \int_a^b f(t, s) ds$$

definisce una funzione $F \in C^1(I, \mathbb{R})$ con:

$$F'(x) = \int_a^b \delta_1 f(t, s) ds$$

Dimostrazione:

Sia $\varphi(h) := f(t + h, s) - \delta_1 f(t, s)h$

Verifica:

$$\begin{aligned} \left| I(t + h) - I(t) - \int_a^b \delta_1 f(t, s) ds h \right| &\leq \int_a^b |f(t + h, s) - f(t, s) - \delta_1 f(t, s)h| ds = \\ &= \int_a^b |\varphi(h)| ds \leq \int_a^b |h| \sup_{0 \leq \xi \leq h} |\varphi'(\xi)| \leq \int_a^b |h| \sup_{0 \leq \xi \leq h} |f(\xi, s) - f(t, s)| \leq \\ &\leq \int_a^b |h| |\omega(h)| ds \end{aligned}$$

Dove ω è un modulo di continuità per f (Che è uniformemente continua), allora si ha:

$$\int_a^b |h| |\omega(h)| ds = |b - a| |h| |\omega(h)| = o(|h|), h \rightarrow 0$$

Omotopie:

Definizione (Funzioni omotope):

Due funzioni continue $f_0: X \rightarrow Y$ e $f_1: X \rightarrow Y$ si dicono omotope se $\exists H: X \times [0,1] \rightarrow Y$ continua |

$$\forall x \in X \begin{cases} H(x, 0) = f_0(x) \\ H(x, 1) = f_1(x) \end{cases}$$

H è detta **Omotopia** fra f_0 e f_1 .

Definizione (Omotopia fra archi):

È una particolare omotopia fra due funzioni continue che in particolare siano archi $\gamma_i: [a, b] \rightarrow Y$

Definizione (Omotopia a estremi fissati):

Dati due archi $f_0, f_1 \in C^0([a, b], Y)_{p,q}$ è un'applicazione $H: [a, b] \times [0,1] \rightarrow Y$ continua |

$$\begin{cases} H(t, 0) = f_0(t) \\ H(t, 1) = f_1(t) \\ H(a, s) = f_0(a) = f_1(a) = p \\ H(b, s) = f_0(b) = f_1(b) = q \end{cases}$$

Notazione:

$C^0([a, b], Y)_{p,q}$ sono gli archi che in a valgono p e in b valgono q .

Proposizione (Invarianza per omotopia dell'integrale curvilineo):

Sia $\Omega \subseteq E$ un aperto connesso, $\omega \in C^1(\Omega, E^*)$ una 1-Forma differenziale chiusa.

Sia $H \in C^2([0,1] \times [0,1], \Omega)$ un'omotopia di cammini a estremi fissati tra p e q :

$$\forall s \in [0,1] \begin{cases} H(0, s) = p \\ H(1, s) = q \end{cases}$$

Allora l'integrale curvilineo lungo i cammini $H(\cdot, s)$ è costante in s .

Dimostrazione:

Appunti pagina 294

Osservazione (Omotopia di classe superiore):

Se γ_0, γ_1 sono cammini di classe C^2 in $\Omega \subseteq E$ aperto, omotopi con omotopia a estremi fissati $H \in C^0([0,1] \times [0,1], \Omega)$ allora lo sono anche con una di classe C^2 .

Definiamo infatti:

$$k(t, s) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) + H_0(t, s) \text{ con } H_0 \in C^2(\mathbb{R}^2) \mid H_0(t, s) = 0 \text{ su } \delta([0,1] \times [0,1])$$

Osservazione:

Le omotopie ad estremi fissati fra due archi a valori in un aperto connesso $\Omega \subseteq E$ sono un aperto nelle omotopie a estremi fissati in E .

Dominio semplicemente connesso:

Definizione (Spazio topologico semplicemente connesso):

Uno spazio topologico si dice semplicemente connesso se tutti i cammini tra due punti fissati sono omotopi.

Equivalente:

Ogni "laccio" ($\delta(0) = \delta(1)$) è deformabile con continuità al cammino costante con un'omotopia ad estremi fissati.

Osservazione:

In $\Omega \subseteq E$ semplicemente connesso \forall laccio δ in Ω , $\forall \omega \in C^1(\Omega, E^*)$ chiusa, allora vale:

$$\oint_{\delta} \omega = 0$$

Quindi sotto queste ipotesi ogni forma chiusa ω è esatta.

Osservazione:

Ogni ω 1-Forma differenziale chiusa è localmente esatta, ossia esiste un intorno

$$B(x_0, \varepsilon); f \in C^2(B(x_0, \varepsilon), \mathbb{R}) \mid Df = \omega|_{B(x_0, \varepsilon)}.$$

Inoltre se $\Omega \subseteq E$ è semplicemente connesso ogni forma chiusa è esatta.

Misura ed integrale di Lebesgue

Idea:

Sostituire l'integrale secondo Riemann, intuitivo ma con poche proprietà sul passaggio al limite, con l'integrale secondo Lebesgue.

Definizione (Misura di Lebesgue su \mathbb{R}):

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$,

Misura esterna di E : $m^*(E) := \inf\{\sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k| \mid J_k \subseteq \mathbb{R}; J_k \text{ aperto}; E \subseteq \cup_{k \in \mathbb{N}} J_k\}$

Misura interna di E : $m_*(E) := \sup\{\sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k| \mid J_k \subseteq \mathbb{R}; J_k \text{ compatto}; \cup_{k \in \mathbb{N}} J_k \subseteq E\}$

Un insieme si dice misurabile secondo Lebesgue se $m(E) := m^*(E) = m_*(E)$

Dove la lunghezza di un intervallo è definita come la differenza fra i suoi estremi.

Definizione (Insieme trascurabile secondo Lebesgue):

Un insieme si dice trascurabile secondo Lebesgue se la sua misura di Lebesgue è nulla.

Osservazione:

$S \subseteq S' \subseteq \mathbb{R}; m(S') = 0 \rightarrow m(S) = 0$

Se $S \subseteq \mathbb{R}$ è trascurabile e $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ k -Lipschitziana allora $\varphi(S)$ è trascurabile.

Proposizione:

Sia $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di insiemi trascurabili, allora $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n) = 0$

Dimostrazione:

Appunti pagina 369

Intervalli:

Sugli intervalli di \mathbb{R} si definisce la cosiddetta misura elementare:

$$m(I) = |I| = |b - a| ; I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

Caso \mathbb{R}^n :

Sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervallo n -dimensionale ($I = \prod_{k=1}^n I_k ; I_k \subseteq \mathbb{R}$)

$$\text{Allora } m(I) = \prod_{k=1}^n |I_k|$$

Proposizione:

Se I e $\{I_k\}_{k=1, \dots, m}$ sono intervalli n -dimensionali, allora:

Se $\{I_k\}_{k=1, \dots, m}$ sono una partizione di I , allora $\sum_{k=1}^m |I_k| = |I|$

Se $\{I_k\}_{k=1, \dots, m}$ sono disgiunti ed inclusi in I , allora $\sum_{k=1}^m |I_k| \leq |I|$

Se $\{I_k\}_{k=1, \dots, m}$ sono un ricoprimento di I , allora $\sum_{k=1}^m |I_k| \geq |I|$

Dimostrazione:

Appunti pagina 370

Proposizione (Estensione al caso numerabile):

Se I e $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono intervalli n -dimensionali, allora:

Se $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono una partizione di I , allora $\sum_{k=0}^{+\infty} |I_k| = |I|$

Se $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono disgiunti ed inclusi in I , allora $\sum_{k=0}^{+\infty} |I_k| \leq |I|$

Se $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono un ricoprimento di I , allora $\sum_{k=0}^{+\infty} |I_k| \geq |I|$

Dimostrazione:

Appunti pagina 371

Teoria della misura:

Definizione (Funzione σ -Additiva):

Sia X un insieme qualunque, $f: Q \subseteq P(X) \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}^+$ si dice σ -Additiva se $\forall D \subseteq Q$ famiglia numerabile di intervalli $| B = \bigcup_{A \in D} A \in Q$ valga $\sum_{A \in D} f(A) = f(B)$

Definizione (σ -Algebra di insiemi):

Dato un insieme qualunque X , $Q \subseteq P(X)$ è detta una σ -Algebra se:

$$X, \emptyset \in Q$$

$$A \in Q \rightarrow A^c \in Q$$

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Q \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in Q$$

Definizione (Misura):

Una misura su di un insieme X è una funzione σ -Additiva $m: Q \subseteq P(X) \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}^+$ il cui dominio sia una σ -Algebra (Quindi $m(\emptyset) = 0$)

Osservazione:

Se X è finito o numerabile e $\omega: X \rightarrow [0, +\infty]$ è una qualunque funzione $\exists!$ misura su $Q \subseteq P(X) | m(E) = \sum_{x \in E} \omega(x)$

Definizione (Quasi Anello):

Un quasi anello di insiemi su X è una famiglia $QA \subseteq P(X) | \emptyset \in QA ; A, B \in QA \rightarrow A \cap B, A \setminus B \in \sum QA$
Dove $\sum QA := \{E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j | E_j \in QA \forall i \in \mathbb{N}, E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j\}$

Esempio:

Gli insiemi degli intervalli n -dimensionali su \mathbb{R}^n è un quasi anello.

Definizione (Misura elementare):

Una misura elementare è una funzione σ -Additiva che ha per dominio un quasi anello.

Teorema di Estensione (Carathéodory):

Sia $m: \mathcal{Q}A \rightarrow [0, +\infty]$ una misura elementare, allora esiste una misura $\tilde{m}: \mathcal{Q} \rightarrow [0, +\infty]$ |

$$\mathcal{Q}A \subseteq \mathcal{Q}$$

$$\tilde{m}|_{\mathcal{Q}A} \equiv m$$

Definizione (σ -Algebra generata):

Data una famiglia $\xi \subseteq P(X)$ di sottoinsiemi di X , allora \exists la minima σ -Algebra che li contiene.

Questa è detta σ -Algebra generata da ξ e si indica con $\sigma A(\xi)$

Equivalente:

$$\sigma A(\xi) = \cap \{B \mid \xi \subseteq B \subseteq P(X); B \text{ } \sigma\text{Algebra}\}$$

Definizione (σ -Algebra boreliana o di Borel):

Sia X uno spazio topologico, allora la σ -Algebra di Borel è quella generata dai suoi aperti.

Osservazione (Teorema di estensione sugli intervalli n -dimensionali di \mathbb{R}^n):

La misura che si ottiene estendendo la misura elementare sugli intervalli definita sulla σ -Algebra dei misurabili (Definita come l'algebra generata dal quasi anello degli intervalli,

$$B(X) = \sigma A(\{S \subseteq X \mid S \text{ aperto}\}) \text{ è detta Misura di Lebesgue.}$$

Osservazione:

I misurabili sono Boreliani a meno di un insieme trascurabile.

Nomenclatura:

Una misura è detta:

$$\text{Finita: } m(X) < +\infty$$

$$\sigma\text{-Finita: } X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n \text{ con } m(X_n) < +\infty$$

$$\text{Completa: } \forall E \subseteq F \subseteq P(X), m(E) = 0, F \text{ } \sigma\text{-Algebra vale: } \forall E' \subseteq E; E' \in F$$

Definizione (Spazio misurato o di misura):

Uno spazio di misura è una terna (X, F, m) con X insieme non vuoto, F una σ -Algebra su X ed m una misura su F .

Osservazione (Probabilità):

Se la misura è normalizzata ($m(X) = 1$) uno spazio di misura è detto Spazio di Probabilità.

In questo caso F è detta σ -Algebra degli eventi o tribù.

Proposizione:

Dato (X, F, m) spazio di misura e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$, allora:

$$A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_n) = m(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$$

$$A_{n+1} \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid m(A_{n_0}) < +\infty \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_n) = m(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n)$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 381

Proposizione (Su \mathbb{R}^n):

Sia (\mathbb{R}^n, F, m) uno spazio di misura, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora sono equivalenti:

$$E \subseteq F$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto, } E \subseteq A \text{ con } m(A \setminus E) < \varepsilon$$

$$\exists B \in B(\mathbb{R}^n), E \subseteq B \mid m(B \setminus E) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto, } C \subseteq E \text{ con } m(E \setminus C) < \varepsilon$$

$$\exists D \in B(\mathbb{R}^n), D \subseteq E \mid m(E \setminus D) = 0$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 383

Controesempio di Vitali:

Idea:

Questo è un esempio di insieme non misurabile.

Consideriamo:

Lo spazio misurabile (\mathbb{R}, M, m) ;

$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ e la relazione di equivalenza $\forall x, y \in [0,1] \quad x \sim y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$;

L'insieme quoziente $[0,1]/\sim$.

Assumendo l'assioma della scelta possiamo prendere un rappresentante per ogni classe di equivalenza, l'**insieme di Vitali** V è l'insieme contenente tutti e soli questi rappresentanti.

Definizione:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n := V + q_n$$

Con:

$$(q_n)_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

Osservazione 1:

$$V_n \cap V_m = \emptyset$$

Infatti se così non fosse: $x + q_n = y + q_m, x, y \in V \rightarrow x - y = q_m - q_n \in \mathbb{Q} \rightarrow x = y$

Assurdo.

Osservazione 2:

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subseteq [-1,2]$$

Osservazione 3:

La misura è invariante per traslazione.

$$\text{Quindi } \forall n \in \mathbb{N} \quad m(V_n) = m(V)$$

Ma allora se V fosse misurabile ($V \in M$) varrebbe:

$$1 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V) \leq 3 \rightarrow V \notin M$$

Funzioni misurabili nella retta estesa:

Consideriamo (X, F, m) uno spazio di misura, $D \subseteq X, D \in F$.

Sia $f: D \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ una funzione.

Proposizione (Utile nella pratica):

Sono fatti equivalenti:

$$\{x \in D \mid f(x) > \alpha\} \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\} \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in D \mid f(x) < \alpha\} \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\} \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 394

Osservazione (Utile nella pratica):

Una funzione $f: D \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è detta misurabile se vale una delle proposizioni precedenti.

Corollario:

La funzione sopra definita è misurabile se $f^{-1}(] \alpha, \beta [) \in F \quad \forall \alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{R}}$

Osservazione (Funzioni continue e monotone):

Le funzioni continue sono misurabili, infatti $\forall \alpha \in \mathbb{R} \{f > \alpha\}$ è aperto e dunque misurabile.

Le funzioni monotone da \mathbb{R} in \mathbb{R} sono misurabili, infatti $\forall \alpha \in \mathbb{R} \{f > \alpha\}$ è una semiretta e dunque è misurabile.

Funzioni indicatrici:

Dato uno spazio di misura (X, F, m) ed un insieme $E \subseteq X$ allora la funzione indicatrice:

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Ma allora:

$$\{\chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq 1 \\ E & \text{se } \alpha \in [0, 1[\\ X & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Quindi $\chi_E(x)$ è misurabile $\Leftrightarrow E \in F$

Osservazione (Somma di funzioni misurabili):

$f, g: D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili che non valgano nello stesso punto $\pm\infty$, allora $f + g: D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ è misurabile.

Osservazione (Prodotto per un numero reale):

$f: D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile e sia $c \in \mathbb{R}$, allora $cf: D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ è misurabile.

Osservazione (Prodotto di funzioni misurabili):

$f, g: D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili, allora $fg: D \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ è misurabile.

Dimostrazioni:

Appunti pagina 396

Attenzione:

È interessante osservare come si dimostra che queste funzioni sono misurabili. L'obiettivo è infatti ricondurle al teorema precedente.

Ad esempio assumendo f misurabile per dimostrare che f^2 è misurabile mi basta cercare di dimostrare che:

$\{f^2 > \alpha\} \in F \forall \alpha \in \mathbb{R}$, infatti: $\{f^2 > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{se } \alpha < 0 \\ \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\} & \text{se } \alpha \geq 0 \end{cases}$ e $\{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\}$ è unione di due elementi di F dunque appartiene ad F (Ovviamente $X \in F$).

Osservazione (Derivata misurabile):

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e misurabile, allora f' è misurabile.

Osservazione (Composizione).

Se $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con f misurabile e g continua, allora $g \circ f$ è misurabile.

Definizione (Funzione semplice):

Una funzione è detta semplice se è combinazione lineare di indicatori di insiemi numerabili.

$$\varphi \equiv \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}, E_i \in \mathcal{F} \mid E_i = \varphi^{-1}(\alpha_i)$$

Indichiamo con S l'insieme delle funzioni semplici.

Teorema (Caratterizzazione delle funzioni misurabili):

Sia $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

f è misurabile $\leftrightarrow \exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ una successione di funzioni semplici $\mid \forall x \in D, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$

Dimostrazione:

Appunti pagina 397

Definizione (Classe monotona):

Una classe monotona su X è un insieme $M \subseteq P(X) \mid$

$$\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M \text{ disgiunti a coppie, vale } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in M$$

$$\forall A \in M, B \in M, A \subseteq B \text{ allora } B \setminus A \in M$$

Esempio di classe monotona:

Data una σ -Algebra \mathcal{Q} su X e due misure su di essa definite (m_1, m_2) allora:

$$M := \{A \in \mathcal{Q} \mid m_1(A) = m_2(A)\}$$

Osservazione (Minima classe monotona):

Dato $\xi \subseteq P(X)$ allora \exists la minima classe monotona contenente ξ .

$$M(\xi) := \bigcap_{M \in \mathcal{C}} M \text{ con } \mathcal{C} \text{ l'insieme delle classi monotone su } X.$$

Teorema della classe monotona:

Se ξ è un semianello, allora:

$$M(\xi) = \sigma A(\xi)$$

Corollario:

Se m_1, m_2 sono due misure definite su di una σ -Algebra \mathcal{Q} che coincidono su di un semianello ξ .

Allora coincidono su $\sigma A(\xi)$

Integrale di Lebesgue:

Idea:

Definire l'integrale su alcune particolari funzioni (Quelle a valori positivi).

Definire poi l'integrale a partire dalle funzioni semplici prestando attenzione al fatto che di base può esistere più di una scomposizione della funzione semplice.

Introduzione:

Lavoriamo per questo capitolo con una funzione misurabile $f: X \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ in uno spazio di misura (X, F, m) .

Definizione (Integrale di f su X rispetto alla misura m):

L'integrale di f su X rispetto alla misura m si indica con $\int_X f(x)dm(x) \in \widetilde{\mathbb{R}}$

Attenzione:

Per convenzione in teoria della misura si assume che:

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0$$

Notazioni alternative:

$$\int_X f dm ; \int f dm ; \int f$$

Integrale di una funzione semplice positiva:

Sia $f \geq 0$ una funzione semplice, ossia $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$

Allora:

$$\int_X f dm := \sum_{k=1}^n c_k m(E_k) \in [0, +\infty]$$

Osservazione:

Nonostante possa sembrare che dipenda dalla scelta degli insiemi delle funzioni indicatrici, il valore dipende solo da f .

Dimostrazione:

Appunti pagina 514

Osservazione (Funzione semplice a scalini):

Sia m la misura di Lebesgue ed $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione semplice a scalini.

Dunque $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[t_k, t_{k+1}[}$

Allora si ha:

$$\int_{[a,b]} f(x)dm(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Definizione (Integrale per una funzione misurabile positiva):

Data una funzione misurabile $f: X \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}, f \geq 0$ in uno spazio di misura (X, F, m) allora è ben definito:

$$\int_X f dm = \sup\{\int_X \varphi dm \mid 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ semplice}\}$$

Equivalentemente:

Data una qualsiasi successione di funzioni semplici crescente e convergente puntualmente

ad $f ((\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f)$:

$$\int_X f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n dm$$

Osservazione:

Questo risultato segue dalle seguenti proprietà:

Siano f, g due funzioni semplici e non negative, allora:

$$\int_X (af + bg) = a \int_X f + b \int_X g$$

$$f \leq g \rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

Ricordiamo inoltre che ogni funzione misurabile è limite puntuale di funzioni semplici.

Procedimento:

Appunti pagina 517

Attenzione:

È fondamentale che la successione sia crescente, infatti se prendiamo:

$\varphi_n := \frac{1}{n} \forall x \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}$ allora $((\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow f)$ ma:

$$\int_{\mathbb{R}} 0 dm = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} dm = +\infty$$

Osservazione:

Essendo definito da funzioni semplici l'integrale è Positivo e Positivamente lineare:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall f, g \geq 0 \text{ misurabili } \int_X (af + bg) = a \int_X f + b \int_X g$$

$$\forall f, g \geq 0 \text{ misurabili } f \leq g \rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

Teorema di Beppo-Levi:

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative, crescente e convergente puntualmente

ad f . Allora: $\int_X f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n dm$

Dimostrazione:

Appunti pagina 519

Teorema (Disuguaglianza di Fatou):

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative. Allora:

$$\int_X (\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f_n(x)) dm \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \int_X f_n(x) dm$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 520

Osservazione:

Eliminiamo adesso l'ipotesi aggiuntiva di positività della funzione.

Funzioni integrabili:

Una funzione misurabile $f: (X, \mathcal{F}, m) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile rispetto alla misura $m \leftrightarrow$

$$\|f\|_1 := \int_X |f(x)| dm < +\infty$$

Osservazione:

$\|f\|_1$ è detta **norma integrale** di f .

Attenzione:

Non è una norma però è una seminorma, ossia l'unica proprietà che non vale è $\|f\|_1 = 0 \rightarrow f \equiv 0$

Disuguaglianza di Markov:

Sia $f: (X, \mathcal{F}, m) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile, allora:

$$m(\{|f| \geq \lambda\}) \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}$$

Dimostrazione:

Si ha $|f| \geq \lambda \cdot \chi_{\{|f| \geq \lambda\}} \rightarrow \|f\|_1 \geq \lambda \cdot m(\{|f| \geq \lambda\})$ da cui la tesi.

Lemma:

Una funzione misurabile ha $\|f\|_1 = 0 \leftrightarrow f$ è nulla quasi ovunque ($m(\{f \neq 0\}) = 0$)

Dimostrazione:

Se f è nulla quasi ovunque allora ogni funzione semplice $0 \leq \varphi \leq |f|$ anche $\{f \neq 0\}$ ha misura nulla quindi:

$$\int_X \varphi dm = 0$$

Data una successione di funzioni semplici convergenti ad f , allora:

$$\int_X f dm = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X \varphi_n dm = 0$$

Viceversa:

Sfruttando la disuguaglianza di Markov, siccome $\|f\|_1 = 0 \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ m\left(\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$

Da cui $\{f(x) \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}$ che è un'unione numerabile di insiemi trascurabili.

Osservazione:

Una funzione misurabile è integrabile \leftrightarrow è differenza di due funzioni integrabili con integrale finito

Dimostrazione:

\rightarrow

Osserviamo che $f = f_+ - f_-$ con $\begin{cases} f_+ = \max(0, f) \leq |f| \\ f_- = \max(0, -f) \leq |f| \end{cases}$

Con:

$$\int_X f_+ dm \leq \int_X |f| dm < +\infty$$

$$\int_X f_- dm \leq \int_X |f| dm < +\infty$$

\leftarrow

$f = g - h$ con $\begin{cases} 0 \leq g \\ 0 \leq h \end{cases}$; $\begin{cases} \int_X g dm < +\infty \\ \int_X h dm < +\infty \end{cases}$ allora: $\begin{cases} f \leq g \\ -f \leq h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_+ \leq g \\ f_- \leq h \end{cases} \rightarrow f = f_+ - f_-$ è la minima

decomposizione.

Dunque:

$$\|f\|_1 = \int_X f_+ dm - \int_X f_- dm \leq \int_X g dm - \int_X h dm < +\infty$$

Riassunto proprietà della norma integrale per f misurabile:

$$0 \leq \|f\|_1 < +\infty$$

$$\|f\|_1 = 0 \leftrightarrow f = 0 \text{ quasi ovunque}$$

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$$

$$\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Osservazione (Scomposizione):

$\forall f$ integrabile si può sempre scrivere la scomposizione:

$$\int_X f dm = \int_X f_+ dm - \int_X f_- dm \in \mathbb{R}$$

Inoltre se sappiamo che $f = g - h$ vale:

$$\int_X f dm = \int_X g dm - \int_X h dm$$

Definizione (Spazio delle funzioni integrabili):

$$L^1(X, F, m) = L^1(X, m) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}, \|f\|_1 < \infty\}$$

Proprietà dell'integrale:

$$\int_X (af + bg) dm = a \int_X f + b \int_X g \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; \forall f, g \in L^1$$

$$f \leq g \rightarrow \int_X f dm \leq \int_X g dm \quad \forall f, g \in L^1$$

Osservazione (Forma lineare):

$L^1(X, m)$ è uno spazio vettoriale e la funzione $\phi: L^1(X, m) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \rightarrow \int_X f dm$ è lineare.

Osservazione:

$\eta := \{f \in L^1 \mid \|0\|_1 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di L^1

Questo permette di passare al quoziente definito come:

$L^1 := L^1/\eta$ nel quale anche la seminorma passa al quoziente:

$$\forall f \in L^1, \forall h \in \eta \text{ vale } \|f + h\|_1 = \|f\|_1 \text{ e allora:}$$

$$\forall f + \eta \in L^1 \text{ vale } \|f + \eta\|_1^* := \|f\|_1$$

Attenzione:

Denotiamo gli elementi di L^1 come fossero funzioni.

L'integrale passa al quoziente:

$$\forall f + \eta \in L^1 \quad \int_X^*(f + \eta) dm := \int_X f dm$$

Osservazione:

L^1 è completo.

Teorema di convergenza dominata di Lebesgue:

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili su (X, F, m) convergente puntualmente ad f .

Sia $g \in L^1(X, m) \mid |f_n(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in X; \forall n \in \mathbb{N}$, allora:

$$\int_X f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n dm$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 525

Integrazione per serie:

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabile su (X, F, m) |

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$$

Allora per quasi ogni $x \in X$ la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ è assolutamente convergente ad una funzione } f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \in L^1$$

Vale inoltre:

$$\int_X f dm = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n dm$$

Infine le somme parziali sono integrabili:

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k(x) \in L^1 \text{ ossia } \|f - S_n\|_1 \rightarrow 0 \text{ ed è dominata } (\exists g \in L^1 \mid \forall n \in \mathbb{N} \mid S_n \mid \leq g)$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 526

Corollario:

Lo spazio L^1 è completo, ossia è uno spazio di Banach.

Dimostrazione:

Per il teorema precedente ogni serie normalmente convergente converge in L^1 .

Converso del teorema di convergenza dominata:**Proposizione:**

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ in L^1 , allora \exists una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente quasi ovunque e dominata in L^1 .

Dimostrazione:

Appunti pagina 529

Osservazione:

Il sottospazio delle funzioni polinomiali è denso su $L^1([0,1])$.

Equivalente:

La chiusura dello spazio delle funzioni polinomiali in norma $\|\cdot\|_1$ contiene tutte le funzioni a gradino, ossia quelle semplici da cui $\overline{P}_{\|\cdot\|_1} = L^1$

Proposizione:

Sia T un semianello che genera l'algebra F dello spazio di misura (X, F, m) .

Allora il sottospazio:

$$S_T := \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\chi_A \mid A \in T, m(A) < +\infty\} \subseteq L^1$$

È denso in L^1 .

Dimostrazione:

Appunti pagina 532

Osservazione:

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $h \in \mathbb{R}^n$ possiamo considerare la funzione traslata:

$$f_h = \tau_h(f) \mid f_h(x) = f(x - h)$$

Ad esempio:

$$(\chi_A)_h = \chi_{A+h}$$

Proposizione:

$\forall f \in L^1$ si ha:

$$\|f_h\|_1 = \|f\|_1$$

$$\|f - f_h\|_1 = o(1), h \rightarrow 0$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 535

Teorema di Steinhaus:

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile con misura $m(A) > 0$ allora:

$A - A := \{a - a' \mid a, a' \in A\}$ è un intorno di $0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione:

Appunti pagina 537

Prodotti di spazi di misura:

Siano (X, F, m) , (Y, B, ν) due spazi di misura.

Consideriamo l'algebra prodotto:

$F \otimes B :=$ generata da $T = \{a \times b \mid a \in F, b \in B\}$

Osservazione:

T è un semianello di parti.

Per convenzione: $0 \cdot (\pm\infty) = 0$

Sia $\lambda: T \rightarrow [0, +\infty] \mid \lambda(a \times b) = m(a)\nu(b)$

Osservazione:

λ è una misura elementare.

Costruzione:

Appunti pagina 539

Corollario (Beppo-Levi):

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^1(X, F, m)$ monotona.

Inoltre:

$$\int_X f_n dm \rightarrow c \in \mathbb{R} \quad (\text{Oppure } |\int_X f_n dm| \leq c \in \mathbb{R})$$

Allora:

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad una $f \in L^1$

Dimostrazione:

Appunti pagina 560

Teorema di Fubini:

Siano (X, F, m) ; (Y, B, ν) spazi di misura e sia $f \in L^1(X \times Y, F \otimes B)$, allora:

Per quasi ogni $y \in Y$ la funzione misurabile $f(\cdot, y) \in L^1(X, m)$

È dunque definita una funzione misurabile:

$$\bar{f}: Y \rightarrow \mathbb{R} \mid \bar{f}(y) = \int_X f(x, y) dm(x)$$

$\forall f \in L^1(X \times Y, F \otimes B, m \otimes \nu)$ vale:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(m \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu dm = \int_Y \int_X f(x, y) dm d\nu$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 562

Controesempio senza ipotesi Appunti pagina 565

Teorema di Tonelli:

Sia f una funzione misurabile non negativa sul prodotto di (X, F, m) ; (Y, B, ν) con $\text{Supp } f$ σ -finito.

Allora:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(m \otimes \nu) = \int_Y \int_X f(x, y) dm d\nu \leq +\infty$$

Osservazione:

$$\text{Supp } f := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x, y) \neq 0\}$$

Osservazione:

$\text{Supp } f$ è σ -finito se, ad esempio, X o Y sono σ -finiti.

Osservazione:

Su \mathbb{R}^n le ipotesi sono soddisfatte.

Dimostrazione:

Appunti pagina 567

Insiemi di misura:

Proposizione:

Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione continua che manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla (In particolare se T è k -Lipschitziana) allora $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile $T(E)$ è misurabile.

Dimostrazione:

Appunti pagina 591

Osservazione:

Un esempio di funzione continua che non rispetta le ipotesi è f funzione di Cantor che manda l'insieme trascurabile C in $[0,1]$

Attenzione:

A priori l'immagine mediante funzione continua di un insieme a misura nulla non è nemmeno detto che sia misurabile.

Omomorfismi

Proposizione:

Per $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ applicazione lineare ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile (Indichiamo con $|\cdot|_n$ la misura n -dimensionale di Lebesgue). Allora:

$$|L(E)|_n = |\det(L)| \cdot |E|_n$$

Osservazione:

Questa è un caso particolare della formula:

$$\int_{L(E)} m(y) dy = |\det(L)| \int_E m(L(x)) dx$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 594

Definizione (Misura assolutamente continua):

Una misura m definita su $B(\mathbb{R}^n)$ finita si dice Assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue n -dimensionale λ_n se e solo se:

$$\forall E \in B(\mathbb{R}^n); \lambda_n(E) = 0 \rightarrow m(E) = 0$$

Notazione:

In tal caso si scrive $m \ll \lambda$

Teorema di Radon – Nicodym:

Sia m una misura definita su $B(\mathbb{R}^n)$ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue n -dimensionale.

$$\text{Allora } \exists f \geq 0; f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \forall E \in B(\mathbb{R}^n), m(E) = \int_E f(x) dx$$

Formula del cambio di variabili:

Sia $g: A \rightarrow B$ un diffeomorfismo di classe C^1 tra due aperti di \mathbb{R}^n .

Detto $E \subseteq A$ misurabile, allora $g(E)$ è misurabile, $|J_g|$ è integrabile su E e si ha:

$$m_n(g(E)) = \int_E |J_g(y)| dy$$

Inoltre $g(E)$ ha misura finita $\leftrightarrow |J_g|$ è sommabile su E .

Dimostrazione:

Acquistapace 2 pagina 263

Teorema 2:

Sia $g: A \rightarrow B$ un diffeomorfismo di classe C^1 tra due aperti di \mathbb{R}^n .

Detto $F \subseteq B$ misurabile, f è integrabile su F , allora $(f \circ g)|J_g|$ è integrabile su $g^{-1}(F)$ e vale:

$$\int_F f(x) dx = \int_{g^{-1}(F)} f(g(y)) |J_g(y)| dy$$

Inoltre f è sommabile su $G \leftrightarrow (f \circ g)|J_g|$ è sommabile su $g^{-1}(F)$.

Notazione:

$|J_g| = |\det Dg(y)|$ è detto Jacobiano

Misura k -dimensionale di Lebesgue su sottospazi lineari di \mathbb{R}^n :

Preso uno Spazio Euclideo V (Ossia un \mathbb{R} -spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo),

Sia V uno spazio k -dimensionale, allora $\exists U: \mathbb{R}^k \rightarrow V$ isomorfismo lineare e isometrico.

La misura di Lebesgue k -dimensionale associata al prodotto scalare di V è la misura:

$$m(E) = |U^{-1}(E)| \quad \forall E \in B(V) \text{ con } | \cdot | \text{ la misura di Lebesgue su } \mathbb{R}^k$$

Osservazione:

Non dipende dall'isometria lineare scelta.

Definizione (Immersione locale):

Siano E, F spazi di Banach e sia $\Omega \subseteq E$ un aperto.

Un'applicazione di classe C^1 $f: \Omega \subseteq E \rightarrow F$ è un'immersione locale se $\forall x \in \Omega$ $Df(x)$ ammette un'inversa a sinistra (Ossia è iniettiva).

Definizione (Formula di Stokes):

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo regolare, sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e sia $v: \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ la normale esterna.

Allora vale:

$$\int_{\Omega} \delta_j u(x) dx = \int_{\delta\Omega} u(y) v_j(y) d\sigma(y)$$

Dimostrazione:

Appunti pagina 647