Dispense di Elementi di Teoria degli insiemi (ETI)

Giulio Del Corso

Indice:

3 Teoria intuitiva ed introduttiva
7 Cardinalità
10 Teoria assiomatica ZFC
14 Aritmetica di Peano
16 Teoria delle classi
17 Buoni ordini
20 Ordinali
26 Cardinali

Teoria di Elementi di Teoria degli Insiemi:

Teoria introduttiva ed intuitiva degli insiemi:

Definizione informale (Formula):

È un oggetto matematico contenente esclusivamente:

Variabili: $x, y, \dots, z, x_n$

Simboli logici:

Connettivi: $\wedge$; $\vee$; $\neg$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$

Quantificatori: $\forall$; $\exists$

Definizione informale (Enunciato):

È un'affermazione matematica che si può dire VERA o FALSO.

Attenzione:

Una proprietà in funzione di una variabile come $P(x)$ non è un enunciato ma se aggiungo un quantificatore la variabile diventa legata (Ad esempio $\forall x\ P(x)$).

Proprietà:

$\neg\big(\forall x\ P(x)\big) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

$\neg\big(\exists x\ P(x)\big) \equiv \forall x\ \neg P(x)$

Tabella di verità:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \wedge Q}$	$\boldsymbol{P \vee Q}$	$\boldsymbol{P \rightarrow Q}$	$\boldsymbol{P \leftrightarrow Q}$	$\boldsymbol{\neg P}$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

Osservazione:

Due enunciati si dicono **equivalenti** se le tavole di verità coincidono.

Esempio:

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$

$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$ **Contronominale**

Concetto primitivo:

Insieme è una collezione di oggetti.

<u>Principi della teoria intuitiva degli insiemi:</u>

Principio del Linguaggio:

Tutte le proprietà insiemistiche sono descrivibili mediante il linguaggio della teoria degli insiemi, ossia: Formule ; $=$; $\in$

Principio di Estensionalità:

$A = B$ (Insiemi) se e solo se hanno gli stessi elementi.

Formula:

$\forall A \forall B\ [\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)] \leftrightarrow A = B$

Principio di Comprensione:

Se $P(x)$ è una proprietà ammissibile allora esiste un insieme i cui elementi sono tutti e soli gli *x* che la soddisfano.

Formula:

$\exists A\ \forall x\ \big(x \in A \leftrightarrow P(x)\big)$

Osservazione:

"Ammissibili" serve ad evitare casi come il paradosso di Russell, $R = \{X | X \notin X\}$.

Osservazione:

Un insieme di questo genere viene rappresentato come $A = \{x \mid P(x)\}$

<u>Notazioni formali:</u>

$x \notin A \coloneqq \neg(x \in A)$

$A \neq B \coloneqq \neg(A = B)$

Volendo l'uguaglianza $A = B$ potrebbe essere descritta come: $\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A \cup B \coloneqq \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ **Unione**

$A \cap B \coloneqq \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ **Intersezione**

$A \backslash B \coloneqq \{x \mid (x \in A) \vee (x \notin B)\}$ **Differenza insiemistica**

$\{a_1, \dots, a_n\} \coloneqq \{x \mid (x = a_1) \vee \dots \vee (x = a_n)\}$

$A \subseteq B \coloneqq \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$ **Inclusione**

$\emptyset{:}= \{x \mid x \neq x\}$ **Insieme vuoto**

Essendo una proprietà irrealizzabile ma ammissibile per il principio di estensionalità è unico.

$\emptyset \subseteq A$ in quanto $\forall x\ (x \in \emptyset \rightarrow x \in B)$ è dal punto di vista logico sempre vero.

$P(A) \coloneqq \{X \mid X \subseteq A\}$ **Insieme delle parti** o **Insieme potenza**

Notazioni utili:

$\{x \in A \mid P(x)\} \coloneqq \{x \mid (x \in A) \wedge P(x)\}$

$\forall x \in A\ P(x) \coloneqq \forall x\ \big((x \in A) \rightarrow P(x)\big)$

$\exists x \in A\ P(x) \coloneqq \exists x\ \big((x \in A) \wedge P(x)\big)$

Teoria degli Insiemi pura:
Siccome stiamo lavorando con una Teoria degli insiemi pura vogliamo definire ogni oggetto matematico come insieme.

Coppia ordinata:

$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ Insieme di Kuratowski

Prodotto cartesiano:

$A \times B := \{x \mid \exists a\, \exists b\, (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge x = (a, b)\}$

Relazione binaria:

È un insieme R di coppie ordinate.
xRy significa che $(x, y) \in R$

Osservazione:
$\mathrm{Dom}(R) = \{x \mid \exists y\, (x, y) \in R\}$
$\mathrm{Imm}(R) = \{y \mid \exists x\, (x, y) \in R\}$

Osservazione:
Si dice che R è una relazione su A quando $\mathrm{Dom}(R) = A \wedge \mathrm{Imm}(R) \subseteq A$

Funzione:
Una relazione binaria f (In quanto una ternaria può essere vista come una binaria tra una coppia ed un elemento, etc.) univoca.

Formula:
$\forall x \in \mathrm{Dom}(f)\ \exists!\, y \mid (x, y) \in f$ e si scrive $f(x) = y$

Osservazione:
Una funzione così definita è il suo grafico.

Osservazione:
f si dice **surgettiva** su B se $\mathrm{Imm}(f) = B$
f si dice **iniettiva** se $\forall a, a' \in A\, \big(a \neq a' \to f(a) \neq f(a')\big)$

Osservazione:
Data $f: A \to B$; $X \subseteq A$; $Y \subseteq B$

$f(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X\ f(x) = y\} =^{\text{notazione funzionale}} \{f(x) \mid x \in X\}$
$f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$

Notazione:
$B^A := \{f \mid f: A \to B\}$

Definizione:

Una I-successione $\langle f(i) \mid i \in I \rangle$ è una f con dominio in I (Le successioni con dominio in $\mathbb{N}$ ne sono un caso particolare).

Attenzione:
$\langle f(i) \mid i \in I \rangle$ è una funzione.
$\{f(i) \mid i \in I\}$ è l'insieme immagine.

Notazioni:
Data $\bar{F}$ famiglia non vuota di insiemi:

$\bigcup_{F \in \bar{F}} F = \{x \mid \exists F \in \bar{F}\ (x \in F)\}$

$\bigcap_{F \in \bar{F}} F = \{x \mid \forall F \in \bar{F}\ (x \in F)\}$

Data $\langle F_i \mid i \in I \rangle$ sequenza non vuota di insiemi:

$\bigcup_{i \in I} F_i = \{x \mid \exists i \in I\ (x \in F_i)\}$

$\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \mid \forall i \in I\ (x \in F_i)\}$

Definizione (Prodotto cartesiano infinito):

Data $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ successione infinita, il prodotto cartesiano infinito è:

$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f \text{ è una } I \text{ sequenza} \wedge \forall i \in I\ f(i) \in A_i\}$

Assioma della scelta:

Sia $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ una sequenza infinita non vuota di insiemi non vuoti. Allora $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

Osservazione:
Se la sequenza è finita questo è un teorema ottenuto scrivendo la formula.
Perché non funziona su ∞?
Perché non posso scrivere una formula di un numero infinito di termini.

Attenzione:
Se ho un modo per caratterizzare l'insieme, in pratica per scegliere l'elemento, posso scrivere la formula e quindi non necessito dell'assioma della scelta.
Esempio: lavorando con insiemi con una relazione di ordine potrei prendere il minimo.

Teorema:
Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. Assioma della scelta
2. $\forall$ famiglia di insiemi non vuoti $\exists\ f$ "di scelta"
3. $\forall$ famiglia di insiemi non vuoti $\exists\ X$ "insieme di scelta" (Sempre con intersezione 1)
4. $\forall f: A \to B$ surgettiva $\exists g: B \to A \mid f \circ g = \mathrm{Id_B}$

Cardinalità:

Definizione (Equipotenti):

Due insiemi A ; B si dicono equipotenti se $\exists f: A \to B$ bigettiva.

Osservazione:

Ha le proprietà di una relazione di equivalenza ma non esiste l'insieme che contenga gli insiemi equipotenti.

Teorema di Cantor (D1):

Sia A un insieme qualunque allora non esistono funzioni surgettive $f: A \to P(A)$

Osservazione carina:

Vale anche sull'insieme vuoto in quanto $P(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$

Corollario:

Non esiste l'insieme di tutti gli insiemi $V = \{x \mid x = x\}$

Definizione $\leq$:

$|A| \leq |B|$ quando $\exists f: A \to B$ iniettiva.

Proposizione:

$|P(X)| = |2^X|$

$|A^B \times A^C| = |A^{B+C}|$

Se $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'|$ allora:

$|A \cup B| = |A' \cup B'|$ se $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$

$|A \times B| = |A' \times B'|$

$|B^A| = \left|B'^{A'}\right|$

$|P(A)| = |P(A')|$

$|A| \leq |B| \leftrightarrow |A'| \leq |B'|$

Teorema di Cantor - Bernstein (D2):

Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ allora $|A| = |B|$

Proposizione:

$|A| \leq |B| \leftrightarrow \exists g: B \to A$ surgettiva ($\leftarrow$ AC)

Proposizione (AC):

Sia A insieme infinito e B un insieme finito, allora $|A\backslash B| = |A \cup B| = |A|$

Corollario (AC):

X infinito, se $X\Delta Y = (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)$ finito allora $|X| = |Y| = |X \cap Y| = |X \cup Y|$

Notazione:

$\mathrm{FS}(X) = \{\text{sequenze finite o stringhe di } X\} = \{\sigma |\ \sigma \text{ funzione} \wedge \sigma = \{1,2 \dots, n\} \text{ per qualche } n\}$
$\mathrm{Fin}(X) = \{A \mid A \subseteq X \wedge A \text{ finito}\}$

<u>Cardinalità del numerabile:</u>

A si dice se è $|A| = |\mathbb{N}|$ e si scrive $|A| = \aleph_0$

Teorema (AC,D3):

Se A è infinito $|\mathbb{N}| \leq |A|$

Teorema (Processo diagonale di Cantor,D4):

Non $\exists f: \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ surgettive.

<u>Definizione (Insieme infinito):</u>

È un insieme che è in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

<u>Definizione (Insieme finito):</u>

È un insieme il cui complementare è infinito.

Osservazione:

$|\mathbb{Z}| = \aleph_0$
$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$
$|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}| = \aleph_0$
$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$
$|\mathbb{Z}[x]| = |\mathbb{Q}[x]| = \aleph_0$
$|\mathrm{FS}(\mathbb{N})| = |\mathrm{Fin}(\mathbb{N})| = \aleph_0$

Teorema (AC):

Se $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ è una sequenza dove $|I| \leq \chi_0$ e $|A_i| \leq \chi_0$ $\forall i$ allora $|\bigcup_{i\in I} A_i| \leq \aleph_0$

Definizione (Cardinalità del continuo):

$c = |\mathbb{R}|$

Teorema:

$|\mathbb{R}| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = |P(\mathbb{N})|$

Ipotesi del continuo (Indecidibile):

$X \subseteq \mathbb{R}$ infinito $\rightarrow\ |A| = \aleph_0 \vee |A| = c$

Equivalente:

Non esistono cardinalità intermedie fra c e $\aleph_0$

Osservazione:

$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = c$

$|\mathrm{FS}(\mathbb{R})| = |\mathrm{Fin}(\mathbb{R})| = c$

$|(a, b)| = c\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = c$

$\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = c$

$\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| = \left|[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}\right| = c$

$|C^0(\mathbb{R})| = c$

$|[\mathbb{R}]^c| = |2^c|$

Notazione:

$[\mathbb{R}]^{\aleph_0} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| = \aleph_0\}$

$[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0\}$

Proposizione (AC,D5):

Se $|B| = c$; $A \subseteq B \mid |A| < c \rightarrow |B \backslash A| = c$

Corollario (Teorema di Cantor):

$|\{\text{trascendenti}\}| = c$

Teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo Fraenkel (ZFC):

Definizione (Simboli logici):
Sono i simboli divisi in:

Connettivi: $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$
Variabili: x ; y ; z ; … ; x_1 ; x_2 ; …
Quantificatori: $\exists$ (Esistenziale) ; $\forall$ (Universale)

Definizione (Formula):

Sono sequenze finite di simboli logici, parentesi e i simboli $\in$ e $=$

(Formule atomiche): Se x, y sono variabili allora è una formula del tipo $x = y$; $x \in y$
Se φ è una formula allora $\neg(\varphi)$ è una formula con le stesse variabili libere.
Se φ e μ sono formule allora $(\varphi \vee \mu)$; $(\varphi \wedge \mu)$; $(\varphi \rightarrow \mu)$; $(\varphi \leftrightarrow \mu)$ sono formule con le variabili libere di entrambe.
Se φ è una formula $\forall x\ (\varphi)$ e $\exists x\ (\varphi)$ sono formule con le stesse variabili libere di φ tranne x che è detta variabile legata.

Esempio:
$\forall x\ (x \in y)$ è una formula con x variabile legata e y variabile libera.

Definizione (Enunciato):

Una formula dove tutte le variabili sono legate.

Equivalente:
Una formula che si può dire vera o falsa.

Esempio:
$\forall x\ \exists y\ (x \in y)$

Parametri:
Sono due insiemi assegnati, potrebbero essere assegnati universalmente con i quantificatori ma preferiamo considerarli come già presi.

Assioma 1: **Estensionalità**

$\forall x \forall y\ (\forall t\ t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y$

Assioma 2: **Vuoto**

$\exists x\ \forall t\ t \notin x$ indicato con il simbolo $\emptyset$

Assioma 3: **Coppia**

$\forall a\ \forall b\ \exists c\ c = \{a, b\}$

Osservazione:

$\{a, a\} = \{a\}$

Assioma 4: **Unione**

$\forall x\ \exists y\ u = \bigcup x$

In formula: $\forall x\ \exists y\ \Big(\forall s\ \big(s \in y \leftrightarrow (\exists t \in x\ s \in t)\big)\Big)$

Assioma 5: **Potenza**

$\forall x\ \exists y\ y = P(x)$

Assioma 6: **Schema di separazione o Assioma dei sottoinsiemi**

Dato un insieme che già so esistere allora posso prendere ogni sottoinsieme di questo che rispetti una data proprietà.

Formula:

$\forall x_1, \dots, x_n\ \forall y\ \exists z\ z = \{t \in y \mid \varphi(t, x_1, \dots, x_n)\}$

Dove $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ è una formula con $t, x_1, \dots, x_n$ tutte e sole le variabili libere.

Assioma 7: Scelta

Se $\langle A_i\ | i \in I \rangle$ è una sequenza infinita di insiemi non vuoti allora $\prod_{I \in I} A_i \neq \emptyset$

Assioma 8: Infinito

$\exists$ insiemi induttivi.

Assioma 9: Fondazione

$\forall X \neq \emptyset\ \ \exists y \in X\ \ y \cap X = \emptyset$

Equivalente:

X ha elementi ϵ minimali.

Proprietà derivate dagli assiomi (1-6):

$\forall A\ \forall B\ \exists C\ |$

1. $C = A \cap B$
2. $C = A \cup B$
3. $C = A \backslash B$
4. $C = (A, B)$
5. $C = A \times B$
6. $C = \mathrm{Fun}(A, B) \coloneqq B^A$

<u>Costruzione dei numeri naturali:</u>

Un modo intuitivo per definirli potrebbe essere:

$0 = \emptyset\ ;\ 1 = \{0\} = \{\emptyset\}\ ;\ 2 = \{0,1\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\ ;\ 3 = \{0,1,2\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\}\ ;\ 4 = 3 \cup \{3\}\ ;\ \dots$

Osservazione 1:

L'esistenza di ciascuno dei singoli insiemi precedenti è garantita dagli assiomi 1-7

Osservazione 2:

È necessario l'assioma 8 per garantire l'esistenza dell'insieme che li contenga tutti e soli.

Notazione:

$\hat{x} = x \cup \{x\}$

<u>Definizione (Insieme induttivo):</u>

X insieme si dice induttivo se:

1. $\emptyset \in X$
2. $\forall x\ (x \in X \to \hat{x} \in X)$

<u>Definizione formale (Numero naturale di Von Neumann):</u>

n si dice naturale se appartiene ad ogni X induttivo.

Proposizione (D6):

$\exists!\, w\ |\ x \in w \leftrightarrow x$ è un numero naturale; w è induttivo.

Teorema (Principio di Induzione, D7):

$\forall A_1, \dots, A_k$ se $P(0, A_1, \dots, A_k)$ e $\forall n \in w$ vale $P(n, A_1, \dots, A_k) \to P(\hat{n}, A_1, \dots, A_k)$ allora $\forall n \in w\ P(n, A_1, \dots, A_k)$

Teorema (Naturali):

$(w, \in)$ è un insieme totalmente ordinato, ossia: $x \notin x$; $x \in y \wedge y \in z \to x \in z$; $\forall x, y$ vale una e una sola tra $x = y$; $x \in y$; $y \in x$ (Tricotomia)

Proposizione (Successore):

$S: n \to \hat{n} \mid S: w \to w \setminus \{0\}$ che associa ad ogni elemento il suo successore è una bigezione.

Osservazione:

$n \in m \leftrightarrow n \subsetneq m$
$n \in m \to \hat{n} \in \hat{m}$
$\hat{n} \in \hat{m} \to n \in m$
$(x \in n \in w) \to (x \in w)$
$n \cap m = \min\{n, m\}$
$n \cup m = \max\{n, m\}$
Se $\hat{n}$ è il successore di n allora è il più piccolo naturale maggiore di n.

Teorema (D8):

Sia $(N, <)$ un insieme ordinato con minimo 0, allora sono equivalenti:

1. $\forall A \subseteq N$ non vuoto ha minimo (**Principio del buon ordinamento**)
2. $\forall P$ se vale $P(0) \wedge \forall x < y\ P(x) \to P(y)$ allora $\forall x \in N$ vale $P(x)$ (**Principio di Induzione**)

Teorema di ricorsione numerabile (D9):

A insieme; $\tilde{a} \in A$; $g: w \times A \to A$ allora
$\exists!$ Successione $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ di elementi di $A \mid a_0 = \tilde{a}$; $a_{n+1} = g(n, a_n)$

<u>**Definizione (Insieme finito):**</u>

Un insieme A si dice finito se $\exists n$ naturale $|A| = |n|$

Principio dei cassetti (D10):

Se $n > m$ e $f: n \to m$ allora f è non iniettiva.

Assiomi dell'Aritmetica di Peano:

Operazioni su ω:
$n, m \in \omega$ allora:

$n + m \coloneqq |A \cup B|$ dove $|A| = n$; $|B| = m$; $A \cap B = \emptyset$

$n \cdot m \coloneqq |A \times B|$ dove $|A| = n$; $|B| = m$

Lo scopo è caratterizzare l'insieme dei naturali a partire da delle proprietà assiomatiche della funzione successore.

Definizione (Modello di PA o Sistema di numeri naturali):

$\mathbb{N}$ **insieme**

$0 \in \mathbb{N}$ elemento "**zero**"

Funzione **successore** $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Operazione **Somma** $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Operazione **Prodotto** $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Che devono soddisfare le seguenti proprietà (**Assiomi**):

PA1: Tutti e soli gli elementi di $\mathbb{N} \backslash \{0\}$ sono successori. $\forall x \in \mathbb{N} \left(x \neq 0 \leftrightarrow \exists y \; x = S(y) \right)$

PA2: La funzione successore è iniettiva. $\forall x \forall y \left(x \neq y \to S(x) \neq S(y) \right)$

PA3 (Somma): $\forall x \in \mathbb{N} \; (x + 0 = x)$; $\forall x \in \mathbb{N} \; \forall y \in \mathbb{N} \left(x + S(y) = S(x + y) \right)$

PA4 (Prodotto): $\forall x \in \mathbb{N} \; (x \cdot 0 = 0)$; $\forall x \in \mathbb{N} \; \forall y \in \mathbb{N} \; (x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$

PA5II (Induzione di 2° ordine): Se $A \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in A \wedge \forall x \; (x \in A \to S(x) \in A)$ allora $A = \mathbb{N}$

Questi bastano a dimostrare l'unicità (Brevemente sono gli **assiomi $\mathbf{PA_{II}}$**)

PA5I (Induzione di 1° ordine): Sia $P(x)$ una formula, $P(0) \wedge \left(\forall x \; P(x) \to P\left(S(x)\right) \right) \to \forall x \; P(x)$

Definizione (<):

$x < y \coloneqq \exists z \neq 0 \; (x + z = y)$

Proprietà:

< è una relazione di ordine totale.

Teorema di Esistenza (D11):

$(\omega, \emptyset, S: x \to \hat{x}, +, \cdot)$ è un modello di $\mathrm{PA_{II}}$

Teorema di Unicità (D12):

Tutti i modelli di $\mathrm{PA_{II}}$ sono isomorfi.

Ricordiamo (Isomorfismo):

$m = (N, 0, S, +, \cdot)$; $m' = (N', 0', S', +', \cdot')$

Due modelli di $\mathrm{PA_{II}}$ sono isomorfi se $\exists \Theta: N \to N' \mid$

$\Theta(0) = 0$; $\Theta\left(S(x)\right) = S'\left(\Theta(x)\right)$; $\Theta(x + y) = \Theta(x) +' \Theta(y)$; $\Theta(x \cdot y) = \Theta(x) \cdot' \Theta(y)$

In tal caso $m \cong m'$

Corollario:
I naturali sono univocamente determinati da $\mathrm{PA}_{\mathrm{II}}$

Costruzione di ulteriori insiemi:
Definizione $\mathbb{Z}$ insieme degli interi:

$\mathbb{Z} \coloneqq {}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}/_{\sim}$ con $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a + d = c + d$

Osservazione:
$\sim$ è una relazione di equivalenza
In ogni classe di equivalenza c'è un unico elemento della forma:
$(n, 0)\ n > 0$ oppure $(0, n)\ n > 0$ oppure $(0,0)$
Allora identifichiamo: $[(n, 0)]$ con $n \in \omega$; $[(0, n)]$ con $-n$ e $[(0,0)]$ con 0
Cosicché $\mathbb{Z} = \omega \cup \{-n \mid n \in \omega\}$

Definizione (Somma e prodotto in $\mathbb{Z}$):
$[(a, b)] + [(c, d)] \coloneqq [(a + c, b + d)]$
$[(a, b)] \cdot [(c, d)] \coloneqq [(ac + bd, bc + ad)]$

Proposizione:
$(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ è un anello ordinato discreto.

<u>Definizione (Razionali):</u>
Il sistema dei numeri razionali è definito come $(\mathbb{Q}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ con:

$\mathbb{Q} = {}^{\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus 0)}/_{\sim}$ con $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$

$0 \coloneqq [(0,1)]$
$1 \coloneqq [(1,1)]$
$[(a, b)] \leq [(c, d)] \leftrightarrow ad \leq bc$
Somma: $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$
Prodotto: $[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$

Osservazione: $(\mathbb{Q}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ è un campo ordinato denso e archimedeo.

<u>Definizione (Taglio di Dedekind):</u>
$X \subseteq \mathbb{Q}$ si dice un taglio di Dedekind se:
X è non banale $(X \neq \emptyset, X \neq \mathbb{Q})$
X è un segmento iniziale $x' < x \in X \rightarrow x' \in X$
X non ha massimo
Esempi: $X = \{q \in \mathbb{Q} \mid (q \leq 0) \vee (q^2 < 2)\}$; $X_q = \{q' \in \mathbb{Q} \mid q' < q\}$

<u>Definizione (Reali):</u>
$\mathbb{R} = \{X \subseteq \mathbb{Q} \mid X \text{ taglio di Dedekind}\}$ con $X, Y \in \mathbb{R}$; $X \leq Y \leftrightarrow X \subseteq Y$, $X + Y = \{x + y \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$
$-X_q = X_{-q}$ altrimenti $-X = \{q \in \mathbb{Q} \mid -q \notin X\}$; $X_0 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$

Teoria delle classi (Bernays-Von Neumann):

Idea:

Costruire degli oggetti del tipo $\{x \mid \varphi(x)\}$. Alcune classi possono essere insiemi, nel caso non siano insiemi si parla di cassi proprie.

Esempi di classe proprie sono:

$R = \{x \mid x \notin x\}$; $V = \{x \mid x = x\}$; $\mathrm{Ord} = \{\alpha \mid \alpha \text{ ordinale}\}$; $\wedge_a = \{x \mid |x| = |a|\}$;
$C_a = \{x \mid a \in x\}$; $\mathrm{OP} = \{x \mid \exists y, z\ x = (y, z)\}$; $\mathrm{Fin} = \{x \mid x \text{ finito}\}$

Gli elementi delle classi si dicono insiemi.

Assiomi sulle classi:

Estensionalità:

Due classi sono uguali se hanno gli stessi elementi.

Comprensione (o Astrazione):

Per ogni formula φ dove si quantificano solo insiemi e per ogni classe $A_1, \dots, A_n$ esiste la classe $C = \{x \mid \varphi(x, A_1, \dots, A_n)\}$

Sono classi:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Sottoclassi di insiemi sono insiemi

Definizione (Funzione classe):

Una funzione classe è una classe F i cui elementi sono coppie ordinate e tale che $(x, y), (x, y') \in F \rightarrow y = y'$

Osservazione:
$\mathrm{Dom}(F) = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in F\}$ è una classe.
Se $x \in \mathrm{Dom}(F)$ indichiamo con $F(x)$ quell'unico $y \mid (x, y) \in F$

Esempi:
$F_1(x) = \{x\}$; $F_2(x) = P(x)$
Data F funzione classe $F[C] = \{F(c) | \ c \in C\}$ è una classe propria.

Assioma di Rimpiazzamento:

Sia F una funzione classe e a un insieme contenuto in $\mathrm{Dom}(F)$.
Allora anche: $F[a] = \{F(x) | \ x \in a\}$ è un insieme.

Assioma dei Sottoinsiemi:

Sia A una classe e b un insieme $\rightarrow A \cap b$ è un insieme (Sottoclassi di insiemi sono insiemi)

Buoni ordini:

Definizione (Buoni ordini):

Un insieme ordinato $(A, <)$ è ben ordinato se $\forall\, X \subseteq A\,; X \neq \emptyset\ \exists \min(X)$

Osservazione:

Ogni insieme totalmente ordinato finito è ben ordinato.
Ogni insieme totalmente ordinato finito ha massimo e minimo.
Due insiemi ordinato finiti equipotenti sono isomorfi (L'isomorfismo preserva l'ordine).

Proposizione (AC,D13):

$(A, <)$ è ben ordinato $\leftrightarrow\ \nexists$ catene discendenti.

Definizione (Segmento iniziale):

Se A è ordinato allora $S \subseteq A$ è un segmento iniziale se $x < y \in S \to x \in S$

Definizione (Generato):

Un segmento iniziale S si dice generato da un elemento $a \in A$ se $S = A_a \coloneqq \{x \in A \mid x < a\}$

Esempio (generato):

$(-\infty, 1) \subseteq \mathbb{R}$

Esempio (non generato):

$S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \vee q^2 < 2\}$ segmento iniziale su $\mathbb{Q}$.

Proposizione (D14):

Se $(A, <)$ è ordinato è ben ordinato $\leftrightarrow$ ogni segmento iniziale è generato da un qualche elemento.

Proprietà:

1. Se F è una famiglia di insiemi ordinati dove uno è sottoinsieme dell'altro (Le relazioni d'ordine sono le restrizioni di quelle degli insiemi più grandi) allora $\cup\, F = \cup_{(A,<_A)\in F0}\ (A, <_A)$ è un insieme ordinato.
2. La 1. non vale rimpiazzando "ordinato" con "ben ordinato".
3. Se F è una famiglia di insiemi ben ordinati che sono uno il segmento iniziale dell'altro allora $\cup\, F$ è un buon ordinamento.

Proposizione:

Sia $(A,<)$ buon ordinamento, allora:

1. Se $\varphi: A \to A$ preserva l'ordine allora $\varphi(a) \geq a \ \forall a \in A$
2. $\forall a \in A \ a \ncong A$
3. Se $a \neq a' \to A_a \ncong A_{a'}$
4. L'unico automorfismo $\varphi: A \to A$ è l'identità.

Osservazione:

Può capitare che $\exists$ $(A,<)$ buon ordinamento e $B \subsetneq A \mid (B,<) \cong (A,<)$

Esempio:

$[-2,\infty) \cong [0,\infty)$

$\mathbb{N} \cong \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

<u>**Teorema della Tricotomia dei buoni ordini (D15):**</u>

Se $(A,<)$; $(B,<)$ sono buoni ordini, allora vale una ed una sola fra:

$A \cong B \ \big(ot(A) = ot(B)\big)$

$A \cong B_b$ per opportuno $b \in B$ $\big(ot(A) = ot(B)\big)$

$B \cong A_a$ per opportuno $a \in A$ $\big(ot(A) = ot(B)\big)$

Osservazione:

Ogni b. ordinamento può essere ottenuto dai precedenti per ricorsione transfinita.

Proprietà:

Sia $(A,<)$ un insieme ordinato infinito, allora sono proprietà equivalenti:

1. $(A,<) \cong (w,\in)$
2. Ogni segmento iniziale $S \neq A$ è finito.
3. Nessun $X \subseteq A$ infinito ha massimo.

Sia $(A,<)$ ben ordinato e $B \subseteq A$ allora $ot(B) \leq ot(A)$

F famiglia non vuota di buoni ordini, allora $\exists (A,<) \in F$ che ha tipo di ordine minimo.

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è ben ordinato allora $|A| \leq \aleph_0$

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ ben ordinati allora anche $A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$ è ben ordinato.

Somma, prodotto ed esponenziazione di buoni ordini:

Definizione (Somma):
Dati A, B insiemi ordinati allora $A \oplus B$ è l'insieme $A \sqcup B \coloneqq (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ con l'ordine:

$(a, 0) < (a', 0) \leftrightarrow a <_A a'n$
$(b, 1) < (b', 1) \leftrightarrow b <_B b'$
$(a, 0) < (b, 1)\ \forall a \in A\ ;\ \forall b \in B$

Osservazione:
$A \oplus B$ è ben ordinato $\leftrightarrow$ A e B sono ben ordinati
$A \cong A' \wedge B \cong B' \rightarrow A \oplus B \cong A' \oplus B'$
$(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$

Notazione:
$ot(A) + 1 \coloneqq ot(A \oplus 1)$

Definizione (Prodotto):
Dati A, B insiemi ordinati allora $A \otimes B$ è l'insieme $(A \times B, <)$ con l'ordine:

$(a, b) < (a', b') \leftrightarrow b <_B b'$ oppure $b =_B b' \wedge a <_A a'$

Osservazione:
$A \otimes B$ è ben ordinato $\leftrightarrow$ A e B sono ben ordinati
$A \cong A' \wedge B \cong B' \rightarrow A \otimes B \cong A' \otimes B'$
$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

Proprietà distributiva a destra:
$A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$

Definizione (Esponenziale):
Dati A, B insiemi ben ordinati allora $\mathrm{Exp}(A, B) = (\mathrm{Fun}_0(B, A), <)$ con l'ordine della massima differenza:

$f < g \leftrightarrow f(\bar{b}) <_A g(\bar{b})$ con $\bar{b} = \max\{b \in B \mid f(b) \neq g(b)\}$

Notazione:
$\mathrm{Fun}_0(B, A) = \{f \in A^B \mid \mathrm{Supp}(f) \text{ è finito}\}$
$\mathrm{Supp}(f) = \{b \in B \mid f(b) \neq 0\}$

Osservazione:
Se A e B sono insiemi ben ordinati allora $\mathrm{Exp}(A, B)$ è ben ordinato.

Ordinali:

Definizione (Ordinale):

α si dice ordinale se:

1. $(\alpha, \in)$ è un buon ordine
2. α è transitivo ($x \in y \in \alpha \to x \in \alpha$)

Esempi:

Ogni n naturale è un ordinale $x \in y \in n \to x \in n$

w è un ordinale (Ed ha il più piccolo tipo d'ordine tra i buoni ordinamenti infiniti, segue dalla tricotomia).

$\{2n \mid n \in \omega\}$ è ben ordinato ma non è transitivo quindi non è un ordinale.

Proprietà:

Sia α un ordinale:

$\alpha \notin \alpha$

$x \in \alpha \to x$ ordinale

$\alpha \cup \{\alpha\}$ è un ordinale

Osservazione:

$(\alpha, \in)$ buon ordinamento è un ordinale $\leftrightarrow$ al posto della 2. Vale $\forall a \in \alpha \ \alpha_a = a$

Teorema (D16):

Se $\alpha \cong \beta$ ordinali isomorfi allora $\alpha = \beta$

Tricotomia degli ordinali:

Se α, β ordinali allora vale una ed una sola delle seguenti proprietà:

1. $\alpha = \beta \ (\leftrightarrow \alpha \cong \beta)$
2. $\alpha \in \beta \ (\leftrightarrow \exists \mu \ \alpha \cong \beta_\alpha = \mu \to \alpha = \mu \in \beta)$
3. $\beta \in \alpha$ (analogo)

Osservazione:

α, β ordinali sono proprietà equivalenti:

$\alpha \in \beta$

α segmento iniziale proprio di β

$\alpha \subsetneq \beta$

Proposizione (Insiemi di ordinali):

X insieme di ordinali, allora:

X ordinale $\leftrightarrow$ X è un insieme transitivo.

Idea (Tipi di ordinali):

Esistono tre tipi di ordinali: $\begin{cases} 0 \\ \text{Successori } \alpha = \beta \cup \{\beta\} \\ \text{Limite } \lambda \end{cases}$

Teorema: (D17)

$\forall$ $(A, <)$ buon ordinamento $\exists$ un ordinale α | $(A, <) \cong (\alpha, \in)$

Operazioni sugli ordinali:

Induzione transfinita (Sugli ordinali):
Sia $P(x)$ una proprietà ed assumiamo che valga $\forall a$ ordinale: $\forall\ b < a\ \ P(b) \rightarrow P(a)$
Allora $P(a)$ per tutti gli ordinali.

Osservazione pratica:
Si distinguono i tre casi:
$\alpha = 0$
$\alpha = \beta \cup \{\beta\} \coloneqq \beta + 1$ è un successore, ossia ammette massimo.
$\alpha = \lambda$ è limite, cioè non ha massimo

Caratterizzazione del limite:
$\lambda \neq 0$ è un limite $\leftrightarrow \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \delta$

Esempio:
$\omega = \bigcup_{n<\omega} n$ è un limite mentre $17 \neq \bigcup_{n<17} n = 16$ non lo è.
Quindi data una proprietà $P(x)$ dimostriamo che valgono:
$P(0)$
$\forall\beta\ P(\beta) \rightarrow P(\beta+1)$
Se λ è un limite $\left(\forall\delta < \lambda\ P(\delta)\right) \rightarrow P(\lambda)$
Allora $P(\alpha)\ \forall\alpha$ ordinale.

Teorema di ricorsione transfinita:
Data una funzione classe G definita su tutti gli insiemi allora:
$\exists!$ Funzione classe F definita sulla classe degli ordinali | $F(\alpha) = G\left(F_{|a}\right)$

Osservazione:
Data F funzione classe allora $F_{|a}$ è un insieme.

Teorema di ricorsione per casi:
Date due funzioni classe G, H e un insieme A allora:
$\exists!$ Funzione classe F |
$F(0) = A$
$F(\beta+1) = G(F(\beta), \beta)$
$F(\lambda) = H\left(F_{|\lambda}\right)$ se λ è un limite.

Osservazione (D18):
Teorema di ricorsione $\rightarrow$ teorema di ricorsione per casi.

Definizione (Somma di ordinali):

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha + \delta \ \text{ con } \lambda \text{ limite} \end{cases}$$

Esempio:

$\omega + \omega = \bigcup_{n<\omega} \omega + n$

$17 + \omega = \bigcup_{\delta<\omega}(17 + \delta) = \omega$

Teorema:

(Ordinali) $\alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta$ (Buoni ordini)

Teorema:

Se $n, m \in \omega \rightarrow$ la somma fra ordinali coincide con la somma fra Naturali di Von Neumann.

Proprietà:

$\alpha \leq \beta \rightarrow \forall\gamma\ (\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$ il viceversa è falso, basta considerare $2 + \omega \leq 1 + \omega$

$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \forall\gamma\ (\gamma + \alpha \leq \gamma + \beta)$

$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

$\forall n < \omega\ (n + \omega = \omega)$

$\forall\alpha\ (0 + \alpha = \alpha)$

Esempio dimostrazione:

Caso base: $\alpha = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

Caso successore: avendo $\alpha = \beta + 1$ ipotizzando $P(\beta) \rightarrow P(\beta + 1)$.

Infatti $0 + (\beta + 1) =^{definizione} (0 + \beta) + 1 =^{Hp\ induttiva} \beta + 1$

Caso limite: $\alpha = \lambda$ limite, ipotesi $\forall\delta < \lambda$ vale $0 + \delta = \delta$ dunque

$0 + \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda}(0 + \delta) = \bigcup_{\delta<\lambda} \delta = \lambda$

Definizione (Prodotto di ordinali):

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot \delta \ \text{ con } \lambda \text{ limite} \end{cases}$$

Proprietà:

$\forall\alpha\ (1 \cdot \alpha = \alpha)$

$\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$

$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \gamma \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \beta$ con $\gamma \neq 0$

$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Teorema:

(Ordinali) $\alpha \cdot \beta \cong \alpha \otimes \beta$ (Buoni ordini)

Esempio:

$2 \cdot \omega = \bigcup_{n<\omega} 2n = \omega$

Definizione (Esponenziazione di ordinali):

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1 \\ \alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^\delta \text{ con } \lambda \text{ limite} \end{cases}$$

Proprietà:

$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$

$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

Attenzione:

$\exists \varepsilon$ ordinali | $\omega^\varepsilon = \varepsilon$

Esempi di operazioni:

$(\omega+1)\cdot 2 = (\omega+1)+(\omega+1) = \omega+(1+\omega)+1 = \omega+\omega+1 = \omega\cdot 2+1$

Generalizzando: $(\omega+1)\cdot n = \omega\cdot n+1$

$(\omega+1)\cdot\omega = \bigcup_{n<\omega}(\omega+1)\cdot n = \bigcup_{n<\omega}(\omega\cdot n+1) = \bigcup_{k<\omega}\omega\cdot k = \omega^2$

Per passare a k sfruttiamo: $\omega\cdot n \leq \omega\cdot n+1 \leq \omega\cdot n+\omega = \omega\cdot(n+1)$

$(\omega+1)^2 = (\omega+1)\cdot(\omega+1) = (\omega+1)\cdot\omega+\omega+1 = \omega^2+\omega+1$

$(\omega^2+\omega+1)\cdot 3 = \omega^2+(\omega+1+\omega^2)+(\omega+1+\omega^2)+\omega+1 = \omega^2+\omega^2+\omega^2+1 = \omega^2\cdot 3+\omega+1$

Generalizzando: $(\omega^2+\omega+1)\cdot n = \omega^2\cdot n+\omega+1$

$(\omega^2+\omega+1)\cdot\omega = \bigcup_{n<\omega}(\omega^2+\omega+1)\cdot n = \bigcup_{n<\omega}(\omega^2\cdot n+\omega+1) = \bigcup_{k<\omega}\omega^2\cdot k = \omega^3$

Per passare a k sfruttiamo: $\omega^2\cdot n+\omega+1 \leq \omega^2\cdot n+\omega^2 = \omega^2\cdot(n+1)$

$(\omega+1)^3 = (\omega+1)^2\cdot(\omega+1) = (\omega^2+\omega+1)\cdot(\omega+1) = (\omega^2+\omega+1)\cdot\omega+(\omega^2+\omega+1) =$
$= \omega^3+\omega^2+\omega+1$

Generalizzando: $(\omega+1)^n = \omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+\omega+1$

$(\omega+1)^\omega = \bigcup_{n<\omega}(\omega+1)^n = \bigcup_{n<\omega}(\omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+\omega+1) = \bigcup_{k<\omega}\omega^k = \omega^\omega$

Per passare a k sfruttiamo: $\omega^n < \omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+\omega+1 < \omega^{n+1}$

$\omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega\cdot\omega^\omega$

Idea:

Quando stiamo lavorando con i limiti dobbiamo cercare di portarli in una forma più facile. Se riusciamo a costruire una catena di disuguaglianze il cui primo e ultimo termine siano maggiorabili l'un l'altro semplicemente alzando il parametro abbiamo vinto.
(Ad esempio $\omega^n \leq \cdots \leq \omega^{n+1}$ allora tutto quello che è compreso nei puntini è equivalente)

Osservazione:
Dato $\alpha > 0$ sono proprietà equivalenti:
$\forall\beta < \alpha \ (\beta + \alpha = \alpha)$
$\forall\beta, \gamma < \alpha \ (\beta + \gamma < \alpha)$
$\alpha = \omega^{\delta}$ per qualche δ

Osservazione:
Dato $\alpha > 0$ sono proprietà equivalenti:
1. $\forall\beta < \alpha \ \ \beta \cdot \alpha = \alpha$
2. $\forall\beta, \gamma < \alpha \ \ \beta \cdot \gamma < \alpha$ (Moltiplicativamente chiuso)
3. $\exists\delta \ \ \alpha = \omega^{\omega^{\delta}}$

Proprietà:
λ è un limite $\leftrightarrow$ è della forma $\lambda = \omega \cdot \gamma$ per qualche γ

<u>Successori e limiti:</u>
Dati due ordinali $\alpha, \beta > 1$ indichiamo con S un successore e con L un limite.

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha \cdot \beta$	α^{β}
S	S	S	S	?
S	L	L	L	L
L	S	S	L	L
L	L	L	L	L

Proposizione:
Se β è un successore allora $\exists\lambda$ limite oppure $\lambda = 0$ ed $\exists k \in \omega \mid \beta = \lambda + k$

<u>Sottrazioni:</u>
Dati $\alpha \geq \beta \to \exists! \ \gamma \mid \beta + \gamma = \alpha$

Teorema di divisone euclidea (D19):
Dati $\alpha \geq \beta > 0 \to \exists! \gamma \ ; \ \exists! \rho < \beta \mid \alpha = \beta \cdot \gamma + \rho$

Esempio:
$\omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$ diviso $\omega + 5$
Si procede a tentativi:
$(\omega + 5) \cdot \omega = \omega^2 < \omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$
$(\omega + 5) \cdot (\omega + 1) = \omega^2 + \omega + 5 < \omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$
$(\omega + 5) \cdot (\omega + 3) = \omega^2 + \omega \cdot 3 + 5 < \omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$
$(\omega + 5) \cdot (\omega + 4) = \omega^2 + \omega \cdot 4 + 5 < \omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$
Quindi il quoziente è $(\omega + 3)$, cerchiamo il resto.
$\omega^2 + \omega \cdot 3 + 35 + \xi = \omega^2 + \omega \cdot 4 + 3 \to \ \xi = \omega + 3$

<u>Forma normale di Cantor (Base ω) (D20):</u>
$\forall\alpha > 0$ ordinale $\exists! \ \gamma_1 > \cdots > \gamma_k \ \exists! n_i \in \omega$ con $\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$

Cardinali:

Definizione (Cardinali):

Un ordinale k si dice cardinale se è un ordinale iniziale, cioè se $\alpha < k \to |\alpha| < |k|$

Proprietà:

$n \in \omega$ sono cardinali finiti.

Ogni cardinale infinito è limite, infatti se β è infinito allora $|\beta| = |\beta + 1|$

Attenzione: Il viceversa è falso: $\omega + \omega$ è un limite ma non è un cardinale in quanto $\omega < \omega + \omega$ ma $|\omega| = |\omega + \omega|$

Teorema (AC,D21):

Ogni insieme è equipotente ad un unico cardinale.

Funzione classe Aleph:

È un funzione definita per ricorsione transfinita:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha) \\ \aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \end{cases}$$

Quindi:

$\aleph_1 = H(\aleph_0) = \{\beta \mid |\beta| \leq |\omega|\} = \omega_1$

$\aleph_2 = H(\aleph_1) = \{\beta \mid |\beta| \leq |\omega_1|\} = \omega_2$

…

$\aleph_\omega = \bigcup_{n<\omega} \aleph_n$

Ricordiamo che H è la **funzione classe di Hartogs** definita a partire da un insieme a come:

$H(a) = \{\beta \text{ ordinali} \mid |\beta| \leq |a|\}$

Osservazione (D22):

$H(a)$ è un insieme.

$H(a)$ è un ordinale.

$H(a)$ è un cardinale.

$\nexists f: H(a) \to a$ iniettiva.

Se a è un ordinale allora $H(a)$ è il più piccolo ordinale di cardinalità maggiore.

Teorema (D23):

Ogni cardinale è un $\aleph_a$

Proposizione(D24):
$F: \mathrm{ord} \to \mathrm{ord}$ funzione classe |

1. $\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta)$
2. F è continua, cioè se $\exists \lambda$ limite vale $F\left(\bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma\right) = \bigcup_{\gamma<\lambda} F(\gamma)$

Allora F ammette punti fissi arbitrariamente grandi.

Esempi di cardinali:

$\aleph_0 + n = \aleph_0$	$\aleph_0^n = \aleph_0$	$\aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$	$\aleph_0^c = 2^c$
$\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$	$\aleph_0^{\aleph_0} = c$	$c^n = c$	$c^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$
$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$	$\aleph_1^{\aleph_0} = c$	$n^c = 2^c$	$\aleph_1^c = 2^c$
$n^{\aleph_0} = c$	$\aleph_0^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$	$c^{\aleph_0} = c$	$c^c = 2^c$

Definizione (Somme e prodotti infiniti di cardinali):
$\langle k_i \mid i \in I \rangle$ sequenza di cardinali, allora:
$\sum_{i\in I} k_i := |\bigcup_{i\in I} A_i|$ con $|A_i| = k_i$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$
$\prod_{i\in I} k_i = |\prod_{i\in I} A_i|$ con $|A_i| = k_i$

Osservazione:
Se $k_i \leq v_i \to \sum_{i\in I} k_i \leq \sum_{i\in I} v_i$; $\prod_{i\in I} k_i \leq \prod_{i\in I} v_i$
$\sum_{i\in I} k = k \cdot |I|$
$(\prod_{i\in I} k_i)^\nu = \prod_{i\in I} k_i^\nu$
$\prod_{i\in I} k^{v_i} = k^{\sum_{i\in I} v_i}$

Proprietà pratica (D25)
$\sum_{i\in I} k_i = \max\{|I|, \sup_{i\in I} k_i\}$

Esempio:
$\sum_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$

Proposizione (D26):
Sia I un insieme infinito, allora $\exists \{A_i \mid i \in I\}$ famiglia di insiemi due a due disgiunti | $|A_i| = |I|$ e $\bigcup_{i\in I} A_i = I$

Teorema (D27):
Se $\langle k_i \mid i \in \nu \rangle$ è una sequenza debolmente crescente di cardinali allora $\prod_{i\in\nu} k_i = (\sup_{i\in\nu} |k_i|)^\nu$

Teorema di Konig (D28):
$k_i < \mu_i$ cardinali infiniti per $i \in I$ allora $\sum_{i\in I} k_i < \prod_{i\in I} \mu_i$

Esempio:

$$\forall n\ \aleph_n < \aleph_\omega \rightarrow \sum_{n\in\omega} \aleph_n < \prod_{n\in\omega} \aleph_n \rightarrow \aleph_\omega < \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

Definizione (Cofinalità):

Dato $(A,<)$ insieme totalmente ordinato $\mathrm{Cof}(A) = \min\{|X| \mid X \subseteq A \text{ illimitato}\}$

Osservazione:

Se A ha massimo allora $\mathrm{Cof}(A) = 1$, altrimenti $\mathrm{Cof}(A)$ è un cardinale infinito.

$\mathrm{Cof}(\alpha + \beta) = \mathrm{Cof}(\beta)$

Esempio:

$\mathrm{Cof}(\mathbb{N}) = \aleph_0$

$\mathrm{Cof}(\mathbb{R}) = \aleph_0$

$\mathrm{Cof}(\omega + 17) = \mathrm{Cof}(17) = 1$

$\mathrm{Cof}(\omega_1) = \aleph_1$

$\mathrm{Cof}(\omega_1 + \omega^2) = \mathrm{Cof}(\omega^2) = \aleph_0$

Proprietà (D29):

Sia $(A,<)$ un insieme totalmente ordinato, allora sono uguali:

1. $\mathrm{Cof}(A)$
2. $\min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists f\colon \alpha \rightarrow A \text{ illimitata}\}$
3. $\min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists g\colon \alpha \rightarrow A \text{ illimitata e crescente}\}$

Definizione (Cardinale regolare/singolare):

Un cardinale k si dice regolare se $\mathrm{Cof}(k) = k$, se $\mathrm{Cof}(k) < k$ si dice singolare.

Esempio:

$\aleph_1 = \omega_1$ è regolare mentre $\aleph_\omega$ è singolare.

Proprietà (D30):

Ogni cardinale successore $\aleph_{\alpha+1}$ è regolare.

Proposizione:

Se λ limite $\mathrm{Cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{Cof}(\lambda)$

Teorema pratico (D31):
$\mathrm{Cof}(k) = \nu \leftrightarrow \nu$ è il minimo cardinale | $k = \sum_{i \in \nu} k_i$ dove $k_i < k$

Lemma (D32):
Se ν, k sono cardinali e $k \leq \nu \rightarrow k^\nu = 2^\nu$

Teorema di Hausdorff (D33):

$$(k^+)^\nu = \max\{k^\nu, k^+\} = k^\nu \cdot k^+$$

Notazione:
k^+ è il cardinale successore di k

Esempio:
$(\aleph_7)^{\aleph_1} = \aleph_6^{\aleph_1} \cdot \aleph_7 = \aleph_5^{\aleph_1} \cdot \aleph_6 \cdot \aleph_7 = \aleph_5^{\aleph_1} \cdot \aleph_7 = \cdots = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_7$

Funzione classe Beth:

$$\begin{cases} \beth_0 = \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \beth_\delta \end{cases}$$

Questa funzione è crescente e continua dunque ha punti fissi.

Gerarchia di Von Neumann:

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\alpha+1} = P(V_\alpha) \\ V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \end{cases}$$

Definiamo come $VN = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{ord}} V_\alpha$ l'universo di Von Neumann (Classe propria)

Proprietà (D34):

1. $x \in y \in V_\alpha \to \exists\beta < \alpha \mid x \in V_\beta$
2. $\beta \leq \alpha \to V_\beta \subseteq V_\alpha$
3. $\forall\alpha\ V_\alpha$ è transitivo

Proposizione:

$\alpha \subseteq V_\alpha \leftrightarrow \alpha \in V_{\alpha+1}$

Assioma di fondazione:

$\forall X \neq \emptyset\ \exists y \in X \mid y \cap X = \emptyset$

Equivalente:

In ogni insieme non vuoto esistono elementi minimali.

Teorema (D35):

Assioma di Fondazione $\leftrightarrow V = VN$

Teorema (D36):

Assioma di Fondazione $\leftrightarrow$ Non esistono catene discendenti