Attenzione:

Questi appunti sono la trascrizione delle lezioni del corso di ETI tenuto nel 2014 dal Prof. Di Nasso, questo file contiene le dimostrazioni svolte ma avendo perso il quaderno subito prima di poter trascrivere molte di quelle originali fatte a lezione possono essere presenti alcuni errori.

Nel caso ne individuate qualcuno vi pregherei di segnalarmelo all'indirizzo giulio.pisa@virgilio.it cosi` da poterlo correggere.

Dimostrazioni:

Teorema di Cantor (D1):

Sia A un insieme qualunque allora non esistono funzioni surgettive $f: A \to P(A)$

Dimostrazione:

Data una $\varphi: A \to P(A)$ allora $X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ non appartiene all'immagine. Se per assurdo $\exists a \mid f(a) = X$ allora: $\begin{cases} \text{Se } a \in X \to a \notin X \\ \text{Se } a \notin X \to a \in X \end{cases}$ Assurdo

Teorema di Cantor-Bernstein (D2):

Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ allora $|A| = |B|$

Dimostrazione:

Siano $f: A \to B$ e $g: B \to A$ iniettive; f determina una bigezione tra A e $f(A)$ e g una bigezione tra B e $g(B)$ da cui otteniamo una bigezione fra A e $g\big(f(A)\big)$ quindi $g\big(f(A)\big) \subseteq g(B) \subseteq A$ e $\big|g\big(f(A)\big)\big| = |A|$

Quindi il teorema segue dal lemma.

Lemma:

Siano $C \subseteq B \subseteq A \mid |A| = |C| \to |A| = |B| = |C|$

Dimostrazione:

Sia $\varphi: A \to C$ bigezione. Sia $D = A \backslash B$. Definiamo una successione di sottoinsiemi di C nel seguente modo:

$$\begin{cases} E_0 = \varphi[D] \\ E_{n+1} = \varphi[E_n] \end{cases}$$

L'esistenza di questa successione è garantita dl teorema di ricorsione numerabile. Sia $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$

Definiamo $\gamma: A \to B \mid \begin{cases} \varphi(a) \text{ se } a \in D \cup E \\ a \text{ se } a \in B \backslash E \end{cases}$

Questa funzione è bigettiva.

Surgettiva:

Se $b \in B \backslash E \to b = \gamma(b)$; se $b \in E_0 \to b = \varphi(a) = \gamma(a)\ a \in D$; se $b \in E_{n+1} \to b = \varphi(a) = \gamma(a)\ a \in E_n$

Iniettiva:

$\gamma_{|D \cup E}; \gamma_{|B \backslash E}$ sono iniettive. L'unico caso problematico è $a \in D \cup E$; $a' = B \backslash E$, ma $\gamma(a) \neq \gamma(a')$ infatti:

$\gamma(a) \in E;\ \gamma(a') \notin E$

Teorema (AC,D3):

Se A è infinito $|\mathbb{N}| \leq |A|$

Dimostrazione:

Per l'Assioma della scelta $\exists\ f$ di scelta | $f(B) \in B\ \forall\ B \subseteq A$ non vuoto.
Definiamo la successione $a_1 = f(A)\ ;\ a_{n+1} = f\big(A \backslash (a_1, \dots, a_n)\big)$ ed essendo A infinito tutti gli insiemi a cui applico f sono non vuoti e gli a_n sono tutti elementi distinti, quindi $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ è la funzione iniettiva da $\mathbb{N} \to A$.

Teorema (Processo diagonale di Cantor,D4):

Non $\exists f: \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ surgettive.

Dimostrazione:

Data $f: \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ surgettiva prendiamo $\forall\ n$ la successione $f(n) = \langle a_{n,k} \mid k \in \mathbb{N} \rangle$; $a_{n,k} \in \{0,1\}$ Prendiamo la successione $\langle b_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ | $b_k = 0$ se $a_{k,k} = 1$; $b_k = 1$ se $a_{k,k} = 0$. Questa successione non può appartenere all'immagine di f.

Proposizione (AC,D5):

Se $|B| = c$; $A \subseteq B$ | $|A| < c \to |B \backslash A| = c$

Dimostrazione:

Supponiamo $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dunque A può essere visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, consideriamone il dominio $A' = \mathrm{dom}\ A$. Ovviamente siccome $|A| < c \to |A'| < c$ (Usando AC) $\to \exists\ a \in \mathbb{R} \backslash A'$. Da questo segue $\{a\} \times \mathbb{R} \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \backslash A \to |(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \backslash A| \geq c$.
Nel caso in cui $B \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ basta assegnarlo mediante una bigezione a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proposizione (D6):

$\exists!\ w$ | $x \in w \leftrightarrow x$ è un numero naturale; w è induttivo.

Dimostrazione:

Si prenda un X induttivo che esiste per l'assioma dell'infinito, per l'assioma di separazione $\exists\ w = \{x \in X \mid x \text{ è un numero naturale}\}$. Per definizione siccome i naturali appartengono tutti ad ogni insieme induttivo (In particolare X) saranno tutti contenuti in w.
Per l'assioma di estensionalità questo insieme è unico. Induttivo per definizione.

Teorema (Principio di Induzione, D7):

$\forall A_1, \dots, A_k$ se $P(0, A_1, \dots, A_k)$ e $\forall n \in w$ vale $P(n, A_1, \dots, A_k) \to P(\hat{n}, A_1, \dots, A_k)$ allora $\forall n \in w \; P(n, A_1, \dots, A_k)$

Dimostrazione:

$\forall A_1, .., A_k$ l'insieme $A = \{n \in w \mid P(n, A_1, \dots, A_k\}$ esiste per separazione. Siccome $A \subseteq w$ è definito come insieme induttivo e w è il più piccolo induttivo allora $A = w$.

Teorema (D8):

Sia $(N, <)$ un insieme ordinato con minimo 0, allora sono equivalenti:

1. $\forall A \subseteq N$ non vuoto ha minimo (**Principio del buon ordinamento**)
2. $\forall P$ se vale $P(0) \wedge \big(\forall x < y \; P(x)\big) \to P(y)$ allora $\forall x \in N$ vale $P(x)$ (**Principio di Induzione**)

Dimostrazione:

$1 \to 2$

Supponiamo per assurdo che esista una proprietà $P(x)$ | valga $P(0) \wedge$ $\big(\forall x < y \; P(x)\big) \to P(y)$ ma non valga $\forall x \in N$. Dunque $X = \{x \in N \mid \neg P(x)\} \subseteq N \to$ ammette minimo ξ per il principio del buon ordinamento.

Ma $\xi \neq 0$ in quanto vale $P(0)$, inoltre per tutti i valori x minori di ξ vale $P(x) \to P(\xi)$ Assurdo.

$2 \to 1$

Sia per assurdo $X \subseteq N$ diverso da $\emptyset$ e senza minimo. Consideriamo $P(x) : x \notin X$

Vale $P(0)$ altrimenti $0 \in X \to X$ ammette minimo.

Se vale $P(x) \; \forall x < y \to P(y)$ altrimenti y sarebbe il minimo di $X \to P(x)$ vale $\forall x \in N \to X = \emptyset$ Assurdo.

Teorema di ricorsione numerabile (D9):

A insieme; $a \in A$; $g: w \times A \to A$ allora $\exists!$ Successione $f: \omega \to A$ | $\begin{cases} f(0) = a \\ f(n+1) = g\big(n, f(n)\big) \end{cases}$

Dimostrazione:

Detto $F = \{\varphi \in P(\mathbb{N} \times A) \mid \varphi \text{ è un AF}\}$ vogliamo mostrare che le funzioni sono a due a due compatibili:

Per induzione su $P(n)$: $\forall k, h \in F \; \big(n \in \mathrm{dom}(k) \cap \mathrm{dom}(h) \to k(n) = h(n)\big)$

$n = 0$ è banale in quanto ogni AF in 0 vale a.

Per ipotesi induttiva $k(n) = h(n)$ ma allora:

$k(n+1) = g\big(n, k(n)\big) = g\big(n, h(n)\big) = h(n+1)$

$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \varphi \in F \mid \mathrm{dom}(\varphi) = n + 1 = \{0,1, \dots, n\}$

Per induzione, $n = 0$ consideriamo $k = \{(0, a)\}$ che è un'AF e ha dominio $\{0\}$

Se k AF con dominio $n + 1$ allora anche $k' = k \cup \{(n+1, b)\}$ con $b = g\big(n, k(n)\big)$ + un'AF di dominio $n + 2$

Dunque $f = \bigcup_{\varphi \epsilon F} \varphi$ è una funzione di dominio $\mathbb{N}$.

Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = \varphi(n)$ e $\begin{cases} f(0) = a \\ f(n+1) = g(n, f(n)) \end{cases}$ in quanto sono tutte AF

Unicità:

f, f' rispettano la proprietà, dimstriamo che coincidono per induzione su n

Se $n = 0 \to f(0) = a = f'(0)$

Se $f(n) = f'(n) \to f(n+1) = g(n, f(n)) = g(n, f'(n)) = f'(n+1)$

Notazione AF:

φ è un'AF (Approssimazione finita) se $\varphi: k \to A$ è una funzione con dominio un numero naturale | $\varphi(0) = a$; $\varphi(n+1) = g(n, \varphi(n))$ $\forall$ naturale $n + 1 < k$

Ovviamente un'AF è un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times A$

Per separazione $\exists\ F = \{\varphi \in P(\mathbb{N} \times A) \mid \varphi \text{ è un AF}\}$

Proposizione:

Sia F un insieme di funzioni, allora l'unione $\Phi = \bigcup_{\varphi \in F} \varphi$ è una funzione $\leftrightarrow$ le funzioni di F sono due a due compatibili ($\forall g, h \in F\ \forall x \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(h)\ g(x) = h(x)$)

In questo caso $\mathrm{dom}(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in F} \mathrm{dom}(\varphi)$

Esempio (Fattoriale):

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = g(n, f(n)) = (n+1) \cdot f(n) \end{cases}$$

Principio dei cassetti (D10):

Se $n > m$ e $f: n \to m$ allora f è non iniettiva.

Dimostrazione:

Dimostriamolo per induzione.

Per $n = 0$ è vera a vuoto. Se vale per n consideriamo la funzione $f: n + 1 \to m\ | m < n + 1$

Ma possiamo restringerci a $f': n \to m \backslash f(n)$ che per ipotesi induttiva non può essere iniettiva in quanto $m \backslash f(n)$ è assegnabile mediante una bigezione ad un $k < m$.

Teorema 1 (Esistenza, D11):

$(w, \emptyset, S: x \to \hat{x}, +, \cdot)$ è un modello di $\mathrm{PA_{II}}$

Dimostrazione:

PA1 ; PA2 derivano dal fatto che abbiamo già dimostrato che la funzione successore è una bigezione.

PA3

(s1) sappiamo $|\emptyset| = 0$ e che se $|A| = n \to |A \cup \emptyset| = |A| = N$

(s2) Sappiamo che se $|A| = n$ e $|B| = m$ preso $* \notin A \cup B$ allora $n + S(m) = n + (m+1) = |A \cup (B \cup \{*\})| = |(A \cup B) \cup \{*\}| = (n+m) + 1 = S(n+m)$

PA4

(p1) sappiamo che $\forall A$ il prodotto cartesiano $A \times \emptyset = \emptyset$

(p2) Sappiamo che se $|A| = n$ e $|B| = m$ preso $* \notin B$ allora $A \times B$ e $A \times \{*\}$ sono disgiunti e inoltre $|A \times \{*\}| = |A| = n$.
Dunque $n \cdot S(m) = n \cdot (m+1) = |A \times (B \cup \{*\})| = |(A \times B) \cup (A \times \{*\})| = (n \cdot m) + n$

PA5II è la proprietà di induzione su w già dimostrata.

Teorema di Unicità (D12):
Tutti i modelli di $\mathrm{PA_{II}}$ sono isomorfi.

Dimostrazione:
In pratica bisogna dimostrare che dato un $(N, 0', S', \oplus, \otimes)$ esiste $f: \omega \to N$ biunivoca:
$f(0) = 0'$
$\forall n \in \omega\ f(S(n)) = S'(f(n))$
$\forall\ n, m \in \omega\ f(n+m) = f(n) \oplus f(m)$
$\forall\ n, m \in \omega\ f(n \cdot m) = f(n) \otimes f(m)$

Per il teorema di ricorsione numerabile $\exists!\, f \mid \begin{cases} f(0) = 0' \\ f(n+1) = S'(f(n)) \end{cases}$ che rispetta le prime due proprietà per definizione.

f iniettiva:
Per induzione su $P(n)$: $\forall m\ \ f(m) = f(n) \to m = n$
Caso base:
$m \neq 0 \to m = m' + 1 \to f(m) = f(m'+1) = S'(f(m')) \neq 0 = f(0)$ visto che solo lo 0 non è un successore.
$P(n+1)$:
Sia $f(n+1) = S'(f(n))$ che dipende esclusivamente dal passo precedente e dunque dall'ipotesi induttiva.

f surgettiva:
Per induzione sull'insieme $(N, 0', S', \oplus, \otimes)$, mostriamo che $\mathrm{Imm}(f) = N$.
$0' = f(0) \in \mathrm{Imm}(f)$; se $x \in \mathrm{Imm}(f) \to x = f(n) \to S'(x) = S'(f(n) = f(n+1)$

$\forall\ n, m \in \omega\ f(n+m) = f(n) \oplus f(m)$
Dimostrazione per induzione su $P(m)$: $\forall n\ f(n+m) = f(n) \oplus f(m)$
$P(0)$ segue dal fatto che in PA vale $f(n+0) = f(n) = f(n) \oplus 0' = f(n) \oplus f(0)$
$P(m+1)$ segue da $f(n + (m+1)) = f(S(n+m)) = S'(f(n+m)) =$
$= S'(f(n) \oplus f(m)) = f(n) \oplus S'(f(m)) = f(n) \oplus f(m+1)$

$\forall\ n, m \in \omega\ f(n \cdot m) = f(n) \otimes f(m)$ ha una dimostrazione analoga.

Proposizione (AC,D13):

$(A,<)$ è ben ordinato $\leftrightarrow \nexists$ catene discendenti.

Dimostrazione:

$\rightarrow$

Se esistesse una catena discendente $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ basta prendere l'insieme $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq A$ ma privo di minimo.

$\leftarrow$

Supponiamo che A non sia ben ordinato e che $\exists X \subseteq A$ privo di minimo, usando l'assioma di scelta costruiamo la catena discendente (Definita per ricorsione):

$\begin{cases} a_0 = f(X) \\ a_{n+1} = f(\{x \in X \mid x < a_n\}) \end{cases}$ con f funzione di scelta. Assurdo.

Proposizione (D14):

Se $(A,<)$ è ordinato è ben ordinato $\leftrightarrow$ ogni segmento iniziale è generato da un qualche elemento.

Dimostrazione:

$\rightarrow$

Prendiamo $S \neq A$ segmenti iniziale. $A \backslash S$ ammette minimo s in quanto è un buon ordine. $\forall a < s$ vale $a \in S$ altrimenti nel caso in cui $a \in A \backslash S \rightarrow a < \min(A \backslash S)$ Assurdo. Inoltre per ogni $b > s \rightarrow s \in S$ per le proprietà dei segmenti iniziali. Assurdo. Quindi $A_s = S$

$\leftarrow$

Dato un generico $X \subseteq A$ consideriamo $S = \{a \in A \mid a < x \ \forall x \in X\}$ che è banalmente un segmento iniziale, $S \neq A$ e $S = A_b$ per qualche $b \in A$. (S può essere vuoto).

Quindi $b = \min X$

Attenzione:

Se non ammettiamo che $\emptyset$ possa essere un segmento iniziale allora $\mathbb{Z}$ per questo teorema dovrebbe essere ben ordinato.

Teorema della Tricotomia dei buoni ordini (D15):

Se $(A,<)$; $(B,<)$ sono buoni ordini, allora vale una ed una sola fra:

$A \cong B \ \big(ot(A) = ot(B)\big)$

$A \cong B_b$ per opportuno $b \in B \ \big(ot(A) = ot(B)\big)$

$B \cong A_a$ per opportuno $a \in A \ \big(ot(A) = ot(B)\big)$

Dimostrazione:

Per prima cosa osserviamo che non possono verificarsi due di queste possibilità in contemporanea:

1 e 2 $\rightarrow B \cong A \cong B_b$ ma nessun buon ordine è isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio.

1 e 3 $\rightarrow A \cong B \cong A_a$ ma nessun buon ordine è isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio.

2 e 3 $\rightarrow$ sia $\varphi: B \rightarrow A_a$ isomorfismo, allora $\varphi_{|B_b}: B_b \rightarrow A_{\varphi(b)}$ isomorfismo ma allora $A \cong A_{\varphi(b)}$ assurdo.

Sia $T = \{(a,b) \in A \times B \mid A_a \cong B_b\} \neq \emptyset$ in quanto $(0_A, 0_B) \in T$, ma allora siccome 1_A è il successore di 0_A e 1_B è il successore di 0_B anche $(1_A, 1_B) \in T$
T è una funzione in quanto $(a,b),(a.b') \in T \to B_b \cong A_a \cong B_{b'} \to B_b \cong B_{b'} \to b = b'$
Indichiamo con $T(a) \coloneqq b \mid (a,b) \in T$
Sia $T(a) = b$ e $\varphi: A_a \to B_{T(a)}$ un isomorfismo. Se $a' < a \to \varphi_{|A_{a'}}: A_{a'} \to B_{T(a')}$ è ancora un isomorfismo e dunque $a' \in \mathrm{Dom}(T)$ e $T(a') = \varphi(a') < b$.
Dunque $\mathrm{Dom}(T)$ è un segmento iniziale e T preserva l'ordine.
Se $b' < b \to \varphi_{|A_{a'}}: A_{a'} \to B_{b'}$ è un isomorfismo con $a' \mid \varphi(a') = b'$.
Dunque $T(a') = b' \to \mathrm{Imm}(T)$ è un segmento di B.
Allora $T: A' \to B'$ è un isomorfismo fra un segmento iniziale $A' = \mathrm{Dom}(T)$ di A ed uno $B' = \mathrm{Imm}(T)$ di B.
L'unico caso problematico è quello in cui $A' = A_a\,; B' = B_b \to T: A_a \to B_b$ isomorfismo $\to$ $(a,b) \in T \to a \in A'\,; b \in B'$ Assurdo.

Teorema (D16):
Se $\alpha \cong \beta$ ordinali isomorfi allora $\alpha = \beta$

Dimostrazione:
Prendiamo un isomorfismo $\varphi: \alpha \to \beta$ e mostriamo che è la funzione identità.
Per assurdo sia $\mu = \min\{x \mid \varphi(x) \neq x\}$ prendiamo $\varphi_{|\alpha_\mu}: \alpha_\mu \to \beta_{\varphi(\mu)}$ ma $\varphi_{|\alpha_\mu}$ è l'identità e vale $\alpha_\mu = \mu \wedge \beta_{\varphi(\mu)} = \varphi(\mu) \to \mu = \varphi(\mu)$ assurdo.

Teorema: (D17)
$\forall\ (A,<)$ buon ordinamento $\exists!$ un ordinale $\alpha \mid (A,<) \cong (\alpha, \in)$

Dimostrazione:
$X = \{a \in A \mid \exists \alpha_a \text{ ordinale } A_a \cong \alpha_a\}$ Insieme per l'assioma di separazione
$Y = \{\alpha_a \text{ ordinale} \mid \exists a \in A\ A_a \cong \alpha_a\}$ Per essere sicuri che questo sia un insieme abbiamo bisogno di un assioma ulteriore (Assioma di rimpiazzamento).

Sia $f: X \to Y$ dove $f(a)$ è l'unico ordinale $\alpha_a \mid A_a \cong \alpha_a$

Lemma:

1. $b < a \in X \to b \in X \wedge f(b) \in f(a)$
2. $\beta \in f(a) \to \exists a' \in X \mid f(a') = \beta$ come dire

Dimostrazione:
1. Per definizione di f esiste un isomorfismo $\varphi: A_a \to f(a)$.
Notiamo che $\forall b < a$ vale $A_b = (A_a)_b$
Inoltre visto che $f(a)$ è un ordinale $\big(f(a)\big)_{\varphi(b)} = \varphi(b)$
Ma allora $\varphi_{|A_b}: A_b \to \varphi(b)$ è un isomorfismo e dunque $b \in X$ e $f(b) = \varphi(b) \in f(a)$

2. $\beta \in f(a)$, sia $b \in A_a \mid \varphi(b) = \beta$. Restringendo $\varphi_{|A_b}$ si ottiene un isomorfismo $A_b \cong \varphi(b) = \beta$

Se vale il Lemma allora X è un segmento iniziale di A, $Y = \mathrm{Imm}(f)$ è un ordinale perché è un insieme transitivo di ordinali ed $f: X \to Y$ preserva l'ordine.
Infine notiamo che $X = A$ altrimenti $\exists a \in A \;\; X = A_a$ ma allora:
$f: A_a \to Y$ isomorfismo $\to a \in X = A_a$ Assurdo.
Quindi $f: A \to Y$ è l'isomorfismo cercato.

Induzione transfinita (Sugli ordinali) (D18):
Sia $P(x)$ una proprietà ed assumiamo che valga $\forall a$ ordinale: $\forall\, b < a \;\; P(b) \to P(a)$
Allora $P(a)$ per tutti gli ordinali.

Dimostrazione:
Osserviamo che se le ipotesi dell'induzione per casi sono soddisfatte lo sono anche quelle dell'induzione forte, dunque: Induzione forte → Induzione per casi
Dimostriamo l'induzione forte:
supponiamo per assurdo che $\exists \delta \mid \neg P(\delta)$, allora $A = \{\alpha \leq \delta \mid \neg P(\alpha)\} \neq \emptyset$ e dunque $\exists \beta = \min A$ con $\beta \neq 0$ in quanto $P(0)$ vale. Per minimalità vale $P(\alpha)\ \forall \alpha < \beta \to P(\beta)$ Assurdo.

Teorema di divisone euclidea (D19):
Dati $\alpha \geq \beta > 0 \to \exists!\, \gamma\, ;\ \exists!\, \rho < \beta \mid \alpha = \beta \cdot \gamma + \rho$

Dimostrazione:
Siccome $\beta \cdot (\alpha + 1) \geq \alpha + 1 > \alpha$ quindi $A = \{x \mid \beta \cdot x > \alpha\} \neq \emptyset$.
Sia $\xi = \min A\ ;\ \alpha < \beta \cdot \xi$
Osserviamo che ξ non può essere limite altrimenti $\alpha < \beta \cdot \xi = \bigcup_{\delta < \xi} \beta \cdot \delta \to \exists \delta' < \xi \mid \alpha < \beta \cdot \delta'$ che contraddice la minimalità di ξ
Quindi $\xi = \gamma + 1$ e vale $\beta \cdot \gamma \leq \alpha \leq \beta \cdot (\gamma + 1) = \beta \cdot \xi$
Sia $\rho = \alpha - \beta \cdot \gamma$
Vale $\rho < \beta$ altrimenti $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho \geq \beta \cdot \gamma + \beta = \beta \cdot (\gamma + 1) > \alpha$ Assurdo.
E $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho$

Unicità:
Sia $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho = \beta \cdot \gamma' + \rho'$
Se fosse $\gamma < \gamma' \to \gamma + 1 \leq \gamma' \to \alpha = \beta \cdot \gamma + \rho <\leq \beta \cdot \gamma + \beta = \beta \cdot (\gamma + 1) \leq \beta \cdot \gamma' < \alpha$ Assurdo.
Allora anche $\rho = \rho'$ per unicità della differenza.

Forma normale di Cantor (Base ω) (D20):
$\forall \alpha > 0$ ordinale $\exists!\ \gamma_1 > \cdots > \gamma_k\ \exists!\, n_i \in \omega$ con $\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$

Esistenza (Induzione transfinita):
Supponiamo che la proprietà valga $\forall\ \beta < \alpha$. Sappiamo già che:
$\exists \gamma_1 \mid \omega^{\gamma_1} \leq \alpha < \omega^{\gamma_1+1}$
Applichiamo la divisone euclidea fra α e ω^{γ_1}:
$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \rho$ con $n_1 < \omega\ ; n_1 \neq 0$
Applichiamo l'ipotesi induttiva su $\rho = \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_k} \cdot m_k$ con $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_k$
Allora $\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_k} \cdot m_k$ e $\gamma_1 > \beta_1$ altrimenti $\rho > \omega^{\gamma_1}$, Assurdo.
Unicità (Induzione transfinita):
Supponiamo che la proprietà valga $\forall\ \beta < \alpha$
Sia $\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k = \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_k} \cdot m_k$
$\gamma_1 = \beta_1$ altrimenti se fosse $\gamma_1 < \beta_1$ avremmo $\gamma_1 + 1 \leq \beta_1$ dunque:
$\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k < \omega^{\gamma_1+1} \leq \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_k} \cdot m_k$, Assurdo.
Dividiamo quindi α per $\omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1}$ e otteniamo $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \rho$ e per unicità del resto e del quoziente vale $n_1 = m_1$ e $\omega^{\gamma_2} \cdot m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k = \omega^{\beta_2} \cdot m_2 + \cdots + \omega^{\beta_k} \cdot m_k$ che per ipotesi induttiva mi implica l'uguaglianza.

Teorema (AC,D21):
Ogni insieme è equipotente ad un unico cardinale.

Dimostrazione:
Utilizzando una formulazione equivalente all'Assioma della Scelta possiamo affermare che ogni insieme X è bene ordinabile. Consideriamo l'insieme non vuoto dei cardinali equipotenti ad X. Questo insieme ammette minimo che indichiamo con $|X|$.

Osservazione (D22):
$H(A)$ è un insieme.
$H(A)$ è un ordinale.
$H(A)$ è un cardinale.
$\nexists f: H(A) \to A$ iniettiva.
Se A è un ordinale allora $H(A)$ è il più piccolo ordinale di cardinalità maggiore

Dimostrazione:
$H(A)$ è un insieme.
$B \coloneqq \{(X, <_X) \text{ buon ordine} \mid X \subseteq A\}$ è un insieme per l'Assioma di Separazione in quanto $B \subseteq P(A) \times P(A \times A)$
Sia F la funzione classe che associa ad ogni buon ordine il cardinale ad esso isomorfo.
Per l'Assioma di Rimpiazzamento $F[B]$ è un insieme.
Dimostriamo che $F[B] = H(A)$
$F[B] \subseteq H(A)$:
$(X, <_X) \in B \to F\big((X, <_X)\big) = \alpha \to \exists \theta: (X, <_X) \to \alpha$ isomorfismo. Dunque θ è una bigezione, per cui $|\alpha| = |X| \leq |A|$ e allora $\alpha \in H(A)$
$H(A) \subseteq F[B]$:
Data $\alpha \in H(A)$ sappiamo che $\exists f: \alpha \to A$ iniettiva. Sia $X = \mathrm{Imm}(f) \subseteq A$.
Poiché α è bene ordinato anche X è bene ordinabile con ordinamento indotto da f.
Detto $<_X$ questo ordinamento allora $(X, <_X) \in B \to \alpha \in F[B]$.

$H(A)$ è un ordinale:
$H(A)$ è un insieme di ordinali per definizione, dunque mi basta mostrare che come insieme è transitivo. $\beta \in \alpha \in H(A) \to \beta \in H(A)$ infatti per ipotesi $\exists f: \alpha \to A$ iniettiva.
Dunque siccome $\beta \in \alpha \to \beta \subseteq \alpha$ allora $f_{|\beta}: \beta \to A$ è iniettiva, quindi $|\beta| \leq |A| \to \beta \in H(A)$
$H(A)$ è un cardinale:
Se non fosse un cardinale allora $\exists \alpha \in H(A) \mid |\alpha| = |H(A)| \to \exists f: H(A) \to A$ iniettiva ed $\exists g: \alpha \to H(A)$ biunivoca. Dunque $f \circ g^{-1}: H(A) \to A$ iniettiva, ma allora $H(A) \in H(A)$
Assurdo in quanto $H(A)$ è un ordinale.
$\nexists f: H(A) \to A$ iniettiva:
Se per assurdo esistesse $f: H(A) \to A$ iniettiva $\to H(A) \in H(A)$ Assurdo in quanto ordinale.
Se A è un ordinale allora $H(A)$ è il più piccolo ordinale di cardinalità maggiore:
Osserviamo che $|H(A)| > |A|$perché vale la tricotomia fra ordinali e dunque non sono possibili i casi $|H(A)| = |A|$ e $|H(A)| < |A|$
È il minimo in quanto se esistesse β ordinale tale che $|\beta| > |A|$ allora $\beta \in H(A)$ (Per tricotomia) assurdo per definizione di $H(A)$

Teorema (D23):
Ogni cardinale è un $\aleph_\alpha$

Dimostrazione:
Lemma 1:
Se $F = \{k_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di cardinali allora $k = \cup F$ è un cardinale.

Dimostrazione:
k è un ordinale in quanto unione di ordinali. Se $y < k \rightarrow \exists k_i \mid y \in k_i \rightarrow$ essendo k_i cardinale che $|y| < |k_i| \leq |k|$

Lemma 2:
Tutti gli Aleph sono cardinali.

Dimostrazione:
Per induzione transfinita su α:
$\aleph_0 = \omega$ è un cardinale.
$\alpha = \beta + 1$ allora $\aleph_\alpha = H(\aleph_\beta)$ che è un cardinale in quanto $\forall A \;\; H(A)$ è un cardinale.
$\aleph_\lambda = \cup \aleph_\delta$ è un cardinale per il Lemma 1.

Lemma 3:
$\forall \alpha \in Ord \;\; \alpha \leq \aleph_\alpha$

Dimostrazione:
Per induzione transfinita su α:
$0 \leq \aleph_0 = \omega$
$\alpha = \beta + 1$ allora $\beta + 1 \leq \aleph_\beta + 1 \leq H(\aleph_\beta) = \aleph_{\beta+1}$
λ limite, allora $\forall \delta < \lambda$ vale $\delta \leq \aleph_\delta$ dunque:
$\lambda = \sup_{\delta<\lambda} \delta \leq \sup_{\delta<\lambda} \aleph_\delta = \aleph_\lambda$

Allora sia k un generico cardinale, $\beta \coloneqq \min\{\alpha \mid k < \aleph_\alpha\} \neq \emptyset$ per il Lemma 3.
$\beta \neq 0$ in quanto infinito e β non è un limite in quanto altrimenti $k < \aleph_\beta = \sup_{\delta<\beta} \aleph_\delta \rightarrow k < \aleph_z$ per un opportuno $z < \beta$ contro la minimalità di β.
Allora $\beta = \delta + 1$ e $\aleph_\delta \leq k < \aleph_{\delta+1} = H(\aleph_\delta) \rightarrow |k| \leq |\aleph_\delta|$ ma essendo entrambi cardinali questo è equivalente a dire $k \leq \aleph_\delta \rightarrow k = \aleph_\delta$

Proposizione(D24):
$F\colon \mathrm{ord} \to \mathrm{ord}$ funzione classe |

1. $\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta)$
2. F è continua, cioè se $\exists\lambda$ limite vale $F\left(\bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma\right) = \bigcup_{\gamma<\lambda} F(\gamma)$

Allora F ammette punti fissi arbitrariamente grandi.

Dimostrazione:
Per ricorsione $\begin{cases} \alpha_0 = \beta \\ \alpha_{n+1} = F(\alpha_n) \end{cases}$
Se α è limite $\bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta) = F(\alpha)$

Osservazione:
$F(\alpha) = F(\bigcup_{n\in\omega} \alpha_n) =^{continuità} \bigcup_{n\in\omega} F(\alpha_n) = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_{n+1} = \omega$

Osservazione:
$\beta \leq F(\beta)\ \forall\beta$

Dimostrazione:
Induzione transfinita su β
$0 \leq F(0)$ ovvio
$\beta \leq F(\beta) \to \beta \leq F(\beta) < F(\beta+1) \to \beta+1 \leq F(\beta+1)$
$\forall\beta < \lambda\ \beta \leq F(\beta) \to \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \beta \leq \bigcup_{\beta<\lambda} F(\beta) = F(\lambda)$

$\alpha_0 = \beta$; $\alpha_1 = F(\alpha_0) \geq \alpha_0 = \beta \to$ Se $F(\alpha_0) = \alpha_0$ lo abbiamo trovato, altrimenti se $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ lui è il punto fisso.
Altrimenti $\alpha_0 < \alpha_2 < \cdots$ e $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$ è un limite e vale l'osservazione.

Proprietà pratica (D25)
$\sum_{i\in I} k_i = \max\{|I|, \sup_{\mathrm{i\in I}} k_i\}$

Dimostrazione:
Sia $k = \sup_{\mathrm{i\in I}} k_i$; $\sum_{i\in I} k_i \leq \sum_{i\in I} k = k \cdot |\mathrm{I}| = \max\{k, |\mathrm{I}|\}$
$\sum_{i\in I} k_i \geq \sum_{i\in I} 1 = \mathrm{I}$ inoltre $\forall i_0 \in \mathrm{I}$ vale $\sum_{i\in I} k_i \geq k_{i_0} \to \sum_{i\in I} k_i \geq \sup_{\mathrm{i\in I}} k_i = k$

Proposizione (D26):
Sia I un insieme infinito, allora $\exists$ $\{A_i \mid i \in I\}$ famiglia di insiemi due a due disgiunti | $|A_i| = |I|$ e $\bigcup_{i\in I} A_i = I$

Dimostrazione:
Sappiamo che (AC) $|I \times I| = |I| \to \exists\ \varphi\colon \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ bigettiva.
Dunque $A_i = \{\varphi(i,j) \mid j \in I\}$
Ovviamente vale $\bigcup A_i = \mathrm{Imm}(\varphi) = I$ e $|A_i| = |I|$ perché iniettiva in quanto restrizione di una bigezione e $\delta(i,)\colon I \to A_i$ per $i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset \to \delta(i,k) \neq \varphi(j,h)$

Teorema (D27): Se $\langle k_i \mid i \in \nu \rangle$ è una sequenza debolmente crescente di cardinali allora:
$\prod_{i\in\nu} k_i = (\sup_{i\in\nu}|k_i|)^\nu$
$(k_i, \nu \text{ infiniti})$

Dimostrazione:
Sia $k = \sup_{i\in\nu}|k_i|$.
Ovviamente vale $\prod_{i\in\nu} k_i \le \prod_{i\in\nu} k = k^\nu$
Viceversa siano $A_i \subseteq \nu \mid |A_i| = \nu$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\cup A_j = \nu$.
Allora $\prod_{i\in\nu} k_i = \prod_{j\in\nu}\left(\prod_{i\in A_j} k_i\right)$ e $\forall j\ \prod_{i\in A_j} k_i \ge \sup_{i\in\nu}|k_i| = k$

Osserviamo che questo è dato dal fatto che A_j sia illimitato in ν. Se fosse limitato infatti $\exists \beta < \nu \mid A_j \subseteq \beta \to |A_j| \le |\beta| < \nu$, inoltre $\sup_{i\in\nu}|k_i| = k$ in quanto $\langle k_i \mid i \in \nu\rangle$ è debolmente crescente e A_j è illimitato, dunque $\forall i_0\ \exists i \in A_j \mid i > i_0$ e dunque $k_i \ge k_{i_0}$ ed è valido $\forall i_0$

Dunque $\prod_{i\in\nu} k_i = \prod_{j\in\nu}\left(\prod_{i\in A_j} k_i\right) \ge \prod_{j\in\nu} k = k^\nu$

Teorema di Konig (D28):
$k_i < \mu_i$ cardinali infiniti per $i \in I$ allora $\sum_{i\in I} k_i < \prod_{i\in I}\mu_i$

Dimostrazione:
$\forall i \in I$ fissiamo $A_i \subseteq B_i \mid |A_i| = k_i$; $|B_i| = \mu_i$ definiamo $A_i' \coloneqq A_i \times \{i\}$ che sono due a due disgiunti. Dunque: $\sum_{i\in I} k_i = |\bigcup_{i\in I} A_i'|$; $\prod_{i\in I}\mu_i = |\prod_{i\in I} B_i|$ mostriamo che $\exists f: \bigcup_{i\in I} A_i' \to \prod_{i\in I} B_i$ iniettiva ma non biunivoca.
Esiste una funzione iniettiva:
Fissiamo una I-upla $(b_i \mid i \in I) \in \prod_{i\in I} B_i$ dove $b_i \in B_i \backslash A_i$
Dato x di $\bigcup_{i\in I} A_i'$ $\exists!\, j \in I \mid x \in A_j' = A_j \times \{j\}$ e dunque x può essere scritto come (a, j), definiamo $f(x) = (c_i \mid i \in I)$ con $c_i = b_i$ e $c_i = a$ per $i \neq j$
La funzione così definita è iniettiva.
Non esistono funzioni surgettive fra i due:
Sia $g: \bigcup_{i\in I} A_i' \to \prod_{i\in I} B_i$ allora cerchiamo $(c_i \mid i \in I)$ che non appartenga all'immagine di g.
Definiamo g_j come la composizione di: $A_j \to^{i_j} \bigcup_{i\in I} A_i' \to^{g} \prod_{i\in I} B_i \to^{\pi_j} B_j$ ma siccome $|A_j| < |B_j|$ allora g_j non è mai surgettiva. Se scegliamo ogni $c_j \notin \mathrm{Imm}(g_j) \to c = (c_j) \notin \mathrm{Imm}(g)$

Osservazione:
Dati due cardinali infiniti h, k allora $k \cdot h = k + h = \max\{k, h\}$

Dimostrazione:
$\max\{k,h\} \le k + h \le 2 \cdot \max\{k,h\} = \max\{k,h\} + \max\{k,h\} \le$
$\le \max\{k,h\} \cdot \max\{k,h\} =^{AC} \max\{k,h\}$

Proprietà (D29):
Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato, allora sono uguali:

1. $\mathrm{Cof}(A)$
2. $\min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists f: \alpha \to A \text{ illimitata}\} \coloneqq \mathrm{Cof}_1(A)$
3. $\min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists g: \alpha \to A \text{ illimitata e crescente}\} \coloneqq \mathrm{Cof}_2(A)$

Dimostrazione:
$\mathrm{Cof}_1(A) \leq \mathrm{Cof}(A)$
Esiste sicuramente un $X \subseteq A$ illimitato | $|X| = \mathrm{Cof}(A)$
Prendo $f: \mathrm{Cof}(A) \to X \subseteq A$ bigezione illimitata, dunque $\mathrm{Cof}_1(A) \leq \mathrm{Cof}(A)$
$\mathrm{Cof}(A) \leq \mathrm{Cof}_1(A)$
Sia $f: \mathrm{Cof}_1(A) \to A$ illimitata, allora $X = \mathrm{Imm}(f)$ è un sottoinsieme illimitato di A e
$|X| \leq \mathrm{Cof}_1(A) \to \mathrm{Cof}(A) \leq |X| \leq \mathrm{Cof}_1(A)$
$\mathrm{Cof}_1(A) \leq \mathrm{Cof}_2(A)$
Ovvia in quanto $\mathrm{Cof}_2(A)$ è un sottoinsieme di $\mathrm{Cof}_1(A)$
$\mathrm{Cof}_2(A) \leq \mathrm{Cof}_1(A) = \mathrm{Cof}(A)$
Sia $X \subseteq A$ illimitato con $|X| = \mathrm{Cof}(A)$ e fissiamo $\sigma: \mathrm{Cof}(A) \to X \subseteq A$ bigezione.
Per ricorsione transfinita su $\mathrm{Cof}(A)$ definiamo:

$$\begin{cases} f(0) = \sigma(0) \\ f(\beta) = \sigma(\beta') \mid \beta' \coloneqq \min\{\delta \mid \sigma(\delta) > f(y)\ \forall y < \beta \text{ e } \sigma(\delta) \geq \sigma(\beta)\} \end{cases}$$

Notiamo che $f: \mathrm{Cof}(A) \to X$ illimitata perché $\forall \beta < \mathrm{Cof}(A)\ f(\beta) > \sigma(\varepsilon)\ \forall \varepsilon < \beta$

Proprietà (D30):
Ogni cardinale successore $\aleph_{\alpha+1}$ è singolare.

Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo che la cofinalità di $k = \aleph_{\alpha+1}$ sia strettamente minore di k.
Dunque $\exists f: \aleph_\alpha \to \aleph_{\alpha+1}$ illimitata, quindi $\aleph_{\alpha+1} = \bigcup_{\alpha \in \aleph_\alpha} f(\alpha)$ e dunque:
$|\aleph_{\alpha+1}| = \left|\bigcup_{\alpha \in \aleph_\alpha} f(\alpha)\right| \leq \sum_{\alpha \in \aleph_\alpha} |f(\alpha)| = |\aleph_\alpha| \cdot \sup|f(\alpha)| = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\alpha\} = \aleph_\alpha$ Assurdo.

Teorema pratico (D31):
k cardinale infinito, $\mathrm{Cof}(k) = \nu \leftrightarrow \nu$ è il minimo cardinale | $k = \sum_{i \in \nu} k_i$ dove $k_i < k$

Dimostrazione:
$\to$
Se k è regolare $k = \sum_{i \in k} \aleph_0$
Se k è irregolare allora è limite, cioè $k = \aleph_\lambda$ con λ limite.
Allora abbiamo visto che $\mathrm{Cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{Cof}(\lambda) \to \exists f: \nu \to \lambda$ illimitata.
Dunque $k = \aleph_\lambda = \sum_{i<\nu} \aleph_{f(i)} = \max\left\{\sup_{i<\nu}\left(\aleph_{f(i)}\right)\right\} = k$, detto $\nu = \mathrm{Cof}(k)$ il minimo cardinale con questa proprietà, se prendo un cardinale $\mu < \nu$ con la stessa proprietà allora:
$\sum_{i<\mu} k_i = \max\left\{\sup_{i<\mu} k_i, \mu\right\}$. Se fosse k avremmo che $\sup_{i<\mu} k_i = k \to f: \mu \to k$ che associa ad ogni i il cardinale k_i sarebbe illimitata. Assurdo.

Lemma (D32):
Se v, k sono cardinali e $k \leq v \rightarrow k^v = 2^v$

Dimostrazione:
$k^v \geq 2^v$ e inoltre $k \leq v < 2^v \rightarrow k^v \leq (2^v)^v = 2^{v \cdot v} = 2^v$

Teorema di Hausdorff (D33):
$(k^+)^v = \max\{k^v, k^+\} = k^v \cdot k^+$

Dimostrazione:
Ovviamente $(k^+)^v \geq \max\{k^v, k^+\}$, distinguiamo due casi:
$v \geq k^+$: allora $(k^+)^v = 2^v \leq k^v = \max\{k^v, k^+\}$ in quanto $k^+ \leq v < 2^v \leq k^v$
$v < k^+$: allora ogni $f: v \rightarrow k^+$ è limitata perché k^+ è regolare.
Quindi $\mathrm{Fun}(v, k^+) = \bigcup_{\delta < k^+} \mathrm{Fun}(v, \delta)$ e dunque:
$(k^+)^v = |\mathrm{Fun}(v, k^+)| = |\bigcup_{\delta < k^+} \mathrm{Fun}(v, \delta)| \leq \sum_{\delta < k^+} |\mathrm{Fun}(v, \delta)| = \sum_{\delta < k^+} |\delta|^v \leq \sum_{\delta < k^+} k^v =$
$= \max\{k^+, k^v\}$

Proprietà (D34):
1. $x \in y \in V_\alpha \rightarrow \exists \beta < \alpha \mid x \in V_\beta$
2. $\beta \leq \alpha \rightarrow V_\beta \subseteq V_\alpha$
3. $\forall \alpha\ V_\alpha$ è transitivo

Dimostrazione:
1. ∧ 2. →3.
1. Per induzione su α

$\alpha = 0$ è vera a vuoto.
$x \in y \in V_{\beta+1} = P(V_\beta) \rightarrow x \in y \subseteq V_\beta \rightarrow x \in V_\beta$
$x \in y \in V_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta \rightarrow \exists \delta < \lambda \mid x \in y \in V_\delta \rightarrow^{Hp\ ind} x \in V_\delta$

3. Per induzione su α

$\alpha = 0$ ovvia
$\alpha = \beta + 1$ ci basta fare vedere che $V_\beta \subseteq V_{\beta+1}$ (Se $\delta < \beta$ vale a quel punto per ipotesi altrimenti segue dalla 1.)
Ma $x \in V_\beta$ vale dalla 1. Che $\forall y \in x\ \exists \delta < \beta \mid y \in V_\delta$ e per ipotesi induttiva vale che $V_\delta \subseteq V_\beta \rightarrow y \in V_\beta \rightarrow x \subseteq V_\beta \rightarrow x \in V_{\beta+1}$
$\alpha = \lambda$; $\beta < \lambda \rightarrow V_\beta \subseteq V_\lambda$ per definizione di V_λ

Teorema (D35):
Assioma di Fondazione $\leftrightarrow V = VN$

Dimostrazione:
Lemma:
Se $A \subseteq VN \rightarrow A \in VN$

Dimostrazione lemma:
$\forall a \in A$; $\beta_a \coloneqq \min\{\beta \mid a \in V_\beta\}$, per Rimpiazzamento $\{\beta_a \mid a \in A\}$ è un insieme di ordinali e possiamo prendere $\beta \coloneqq \sup\{\beta_a \mid a \in A\} = \bigcup_{a \in A} \beta_a$
Allora $A \subseteq V_\beta \rightarrow A \in V_{\beta+1} \rightarrow A \in VN$

$\rightarrow$
Sia per assurdo A insieme | $A \in VN \rightarrow^{lemma} A \neg\subseteq VN \rightarrow \exists a_1 \in A \mid a_1 \notin VN$
Ma allora $a_1 \neg\subseteq VN_{>} \exists a_2 \in a_1 | A_2 \notin VN$, iterando otteniamo una catena discendente $a_1 \ni a_2 \ni \cdots$ che è assurdo per l'Assioma di Fondazione (D34).
$\leftarrow$
Se $x \in VN$ definiamo come rango $\rho(x) \coloneqq \min\{a \mid x \in V_a\}$ (Definito su VN)
Quindi $x \in y \rightarrow \rho(x) < \rho(y)$ ma allora $VN = V \rightarrow$ Assioma di Fondazione altrimenti dall'esistenza di una catena discendente $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \cdots$ seguirebbe l'esistenza di una catena discendente di ordinali $\rho(x_1) > \rho(x_2) > \rho(x_3) > \cdots$ Assurdo.

Teorema (D36):
Assioma di Fondazione $\leftrightarrow$ Non esistono catene discendenti

Dimostrazione:
$\rightarrow$
Se per assurdo esistesse $x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni \cdots$ allora $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ contraddirebbe l'assioma di Fondazione in quanto non possiede elementi minimali.
$\leftarrow$
Se $X \neq \emptyset$ non ha elementi minimali x allora preso $x_1 \in X$ questo non è minimale in X, cioè $X \cap x_1 \neq \emptyset \rightarrow \exists x_2 \in X \cap x_1$, iteriamo il procedimento (Serve AC per la scelta e rimpiazzamento per la ricorsione numerabile) ed otteniamo una catena discendente $X \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$

Cardinalità dei Borelliani:

La famiglia dei Borelliani è la più piccola famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contenga gli aperti e che sia chiusa per complemento e per unione ed intersezione numerabile (Algebra di parti).

Definiamo per ricorsione transfinita:

$$\begin{cases} B_0 = \{\Omega \mid \Omega \text{ aperto}\} \\ B_{\delta+1} = B_\delta \cup \{B^C \mid B \in B_\delta\} \cup \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n) \mid f: \mathbb{N} \to B_\delta\} \\ B_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} B_\delta \end{cases}$$

Attenzione:

B_ω è chiuso solo per unione ed intersezione finita mentre l'insieme dei Borelliani B_{ω_1}

Dimostriamo che $\left|B_{\omega_1}\right| = c = 2^{\aleph_0}$

Per induzione transfinita su δ mostriamo che $\forall \delta < \omega_1 \ |B_\delta| = c$

$\delta = 0$, $B_0 = \{\Omega \mid \Omega \text{ aperto}\}$ e abbiamo già dimostrato che $|B_0| = c$

$\delta \to \delta + 1$, abbiamo che $|B_\delta| = c$ per ipotesi.

$f: \{B^C \mid B \in B_\delta\} \to B_\delta$ biunivoca banale, dunque $|\{B^C \mid B \in B_\delta\}| = c$

$\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n) \mid f: \mathbb{N} \to B_\delta\}$ ha cardinalità minore uguale delle sequenze numerabili a valori in B_δ

Ossia è minore uguale di $|B_\delta|^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

Perciò: $|B_{\delta+1}| \leq |B_\delta| + |\text{complementari}| + |\text{intersezioni}| = c + c + c = c$

Ovviamente $|B_{\delta+1}| \geq |B_\delta| \to |B_{\delta+1}| = c$

λ allora $|B_\lambda| = |\bigcup_{\delta<\lambda} B_\delta| \leq \sum_{\delta<\lambda} |B_\delta| = \sum_{\delta<\lambda} c = \max\{|\lambda|, c\} = c$ in quanto $\lambda < \omega_1$

Inoltre $|B_\lambda| \geq |B_0| = c$

Ovviamente vale $\left|B_{\omega_1}\right| \geq c$ ed inoltre:

$\left|B_{\omega_1}\right| = \left|\bigcup_{\delta<\omega_1} B_\delta\right| \leq \sum_{\delta<\omega_1} |B_\delta| = \sum_{\delta<\omega_1} c = \max\{\aleph_1, c\} = c$

Forme equivalenti dell'Assioma della Scelta:
Assumendo la teoria ZF senza scelta sono equivalenti:

1. Assioma di Scelta
2. Lemma di Zorn
3. Teorema di Zermelo (Ogni insieme è bene ordinabile)
4. Tricotomia delle cardinalità
5. $\forall A$ infinito $|A| = |A \times A|$

Lemma di Zorn:
Se $(P, \leq)$ è parzialmente ordinato e se ogni catena ammette maggioranti allora esiste almeno un elemento $x \in P$ massimale.

Notazione (Catena):
Una catena è un sottoinsieme totalmente ordinato di P.

Notazione (Maggiorante):
$p \in P$ è un maggiorante della catena C se $\forall c \in C \; p \geq c$

Notazione (Massimale):
$p \in P$ si dice massimale se $\nexists q \in P \mid q > p$

Notazione (f-Catena):
$A \subseteq P$ si dice f-Catena se A è bene ordinato e vale:
$\forall a \in A \;\; a = f(\{p \in P \mid p > A_a$ equivalente $p > x \;\; \forall x < a\})$

Lemma:
Se A, B sono f-Catene allora vale una ed una sola fra:
A segmento iniziale di $B, A = B, B$ segmento iniziale di A

Dimostrazione (A segmento iniziale di B):
Supponiamo per tricotomia dei buoni ordini che esista $\Psi: A \to B_b$ isomorfismo.
Dimostriamo che Ψ è l'identità.
Se per assurdo $\Psi \neq \mathrm{Id}$ allora sia $a = \min\{x \in A \mid x \neq \Psi(x)\} \neq \emptyset$ per ipotesi.
Quindi $\forall x \in A_a \; \Psi(x) = x$, ma allora $\Psi_{|A_a}: A_a \to B_{\Psi(a)}$è l'identità.
Ma per definizione di f-Catena $a = f(\{p \in P \mid p > x \; \forall x \in A_a\})$ e
$\Psi(a) = f\left(\{p \in P \mid p > y \; \forall y \in B_{\Psi(a)}\}\right)$
Ma allora a e $\Psi(a)$ sono immagine tramite f dello stesso elemento, allora
$a = \Psi(a)$, Assurdo.

$1 \to 2$
Fissiamo $f: Parti(P) \setminus \emptyset \to P$ funzione di scelta.

Sia $P_0 = f(P)$, se è massimale ci fermiamo, altrimenti:
$P_1 = f(\{p \in P \mid p > P_0\})$ osservando che $\{p \in P \mid p > P_0\} \neq \emptyset$ in quanto P_0 non è massimale.

Se $\forall n\ P_n$ non è massimale consideriamo: $P_\omega := f(\{p \in P \mid p > P_n\ \forall n \in \omega\})$

Le f-Catene formano una famiglia di buoni ordini dove uno è segmento iniziale dell'altro, dunque C unione delle f-Catene è un buon ordine.
Inoltre questa C è una f-Catena.
Ma allora C è la f-Catena massima ed esiste $\tilde{P} = \max C$ elemento massimale di P.

$2 \to 5$
Lemma 1:
$\forall A$ infinito $|A| \geq |\mathbb{N}|$

> **Dimostrazione (LZ):**
> Prendo $P = \{f: S \to A \mid S \text{ segmento iniziale di } \mathbb{N} \text{ e } f \text{ iniettiva}\}$
> $(P, \subseteq)$ soddisfa le ipotesi del Lemma di Zorn.
> Dunque $\exists \varphi: S \to A$ massimale, dico che $S = \mathbb{N}$ altrimenti se avessi $\varphi: n \to A$ iniettiva siccome A è infinito $\exists \tilde{a} \notin \mathrm{Imm}(f)$, quindi $\tilde{\varphi} = \varphi \cup \{n+1, \tilde{a}\}$ sarebbe iniettiva e contraddirebbe la massimalità di φ.

Prendiamo $Q = \{f: B \times B \to B \mid f \text{ bigezione e } B \subseteq A \text{ infinito}\}$
$(Q, \subseteq)$ è parzialmente ordinato.

Osservazione 1:
$Q \neq \emptyset$ siccome per il lemma $\exists f: \mathbb{N} \to A$ iniettiva, possiamo considerare $B = \mathrm{Imm}(f)$ sottoinsieme infinito e $|B \times B| = |B|$ in quanto $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

Osservazione 2:
$(Q, \subseteq)$ rispetta le ipotesi del Lemma di Zorn, infatti se C è una catena di elementi di Q allora $\cup\, C$ è un maggiorante.

Per l'osservazione 2 possiamo prendere $\varphi: B \times B \to B$ massimale.
Vogliamo ora dimostrare che $B = A$
Supponiamo per assurdo il contrario, allora $\exists a \in A \backslash B$ e trovo $\Psi: (B \cup \{a\}) \times (B \cup \{a\}) \to B \cup \{a\}$
Bigezione che contraddice la massimalità di φ.

Osserviamo che $(B \cup \{a\})^2 = (B \times B) \cup (B \times \{a\}) \cup (\{a\} \times B) \cup \{(a,a)\}$ e siccome sappiamo per ipotesi che $|B \times B| = |B|$, $|B \times \{a\}| = |\{a\} \times B| = |B|$ in quanto B infinito e $|\{(a,a)\}| = 1$
Allora:
$|(B \cup \{a\})| \leq |(B \cup \{a\})^2| = |B| + |B| + |B| + 1 \leq |B \times \{1,2,3,4\}| \leq |B \times B| =^{Hp} |B| \leq |(B \cup \{a\})|$
Per Cantor - Bernstein $|(B \cup \{a\})| = |(B \cup \{a\})^2|$ e dunque φ non è massimale.

$3 \to 1$
Dato un insieme $A\ \exists\ (A, <)$ buon ordine e quindi una f di scelta $f: P(A) \backslash \{\emptyset\} \to A$ data da $f(X) = \min X$

$5 \rightarrow 3$

Se A è finito allora è bene ordinabile. Se A è infinito consideriamo $B = A \cup H(A)$, senza perdita di generalità possiamo considerare $A \cap H(A) = \emptyset$ (Questo a meno di considerare $A' = A \times \{0\}$ che non è un ordinale e ha la stessa cardinalità di A.

Per ipotesi $\exists \Psi: B \times B \rightarrow B$ bigettiva, in particolare restringendoci a $A \times H(A)$ troviamo:

$\varphi: A \times H(A) \rightarrow A \cup H(A) = B$ iniettiva.

$\forall a \in A$ consideriamo $\varphi_a: H(A) \rightarrow A \cup H(A) \mid \gamma \in H(A), \varphi_a(\gamma) = \varphi\big((a, \gamma)\big)$ che è iniettiva.

Osserviamo che $\mathrm{Imm}(\varphi_a) \neg\subseteq A$ (Altrimenti $|H(A)| \leq |A|$ Assurdo).

Dunque $\exists \gamma_a = \min\big(\mathrm{Imm}(\varphi_a) \cap H(A)\big)$

Consideriamo a questo punto $\theta: A \rightarrow H(A) \mid \theta(a) = \gamma_a$ iniettiva siccome φ lo è.

Allora definiamo $a <_A a' \leftrightarrow \theta(a) <_A \theta(a')$ e quindi $(A, <_A)$ è un buon ordine.

$3 \leftrightarrow 4$

$3 \rightarrow 4$

Dati A, B $\exists (A, <_A), (B, <_B)$ buoni ordini associati, per la tricotomia dei buoni ordini otteniamo $|A| \leq |B|$ oppure $|B| \leq |A|$

$4 \rightarrow 3$

Dato A consideriamo $H(A)$, siccome $|H(A)| \neg\leq |A|$ per ipotesi dobbiamo avere $|A| \leq |H(A)|$ cioè $\exists \varphi: A \rightarrow H(A)$ iniettiva.

Definiamo allora $a <_A a' \leftrightarrow \varphi(a) < \varphi(a')$

Allora $(A, <_A)$ è isomorfo ad un sottoinsieme dell'ordinale $H(A)$ ed abbiamo quindi definito un buon ordine su A

Osservazione 1:
Dato $\alpha > 0$ sono proprietà equivalenti:

$\forall \beta < \alpha \ (\beta + \alpha = \alpha)$
$\forall \beta, \gamma < \alpha \ (\beta + \gamma < \alpha)$ (Additivamente chiuso)
$\alpha = \omega^{\delta}$ per qualche δ

Dimostrazione:
$\mathbf{1 \to 2}$
$\forall \beta, \gamma < \alpha$ vale $\beta + \gamma < \beta + \alpha =^{Hp} \alpha$
$\mathbf{2 \to 3}$
Sia $B = \{x \mid \omega^{x} > \alpha\} \neq \emptyset$ in quanto $\alpha + 1 \in B$, infatti $\omega^{\alpha+1} = \omega^{\alpha} \cdot \omega > \alpha$
Siccome è una classe di ordinali ammette minimo $\xi = \min \beta \neq 0$ altrimenti:
$\omega^{0} = 1 > \alpha \to \alpha = 0$
Osserviamo che ξ non può essere limite altrimenti $\alpha < \omega^{\xi} = \bigcup_{\delta<\xi} \omega^{\delta} \to \exists \delta' < \xi \mid \alpha < \omega^{\delta'}$ contraddicendo la minimalità di ξ.
Quindi $\xi = \gamma + 1 \to \omega^{\gamma} \leq \alpha < \omega^{\gamma+1}$
$\alpha < \omega^{\gamma+1} = \bigcup_{n<\omega} \omega^{\gamma} \cdot n \to \exists n < \omega \mid \alpha < \omega^{\gamma} \cdot n$
Sia $A = \{n \in \omega \mid \alpha < \omega^{\gamma} \cdot n\} \neq \emptyset$; $m = \min\ \mathrm{A} > n + 1$ e $m \neq 0$ e
$\omega^{\gamma} \cdot n \leq \alpha < \omega^{\gamma}(n+1)$
Mediante divisione euclidea:

Supponiamo per assurdo che $\alpha \geq \omega^{\gamma}$ allora: $\alpha = \omega^{\gamma} \cdot n + \rho$
Se $\rho = 0$ allora $\alpha = \omega^{\gamma} \cdot m \ (m \geq 2)$
Quindi $\omega^{\gamma}, \omega^{\gamma} \cdot (m-1) < \alpha \to \omega^{\gamma} + \omega^{\gamma} \cdot (m-1) = \omega^{\gamma} \cdot m = \alpha$ (Contraddice 2.)
Se $\rho \neq 0 \to \ \rho < \omega^{\gamma} < \omega^{\gamma} \cdot m < \alpha \to \omega^{\gamma} \cdot m + \rho = \alpha$ (Contraddice 2.)

$\mathbf{3 \to 1}$
Per induzione transfinita su γ.
Caso base:
$\gamma = 0 \to \beta < \omega^{0} = 1 \to \{\beta < \alpha\} = \{0\} \to 0 + 1 = 1$
Passo induttivo (Successore):
$\gamma = \delta + 1$
Dunque $\alpha = \omega^{\delta+1} = \bigcup_{n<\omega} \omega^{\delta} \cdot n$
$\beta < \alpha \to \exists n \mid \beta < \omega^{\delta} \cdot n$
Allora $\beta + \alpha = \beta + \omega^{\delta+1} = \omega^{\delta} \cdot n + \omega^{\delta+1} = \omega^{\delta} \cdot (n + \omega) = \omega^{\delta+1}$
Caso limite:
$\alpha = \omega^{\lambda} = \bigcup_{\delta<\lambda} \omega^{\delta} \to \exists \delta' < \lambda \mid \beta < \omega^{\delta'} \to \beta + \alpha = \omega^{\delta'} + \omega^{\delta'+\rho} =$
$= \omega^{\delta'} \cdot (1 + \omega^{\rho}) =^{hp} \omega^{\lambda}$

Osservazione 2:
Dato $\alpha > 0$ sono proprietà equivalenti:

1. $\forall \beta < \alpha \;\; \beta \cdot \alpha = \alpha$
2. $\forall \beta, \gamma < \alpha \;\; \beta \cdot \gamma < \alpha$ (Moltiplicativamente chiuso)
3. $\exists \delta \;\; \alpha = \omega^{\omega^{\delta}}$

Dimostrazione:
$\mathbf{1 \rightarrow 2}$
$\forall \beta, \gamma < \alpha \;\; \beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha =^{Hp} \alpha$
$2 \rightarrow 3$
Sia $B = \{x \mid \omega^{\omega^{x}} > \alpha\} \neq \emptyset$ in quanto $\alpha + 1 \in B$, infatti $\omega^{\omega^{\alpha+1}} \geq \omega^{\alpha+1} \geq \alpha + 1 > \alpha$
Siccome è una classe di ordinali ammette minimo $\xi = \min \beta \neq 0$ altrimenti:
$\omega^{\omega^{0}} = \omega \rightarrow \alpha = n$ ed è facile verificare che dati due valori appena minori di n il prodotto ne è maggiore.

Osserviamo che ξ non può essere limite altrimenti
$\alpha < \omega^{\omega^{\xi}} = \bigcup_{\delta < \omega^{\xi}} \omega^{\delta} \rightarrow \exists \delta' < \omega^{\xi} \mid \alpha < \omega^{\delta'} \leq \omega^{\omega^{\gamma}}$ per qualche $\gamma < \xi$ dunque:
$\alpha < \omega^{\omega^{\gamma}}$ contraddicendo la minimalità di ξ.

Quindi $\xi = \gamma + 1 \rightarrow \omega^{\omega^{\gamma}} \leq \alpha < \omega^{\omega^{\gamma+1}}$

Mediante divisione euclidea:

Supponiamo per assurdo che $\alpha > \omega^{\omega^{\gamma}}$ allora: $\alpha = \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot \beta + \rho$
Se $\rho \neq 0$ allora $\alpha = \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot \beta + \rho \leq \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot (\beta + 1)$ con $\omega^{\omega^{\gamma}}, (\beta + 1) < \alpha$ in quanto non può essere un successore. Ma allora$\alpha \leq \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot (\beta + 1) < \alpha$, Assurdo, quindi $\rho = 0$
Se $\rho = 0$ allora $\alpha = \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot \beta$
Con $\omega^{\omega^{\gamma}}, \beta < \alpha$ altrimenti se fosse $\beta > \alpha$ avremmo $\alpha < \beta \leq \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot \beta = \alpha$ assurdo.
Ma allora $\alpha = \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot \beta <^{Hp} \alpha$ Assurdo. Quindi $\beta = 1$.
Se fosse $\beta = \alpha$ avremmo $\alpha = \omega^{\omega^{\gamma}} \cdot \alpha \rightarrow \alpha \geq \omega^{\omega^{\gamma+1}}$ (Per forma normale di Cantor), Assurdo.

$\mathbf{3 \rightarrow 1}$
Per induzione transfinita su δ.
Caso base:
$\delta = 0 \rightarrow \beta < \omega^{\omega^{0}} = \omega^{1} = \omega \rightarrow \{\beta < \alpha\} = \{n \mid n \in \omega\} \rightarrow n + \omega = \omega$
Passo induttivo (Successore):
$\delta = \gamma + 1$
Dunque $\alpha = \omega^{\omega^{\gamma+1}} = \omega^{\omega^{\gamma} \cdot \omega} = \left(\omega^{\omega^{\gamma}}\right)^{\omega} = \bigcup_{n<\omega} \left(\omega^{\omega^{\beta}}\right)^{n}$
Siccome $\beta < \alpha \rightarrow \exists n \mid \beta < \left(\omega^{\omega^{\beta}}\right)^{\bar{n}}$ in quanto α limite.
Allora $\beta \cdot \alpha = \beta \cdot \left(\omega^{\omega^{\gamma}}\right)^{\omega} \leq \left(\omega^{\omega^{\beta}}\right)^{\bar{n}} \cdot \left(\omega^{\omega^{\gamma}}\right)^{\omega} = \left(\omega^{\omega^{\gamma}}\right)^{\bar{n}+\omega} = \left(\omega^{\omega^{\gamma}}\right)^{\omega} = \alpha$

D'altro canto $\beta \cdot \alpha \geq 1 \cdot \alpha = \alpha$

Caso limite:

$\alpha = \omega^{\omega^\lambda} = \bigcup_{\delta<\omega^\lambda} \omega^\delta \to \exists \delta' < \omega^\lambda \to \exists k \mid \delta' \leq \omega^k | \beta < \omega^{\omega^k} \to \beta \cdot \alpha = \omega^{\omega^k} \cdot \omega^{\omega^\lambda} =$
$= \omega^{\omega^k + \omega^\lambda} = \omega^{\omega^k + \omega^k \cdot \beta} = \omega^{\omega^k \cdot (1+\beta)} = \omega^{\omega^k \cdot \beta} = \omega^{\omega^\lambda} = \alpha$

Osservazione 3:

Dati $\alpha > \beta \to \exists!\ \gamma \mid \beta + \gamma = \alpha$

Dimostrazione:

Sappiamo che $A = \{\delta \mid \beta + \delta > \alpha\} \neq \emptyset$ in quanto $\beta + (\alpha + 1) \geq \alpha + 1 > \alpha$
Sia $n = \min A$, allora $n \neq 0$ perché $\beta + 0 = \beta < \alpha$ e n non è un limite perché se lo fosse esisterebbe un $\bar{n}$ che contraddica la minimalità.
Quindi $n = \delta + 1 \to\ \beta + \delta \leq \alpha < \beta + \delta + 1 \to \beta + \delta = \alpha$

L'unicità segue da $\gamma < \gamma' \to \beta + \gamma < \beta + \gamma'$

Osservazione 4:

λ è un limite $\leftrightarrow$ è della forma $\lambda = \omega \cdot \gamma$ per qualche γ

Dimostrazione:

$\leftarrow$
$\lambda = \omega \cdot \gamma$ se γ limite allora è limite, se è successore $\lambda = \omega \cdot (\delta + 1) = \omega \cdot \delta + \omega$ che è un limite.
$\to$
α limite e lo dividiamo per ω (In quanto ogni ordinale limite è $\geq \omega$) quindi $\alpha = \omega \cdot \gamma + \rho$ $\to$se fosse $\rho \neq 0$ deve essere limite ma $\rho < \omega$ quindi successore, Assurdo.

Osservazione 5:

α, β ordinali, allora $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ con $\alpha \geq 2, \beta$ infinito.

Dimostrazione:

Induzione transfinita su β:
$\beta = \omega$
$|\alpha^\omega| = |\bigcup_{n<\omega} \alpha^n| \leq \sum_{n<\omega} |\alpha^n| =^{AC} \sum_{n<\omega} |\alpha| = |\alpha| \cdot |\omega| = \max\{|\alpha|, |\omega|\}$
Inoltre: $|\alpha|, |\omega| \leq |\alpha^\omega|$
$\beta = \delta + 1$
$|\alpha^\beta| = |\alpha^{\delta+1}| = |\alpha^\delta \cdot \alpha| = |\alpha^\delta| \cdot |\alpha| =^{Hp} \max\{\max\{|\alpha|, |\delta|\}, |\alpha|\} = \max\{|\alpha|, |\delta|\} =$
$= \max\{|\alpha|, |\delta + 1|\}$
$\beta = \lambda$
$|\alpha^\lambda| = |\bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^\delta| \leq \sum_{\delta<\lambda} |\alpha^\delta| =^{Hp} \sum_{\delta<\lambda} \max\{|\alpha|, |\delta|\} \leq \sum_{\delta<\lambda} \max\{|\alpha|, |\lambda|\} \leq \max\{|\alpha|, |\lambda|\}$
Inoltre $|\alpha| \leq |\alpha^\lambda|$ e $|\lambda| \leq |2^\lambda| \leq |\alpha^\lambda|$

Osservazione 6 (Punto fisso):

Un esempio interessante di ordinale $\alpha \mid \omega^{\alpha} = \alpha$ è definito come:

$\begin{cases} \alpha_0 = \omega \\ \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} \end{cases}$ e $\alpha = \bigcup_n \alpha_n$

Osservazione 7 (Teorema di Cantor):

$\forall\ (A, <)$ insieme ordinato con $|A| \leq \aleph_0$ è isomorfo ad un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$

Dimostrazione:

Se A è finito si dimostra banalmente per induzione. Sia $|A| = \aleph_0$ allora possiamo numerare gli elementi di A, cioè individuare una $f: n \to a_n$ biunivoca tra ω e A.

Definiamo per ricorsione una funzione $\theta: A \to \mathbb{Q}$:

$$\theta(a_{n+1}) = \begin{cases} \min\{\theta(a_0), \dots, \theta(a_n)\} \text{ se } a_{n+1} < a_0, \dots, a_n \\ \max\{\theta(a_0), \dots, \theta(a_n)\} \text{ se } a_{n+1} > a_0, \dots, a_n \\ \frac{a_i + a_j}{2} \text{ con } a_i = \min\{a_k \mid a_k > a_{n+1}\}\ a_j = \max\{a_k \mid a_k < a_{n+1}\} \end{cases}$$

Allora $\mathrm{Imm}(\theta) \cong A$, cioè θ è un isomorfismo.