Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Appunti del corso di

Analisi Reale

Frutto della libera rielaborazione delle lezione tenute dal professor Valentino Magnani
durante l'Anno Accademico 2018/2019

Marco Inversi

Ultima Modifica

01/03/2020

Indice

1 Teoria della misura **1**
1.1 Spazi mensurali . . . 1
1.1.1 Definizioni e prime proprietà . . . 1
1.1.2 Completamento . . . 5
1.2 Costruzione di misure . . . 6
1.2.1 Misure esterne . . . 6
1.2.2 Teorema di estensione di Carathéodory-Hahn . . . 9
1.3 La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ . . . 16

2 Teoria dell'integrazione astratta **19**
2.1 Funzioni misurabili . . . 19
2.1.1 Definizioni e prime proprietà . . . 19
2.1.2 Funzioni semplici . . . 21
2.1.3 Operazioni tra funzioni misurabili . . . 22
2.2 Integrazione di funzioni misurabili . . . 24
2.2.1 Integrale di funzioni non negative . . . 24
2.2.2 Integrale di funzioni di segno qualsiasi . . . 30
2.3 Un altro approccio per la costruzione dell'integrale . . . 36
2.3.1 Funzioni δ-integrabili . . . 36
2.3.2 Integrale di Riemann e di Lebesgue a confronto . . . 39
2.4 Appendice: integrale di funzioni a valori vettoriali . . . 43

3 Spazi L^p **46**
3.1 Definizione . . . 46
3.2 Disuguaglianze integrali . . . 47
3.2.1 Completezza . . . 55
3.3 Varie nozioni di convergenza . . . 57

4 Misure prodotto **61**
4.1 Costruzione della misura prodotto . . . 61
4.2 Teoremi di Fubini e Tonelli . . . 62

5 Misure con segno **68**
5.1 Definizioni e prime proprietà . . . 68
5.2 Decomposizione di misure . . . 69

6 Misure a valori in uno spazio di Banach **73**
6.1 Definizioni e prime proprietà . . . 73
6.1.1 Variazione totale di una misura . . . 74

6.2 Assoluta continuità di misure 78
6.2.1 Misure definite da una densità 79
6.2.2 Teorema di Radon-Nikodym 82
6.3 Appendice: cenni sull'integrale di Bochner 94

7 Misure e topologia 100
7.1 Misure boreliane 100
7.1.1 Definizioni e prime proprietà 100
7.1.2 Teoremi di approssimazione 103
7.1.3 Criterio di Carathéodory 105
7.2 Misure di Radon 109
7.2.1 Definizioni e prime proprietà 109
7.2.2 Teorema di Lusin 113
7.3 Rappresentazione di funzionali localmente limitati 115
7.3.1 Variazione totale di un funzionale 115
7.3.2 Teorema di rappresentazione di Riesz 119

8 Proprietà fini delle funzioni di variabile reale 130
8.1 Teoremi di ricoprimento 130
8.2 Alcune proprietà delle funzioni di variabile reale 134
8.2.1 Funzioni monotone 134
8.2.2 Funzioni assolutamente continue 140

9 Misure di Hausdorff 144
9.1 Costruzione di Carathéodory 144
9.1.1 Definizioni e prime proprietà 144
9.1.2 Costruzione della misura di Hausdorff 146
9.1.3 Misura di Hausdorff e mappe hölderiane 147
9.2 Misura di Hausdorff nello spazio euclideo 148
9.2.1 $\mathcal{H}^n$ versus m_n 148
9.2.2 Frattali 151
9.2.3 Formula dell'area in $\mathbb{R}^n$ 157

Convenzioni

Utilizzeremo l'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$, in cui valgono le usuali operazioni tra numeri reali e si assumono le seguenti convenzioni:

- $a + (+\infty) = +\infty$ per ogni a in $\mathbb{R}$;
- $a + (-\infty) = -\infty$ per ogni a in $\mathbb{R}$;
- $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0, \\ -\infty & \text{se } a < 0, \\ 0 & \text{se } a = 0; \end{cases}$
- $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0, \\ +\infty & \text{se } a < 0, \\ 0 & \text{se } a = 0; \end{cases}$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.

Grazie a queste convenzioni, continua a valere la proprietà distributiva.

Dati $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, denotiamo

$$a \vee b \coloneqq \max\{a; b\}, \quad a \wedge b \coloneqq \min\{a; b\}.$$

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Spazi mensurali

Gli spazi mensurali costituiscono l'ambiente più generale ove sviluppare una teoria dell'integrazione. Nel seguito introdurremo le prime nozioni.

1.1.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 1.1.1 (Spazio misurabile)**.** Siano $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ una collezione di sottoinsiemi con le seguenti proprietà:

- $\emptyset \in \mathcal{M}$;
- se $A \in \mathcal{M}$, allora $A^c \in \mathcal{M}$;
- se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di elementi in $\mathcal{M}$, allora $\bigcup A_n \in \mathcal{M}$.

Si dice allora che $\mathcal{M}$ è una *σ-algebra* e che la coppia $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ è uno *spazio misurabile*.

Osservazione 1.1.2. Dalla nota relazione insiemistica

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c \right)^c$$

si deduce che una σ-algebra è chiusa anche per intersezione numerabile.

Osservazione 1.1.3. È immediato osservare che $\mathcal{M}$ è stabile anche per unioni finite e quindi anche per intersezioni finite.

Definizione 1.1.4 (Sottospazio misurabile)**.** Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile ed E un elemento di $\mathcal{M}$. Introduciamo la classe

$$\mathcal{M}_E \coloneqq \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(E),$$

osservando che $\mathcal{M}_E$ è una σ-algebra in E. Diremo che la coppia $(E, \mathcal{M}_E)$ è un sottospazio misurabile di $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$.

Osservazione 1.1.5. Notiamo che

$$\mathcal{M}_E = \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(E) = \{E \cap S : S \in \mathcal{M}\},$$

quindi in particolare $\mathcal{M}_E$ è una σ-algebra.

Definizione 1.1.6 (Funzioni d'insieme)**.** Siano $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ una collezione non vuota di sottoinsiemi. Sia $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme. Se per ogni collezione finita e disgiunta $\{S_i\} \subseteq \mathcal{S}$ tale che $\bigcup S_i \in \mathcal{S}$ vale che

$$\mu\left(\bigcup S_i\right) = \sum \mu(S_i), \tag{1.1}$$

diremo che μ è una funzione d'insieme *finitamente additiva*. Se per ogni famiglia $\{S_i\} \subseteq \mathcal{S}$ disgiunta e numerabile, tale che $\bigcup S_i \in \mathcal{S}$, vale la (1.1), diremo allora che μ è *numerabilmente additiva*. Infine diremo che μ è *numerabilmente subadditiva* se per ogni famiglia numerabile $\{S_i\} \subseteq \mathcal{S}$ disgiunta e per ogni $S \in \mathcal{S}$ con $S \subseteq \bigcup S_i$ abbiamo

$$\mu(S) \leq \sum \mu(S_i). \tag{1.2}$$

Definizione 1.1.7 (Misura)**.** Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una funzione con le seguenti proprietà:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ è numerabilmente additiva.

Diremo che μ è una *misura* sulla σ-algebra $\mathcal{M}$ e chiameremo la terna $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno *spazio mensurale.*

Esempio 1.1.8. Sia $\mathbb{X}$ un insieme. Possiamo dotare lo spazio misurabile $(\mathbb{X}; \mathcal{P}(\mathbb{X}))$ della misura che conta i punti. Definiamo $\gamma : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ tale che

$$\mu(A) \coloneqq \#A.$$

Un altro esempio di misura lo possiamo ottenere fissando un punto $y \in \mathbb{X}$. Definiamo la misura $\delta_y : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ (δ di Dirac centrata in y) come

$$\mu_y(A) \coloneqq \#(\{y\} \cap A)$$

per ogni $A \subseteq \mathbb{X}$.

Definizione 1.1.9. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$; si dice che $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotona crescente se $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; si dice che $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente se $A_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1.1.10. Mostrare che possiamo avere una misura $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ con insiemi $A_j \in \mathcal{M}$ aventi la proprietà che $\mu(A_j)$ è monotona non decrescente, ma

$$\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) < \mu\left(\bigcup A_j\right).$$

Esercizio 1.1.11. Mostrare che possiamo avere una misura $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ con insiemi $A_j \in \mathcal{M}$ aventi la proprietà che A_j è una successione monotona non crescente, ma

$$\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) > \mu\left(\bigcap A_j\right).$$

Definizione 1.1.12 (σ-finitezza)**.** Sia $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale. Diremo che un misurabile $E \in \mathcal{M}$ è σ*-finito* se esiste un suo ricoprimento $\{F_j\} \subseteq \mathcal{M}$ al più numerabile e i cui elementi F_j hanno misura finita. Diremo che lo spazio mensurale $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ è σ-finito se lo è l'insieme $\mathbb{X}$.

Proposizione 1.1.13. *Sia $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale. La misura μ ha le seguenti proprietà:*

- *è finitamente additiva;*
- *è monotona;*
- *se A, B sono elementi di $\mathcal{M}$, $B \subseteq A$ e $\mu(A) < +\infty$, allora*
$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B);$$
- *è numerabilmente subadditiva.*

Dimostrazione. **Step 1**: Per la finita additività, basta osservare che se $\{A_0; \dots; A_n\}$ è una famiglia finita di insiemi disgiunti in $\mathcal{M}$, per ogni $m > n$, definiamo $A_m := \emptyset$; allora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{M}$ di insiemi a due a due disgiunti. Ricordando che μ è numerabilmente additiva e che $\mu(\emptyset) = 0$, vale che

$$\mu\left(\bigcup_{m=0}^{n} A_m\right) = \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_m) = \sum_{m=0}^{n} \mu(A_m).$$

Step 2: La proprietà di monotonia è un'ovvia conseguenza della finita additività.
Step 3: Se $B \subseteq A$ sono elementi in $\mathcal{M}$, allora vale che

$$\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A);$$

essendo $\mu(B) < +\infty$ per monotonia, troviamo che

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Step 4: Proviamo la subadditività numerabile: siano $A \in \mathcal{M}$ e $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ (non necessariamente disgiunti) tali che $A \subseteq \bigcup A_n$; dobbiamo mostrare che

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Poniamo $\tilde{A}_0 = A_0$; se $n \geq 1$, poniamo

$$\tilde{A}_n = A_n \setminus \bigcup_{l<n} A_l.$$

Si osserva banalmente che

$$\bigcup A_n = \bigcup \tilde{A}_n;$$

inoltre gli insiemi $\{\tilde{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono a due a due disgiunti. Per monotonia e additività numerabile di μ vale che

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

□

Teorema 1.1.14 (Continuità della misura)**.** *Siano* $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio mensurale e* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* $\mathcal{M}$*.*

- *se la successione è crescente, vale che*
$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right);$$
- *se la successione è decrescente e* $\mu(A_1) < +\infty$*, allora*
$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia crescente. Se esiste n in $\mathbb{N}$ tale che $\mu(A_n) = +\infty$, la tesi è banale. Supponiamo, allora, che tutti gli insiemi abbiano misura finita. Poniamo $A_{-1} \coloneqq \emptyset$; per ogni n in $\mathbb{N}$ definiamo $E_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}$. La famiglia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è fatta da elementi a due a due disgiunti e ovviamente vale che
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$
Allora vale che
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Step 2: Supponiamo che la successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia decrescente e che $\mu(A_1) < +\infty$. Allora la successione $\{A_1 \setminus A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente; pertanto vale che
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1 \setminus A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_1 \setminus A_n).$$
Otteniamo che
$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_1) - \mu(A_n).$$
Essendo $\mu(A_1) < +\infty$, si deduce che
$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n),$$
da cui segue la tesi. □

Esempio 1.1.15. Consideriamo lo spazio mensurale $(\mathbb{N}; \mathcal{P}(\mathbb{N}); \gamma)$, dove $\gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ è la misura che conta i punti. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo
$$A_n \coloneqq \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq n\}.$$
Abbiamo che la successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decresce all'insieme vuoto; tuttavia, vale che
$$+\infty = \lim_{n\to+\infty} \gamma(A_n) > 0 = \gamma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$
Dunque, per richiedere la continuità della misura su successioni decrescenti è davvero necessario che almeno un elemento della successione abbia misura finita.

Proposizione 1.1.16. *Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme. Allora μ è una misura se e solo se è finitamente additiva, $\mu(\emptyset)$ è finito e vale la proprietà di continuità per successioni crescenti, cioè se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente in $\mathcal{M}$, allora*

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Dimostrazione. Se μ è una misura, gode ovviamente delle proprietà richieste (vedi 1.1.13 e 1.1.14). Viceversa, supponiamo che μ sia finitamente additiva e sia continua per successioni crescenti. Dalla finita additività si deduce che

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset);$$

essendo $\mu(\emptyset) < +\infty$, si deduce che deve essere 0. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia disgiunta di insiemi in $\mathcal{M}$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$E_n \coloneqq \bigcup_{i=0}^{n} A_i.$$

Ovviamente la famiglia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e vale che

$$\bigcup A_n = \bigcup E_n.$$

Per le proprietà di finita additività e di passaggio al limite per successioni crescenti vale che

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu\left(\bigcup E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i).$$

□

1.1.2 Completamento

Definizione 1.1.17 (Insieme nullo)**.** Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale e Z un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{X}$. Diremo che Z è un insieme nullo se esiste $S \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(S) = 0$ e $Z \subseteq S$. Denotiamo con $\mathcal{N}$ la collezione degli insiemi nulli.

Definizione 1.1.18. Sia $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale. Si dice che una proprietà in $\mathbb{X}$ è vera quasi ovunque (o μ-quasi ovunque) se l'insieme dei punti in $\mathbb{X}$ per cui non vale è un insieme nullo.

Definizione 1.1.19 (Spazio mensurale completo)**.** Sia $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale. Diremo che è completo che se ogni insieme nullo appartiene alla σ-algebra $\mathcal{M}$.

Definizione 1.1.20 (Completamento di una σ-algebra)**.** Sia $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurabile. Definiamo

$$\overline{\mathcal{M}} \coloneqq \{A \cup Z \mid A \in \mathcal{M},\ Z \in \mathcal{N}\}.$$

Diremo che $\overline{\mathcal{M}}$ è il completamento di $\mathcal{M}$ rispetto alla misura μ.

Osservazione 1.1.21. L'unione numerabile di insiemi nulli è ovviamente un insieme nullo; allora, è immediato verificare che il completamento $\overline{\mathcal{M}}$ di una σ-algebra $\mathcal{M}$ rispetto ad una misura μ è una σ-algebra.

Esempio 1.1.22. Se $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio mensurale, $A \subseteq \mathbb{X}$ e $B \in \mathcal{M}$ è tale che $A \Delta B$ è un insieme nullo, allora $A \in \overline{M}$. Infatti, possiamo scrivere

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

Osserviamo che $A \setminus B$ è un insieme nullo, perchè è contenuto in $A \Delta B$; inoltre, vale che

$$A \cap B = B \setminus (B \setminus A);$$

dunque $A \cap B \in \overline{\mathcal{M}}$ perchè $B \setminus A$ è un insieme nullo e $B \in \mathcal{M}$ (ricordiamo che $\overline{\mathcal{M}}$ è una σ-algebra). Allora $A \in \overline{\mathcal{M}}$, essendo unione di due suoi elementi.

Proposizione 1.1.23. *Siano* $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio misurabile; definiamo la funzione* $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \to [0, +\infty]$ *tale che*

$$\overline{\mu}(A \cup Z) \coloneqq \mu(A),$$

dove $A \in \mathcal{M}$ *e* Z *è un insieme nullo.* $\overline{\mu}$ *è ben definita ed è una misura che estende* μ *alla* σ*-algebra* $\overline{\mathcal{M}}$*.*

Dimostrazione. Siano $A, A' \in \mathcal{M}$ e Z, Z' insiemi nulli tali che

$$A \cup Z = A' \cup Z'.$$

Allora $A \setminus A'$ e $A' \setminus A$ sono insiemi nulli; essendo in $\mathcal{M}$, deduciamo che

$$\mu(A \setminus A') = \mu(A' \setminus A) = 0;$$

dunque

$$\mu(A) = \mu(A \setminus A') + \mu(A \cap A') = \mu(A \cap A') = \mu(A \cap A') + \mu(A' \setminus A) = \mu(A').$$

Allora la definizione di $\overline{\mu}$ è ben posta.

Osservando che l'unione numerabile di insiemi nulli è ancora un insieme nullo, è banale verificare che $\overline{\mu}$ è una misura su $\overline{\mathcal{M}}$ che estende μ. □

1.2 Costruzione di misure

Siano dati un insieme $\mathbb{X}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ e una funzione $\eta : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$. Vogliamo dare condizioni su $\mathcal{S}$ e η per costruire in maniera canonica una σ-algebra $\mathcal{M}$ che contiene $\mathcal{S}$ e una misura μ su $\mathcal{M}$ che estende η. Questo processo è noto come costruzione di Carathéodory.

In questa sezione assumiamo che sia dato un insieme $\mathbb{X}$.

1.2.1 Misure esterne

Definizione 1.2.1 (Misura esterna)**.** Sia $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ una funzione con le seguenti proprietà:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- è numerabilmente subadditiva, cioè se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una qualsiasi collezione numerabile di insiemi in $\mathbb{X}$ e $E \subseteq \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i).$$

Si dice che μ è una misura esterna su $\mathbb{X}$.

Osservazione 1.2.2. Ragionando come in 1.1.13, si mostra che una misura esterna è finitamente subadditiva e che è monotona.

Costruzione di misure esterne

Definizione 1.2.3. Sia $\mathcal{S}$ una qualsiasi collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ tale che $\emptyset \in \mathcal{S}$. Sia $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una qualsiasi funzione d'insieme tale che $\mu(\emptyset) = 0$. Dato $E \subseteq \mathbb{X}$ definiamo

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k) \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k,\ \{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S} \right\},$$

assumendo che $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Teorema 1.2.4. *Nella notazione della definizione 1.2.3, la funzione μ^* è una misura esterna su $\mathbb{X}$. Diremo che μ^* è la misura esterna di Carathéodory associata a μ.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0$. Proviamo che μ^* è numerabilmente subadditiva. Siano E, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ tali che $E \subseteq \bigcup E_n$; dobbiamo mostrare che

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Se esiste n in $\mathbb{N}$ tale che $\mu^*(E_n) = +\infty$, la conclusione è banale. Allora possiamo supporre che $\mu^*(E_n) < +\infty$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste una collezione numerabile $\{E_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tale che

$$E_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_{n,i}$$

e inoltre

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_{n,i}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Osserviamo che la famiglia $\{E_{n,i}\}_{n,i\in\mathbb{N}}$ ricopre E. Per definizione di μ^* vale

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n,i\in\mathbb{N}} \mu(E_{n,i}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) \right) + \varepsilon.$$

Si conclude con l'arbitrarietà di ε. □

Misura e σ-algebra associate ad una misura esterna

Definizione 1.2.5 (Insieme misurabile)**.** Sia μ una misura esterna su $\mathbb{X}$. Diremo che un insieme $A \subseteq \mathbb{X}$ è misurabile se gode della proprietà del buon sezionamento, cioè se per ogni $S \subseteq \mathbb{X}$ vale che

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c).$$

Osservazione 1.2.6. La proprietà del buon sezionamento può essere equivalentemente riformulata dicendo che per ogni $S \subseteq \mathbb{X}$ vale che

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c),$$

dal momento che l'altra disuguaglianza è sempre verificata per la subadditività di μ. Inoltre, se $\mu(E) = 0$, allora E è misurabile; se A è misurabile, allora A^c è misurabile.

Teorema 1.2.7 (Carathéodory)**.** *Sia $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ una misura esterna su $\mathbb{X}$. Sia $\mathcal{M}$ la famiglia degli insiemi che hanno la proprietà del buon sezionamento; $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e $\mu_{|\mathcal{M}}$ è una misura σ-additiva.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che $\emptyset \in \mathcal{M}$ e che $\mathcal{M}$ è stabile per complementazione (vedi 1.2.6). Dobbiamo provare che $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni numerabili.

Step 1: Verifichiamo che $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni finite. Siano $A, B \in \mathcal{M}$ e $S \subseteq \mathbb{X}$; dobbiamo mostrare che

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap (A \cup B)) + \mu(S \cap (A \cup B)^c).$$

Siccome A gode della proprietà del buon sezionamento, vale che

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c);$$

sezionando $S \cap A^c$ con B, troviamo che

$$\begin{aligned}\mu(S \cap A^c) &= \mu((S \cap A^c) \cap B) + \mu((S \cap A^c) \cap B^c) \\ &= \mu((S \cap A^c) \cap B) + \mu(S \cap (A \cup B)^c);\end{aligned}$$

allora deduciamo che

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c) \\ &= \mu(S \cap A) + \mu((S \cap A^c) \cap B) + \mu(S \cap (A \cup B)^c) \\ &\geq \mu(S \cap (A \cup B)) + \mu(S \cap (A \cup B)^c),\end{aligned}$$

perchè μ è subadditiva e $(S \cap A) \cup (S \cap (B \cap A^c)) = S \cap (A \cup B)$. Ragionando in maniera induttiva, si trova che $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni finite.

Step 2: Mostriamo che $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni numerabili. Siano $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia disgiunta in $\mathcal{M}$ e $S \subseteq \mathbb{X}$ un sottoinsieme qualsiasi. Per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\mu(S) = \mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) + \mu\left(S \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i\right).$$

Se sostituiamo S con $S \cap \bigcup_{i=0}^{n+1} A_i$, troviamo che

$$\mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) + \mu(S \cap A_{n+1}).$$

Ragionando in maniera induttiva, si deduce che

$$\mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mu(S \cap A_i).$$

Allora, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \geq \mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mu(S \cap A_i).$$

Passando al sup in n, si deduce che
$$\mu\left(S\cap\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right)\geq\sum_{i=0}^{\infty}\mu(S\cap A_i).$$
Del resto, la disuguaglianza opposta segue dalla subadditività numerabile di μ; pertanto, otteniamo che
$$\mu\left(S\cap\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu(A_i\cap S).$$
Sappiamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\mu(S\cap A_i)+\mu\left(S\setminus\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right)&=\mu\left(S\cap\bigcup_{i=0}^{n}A_i\right)+\mu\left(S\setminus\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right)\\&\leq\mu\left(S\cap\bigcup_{i=0}^{n}A_i\right)+\mu\left(S\setminus\bigcup_{i=0}^{n}A_i\right)\\&=\mu(S);\end{aligned}$$
passando all'estremo superiore in n e utilizzando la formula appena provata, si ottiene che
$$\mu(S)\geq\mu\left(S\cap\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right)+\mu\left(S\setminus\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right).$$
Abbiamo già discusso il fatto che l'altra disuguaglianza è sempre verificata per la numerabile subadditività di μ. Dunque $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni disgiunte numerabili. Osservando che ogni unione numerabile può essere scritta come unione disgiunta (infatti $\mathcal{M}$ è chiusa per complementare), si conclude che $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni numerabili, quindi è una σ-algebra

In conclusione, ricordiamo che abbiamo provato che per ogni $S\subseteq\mathbb{X}$ per ogni famiglia disgiunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}$ vale che
$$\mu\left(S\cap\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(S\cap A_i);$$
scegliendo $S=\mathbb{X}$, si prova che μ è numerabilmente additiva in $\mathcal{M}$. □

Osservazione 1.2.8. Data una misura esterna μ su $\mathbb{X}$, sia $\mathcal{M}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili. $(\mathbb{X};\mathcal{M};\mu_{|\mathcal{M}})$ è uno spazio mensurale completo. Infatti, essendo μ monotona, tutti gli insiemi nulli hanno misura esterna nulla e quindi sono misurabili.

1.2.2 Teorema di estensione di Carathéodory-Hahn

Definizioni

Definizione 1.2.9 (Algebra)**.** Sia $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$; si dice che $\mathcal{S}$ è un'algebra se è non vuota ed è chiusa per le operazioni di unione finita e complementazione.

Osservazione 1.2.10. Dalla definizione 1.2.9 segue che ogni algebra è chiusa per intersezione finita (infatti $A\cap B=(A^c\cup B^c)^c$) e per differenza insiemistica (infatti $A\setminus B=A\cap B^c$). In particolare, ogni algebra contiene l'insieme vuoto (infatti $\emptyset=A\setminus A$) e anche tutto lo spazio $\mathbb{X}$ ($\mathbb{X}=\emptyset^c$).

Definizione 1.2.11 (Anello)**.** Sia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$; si dice che $\mathcal{R}$ è un anello se è non vuoto ed è chiuso per le operazioni di unione finita e di differenza insiemistica.

Osservazione 1.2.12. Dalla definizione 1.2.11 segue che ogni anello contiene l'insieme vuoto (infatti $\emptyset = A \setminus A$) è chiuso per intersezione finita (infatti $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$); inoltre ogni anello che contiene tutto lo spazio $\mathbb{X}$ è un'algebra (infatti è chiuso per complementazione).

Definizione 1.2.13 (Semi-anello)**.** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$; si dice che $\mathcal{S}$ è un semi-anello se è non vuoto, è chiuso per l'operazione di intersezione finita e se A, B sono elementi di $\mathcal{S}$, allora $B \setminus A$ si scrive come unione finita e disgiunta di elementi di $\mathcal{S}$.

Osservazione 1.2.14. Ricordando che $\emptyset = A \setminus A$, è ovvio che ogni semi-anello (vedi 1.2.13) contiene l'insieme vuoto.

Esempio 1.2.15.

- La famiglia
$$\mathcal{S} \coloneqq \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}$$
è un semi-anello.

- La famiglia
$$\mathcal{S} \coloneqq \{I \mid I \text{ è un intervallo limitato di } \mathbb{R}\}$$
è un semi-anello.

- Si verifica facilmente che se $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ sono semi-anelli in $\mathcal{P}(\mathbb{X}_1), \dots, \mathcal{P}(\mathbb{X}_n)$, allora
$$\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n \coloneqq \{I_1 \times \cdots \times I_n \mid I_j \in \mathcal{S}_j\}$$
è un semi-anello in $\mathcal{P}(\mathbb{X}_1 \times \cdots \times \mathbb{X}_n)$.

Proposizione 1.2.16. *Siano $\mathcal{S}$ un semi-anello e $\mathcal{R}$ la famiglia delle unioni finite e disgiunte di elementi di $\mathcal{S}$. Allora $\mathcal{R}$ è un anello.*

Dimostrazione. La verifica è immediata. □

Definizione 1.2.17 (Premisura)**.** Siano $\mathcal{S}$ un semi-anello e $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme con le seguenti proprietà:

- $\mu(\emptyset) = 0$;

- μ è finitamente additiva, cioè se $\{A_1; \dots; A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ è una famiglia disgiunta tale che
$$A \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S},$$
allora vale che
$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i);$$

- μ è numerabilmente subadditiva, cioè se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualsiasi famiglia contenuta in $\mathcal{S}$ tale che
$$A \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S},$$
allora vale che
$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si dice che μ è una premisura.

Osservazione 1.2.18. Siano $\mathcal{S}$ un semi-anello e $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una premisura; allora μ è monotona, cioè se $A, B \in \mathcal{S}$ sono tali che $A \subseteq B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$. Infatti, essendo $\mathcal{S}$ un semi-anello, esiste una famiglia finita e disgiunta di insiemi $\{E_1; \ldots; E_n\} \subseteq \mathcal{S}$ tali che

$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Per la finita additività di μ, abbiamo che

$$\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i);$$

allora $\mu(A) \leq \mu(B)$. Inoltre, essendo $\mu(\emptyset) = 0$, è ovvio che μ è anche finitamente subadditiva.

Proposizione 1.2.19. *Siano $\mathcal{S}$ un semi-anello e $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una funzione numerabilmente additiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$. Allora μ è una premisura.*

Dimostrazione. Essendo $\mu(\emptyset) = 0$ e μ numerabilmente additiva, segue subito l'additività finita. Se $A, B \in \mathcal{S}$ e $A \subseteq B$, essendo $\mathcal{S}$ un semi-anello, $B \setminus A$ è un'unione finita e disgiunta di elementi di $\mathcal{S}$. Utilizzando la finita additività, si trova che $\mu(A) \leq \mu(B)$. Dobbiamo mostrare la numerabile subadditività, ovvero se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ è una famiglia qualsiasi di insiemi tale che

$$A \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S},$$

allora vale che

$$\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Sia $\mathcal{R}$ l'anello delle unioni finite di elementi di $\mathcal{S}$. Poniamo $E_0 \coloneqq A_0$ e per $n \geq 2$ definiamo

$$E_n \coloneqq A_n \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j.$$

Essendo $\mathcal{S}$ un semi-anello, si vede subito che $E_1 \in \mathcal{R}$. D'altra parte possiamo scrivere

$$E_2 = (A_2 \setminus A_1) \setminus A_0$$

dove $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{R}$, per cui anche $E_2 \in \mathcal{R}$. Iterando induttivamente tale ragionamento si conclude che $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{R}$; inoltre $E_n \cap E_m = \emptyset$ se $n \neq m$ e ovviamente vale che

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono degli insiemi $B_1^n, \ldots, B_{k_n}^n \in \mathcal{S}$ tali che

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^n.$$

Osserviamo che la famiglia $\{B_i^n\}_{n\in\mathbb{N},i\in\{1;\dots;k_n\}}$ è formata da insiemi a due a due disgiunti e la sua unione costituisce l'insieme A. Utilizzando la numerabile additività e la monotonia di μ, si trova che

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(B_i^n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

□

Esistenza dell'estensione

Teorema 1.2.20 (Estensione di Carathéodory-Hahn)**.** *Siano $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ un semi-anello, $\mathcal{R}$ l'anello delle unioni finite e disgiunte di $\mathcal{S}$ (vedi 1.2.16), $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una premisura, $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ la misura esterna associata a μ definita in 1.2.3. Allora μ^* è una premisura anche su $\mathcal{R}$, estende μ e $\mathcal{R}$ è contenuto nella classe $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo μ^*. Inoltre, la classe $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e $\mu^*_{|\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ è una misura. Diremo che μ^* è l'estensione di Carathéodory-Hahn associata a μ.*

Dimostrazione. **Step 1**: Sia $E \in \mathcal{S}$. Dalla definizione di μ^* (vedi 1.2.3), vale che $\mu^*(E) \leq \mu(E)$. Del resto, preso un qualsiasi ricoprimento numerabile $\{E_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$ di E, osserviamo che anche $\{E_j \cap E\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento numerabile di E formato da elementi di $\mathcal{S}$. Per la subadditività numerabile e per la monotonia di μ vale che

$$\mu(E) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E \cap E_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j);$$

dalla definizione di μ^* si deduce immediatamente che $\mu(E) \leq \mu^*(E)$. Concludiamo che $\mu(E) = \mu^*(E)$.

Step 2: Mostriamo che μ^* è finitamente additiva su $\mathcal{R}$. Siano $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ insiemi a due a due disgiunti. La disuguaglianza

$$\mu^*(E_1 \cup \dots \cup E_n) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j)$$

segue dalla finita subadditività di μ^*. Mostriamo che vale anche la disuguaglianza opposta. Sia $\{F_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ un ricoprimento di $\bigcup_{j=1}^n E_j$. Essendo $\mathcal{S}$ un semi-anello, si ha che $\{E_j \cap F_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento di E_j formato da elementi di $\mathcal{S}$ per ogni $j \in \{1; \dots; n\}$. Essendo μ una premisura su $\mathcal{S}$ coincidente con μ^* (per monotonia e finita additività di μ), per ogni $l \in \mathbb{N}$ vale che

$$\sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j \cap F_l) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_l) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j \cap F_l\right) \leq \mu(F_l).$$

Otteniamo che

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j) &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{l\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j \cap F_l)\\ &= \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j \cap F_l)\\ &\leq \sum_{l\in\mathbb{N}} \mu(F_l).\end{aligned}$$

Dalla definizione di μ^* (vedi 1.2.3), si deduce che vale la disuguaglianza cercata. Da questo segue immediatamente che μ^* è finitamente additiva su $\mathcal{R}$.

Step 3: Per il teorema 1.2.4, μ^* è una misura esterna, quindi è subadditiva su $\mathcal{P}(\mathbb{X})$. Allora concludiamo che μ^* è una premisura anche su $\mathcal{R}$.

Step 4: Proviamo che gli elementi di $\mathcal{R}$ soddisfano la proprietà del buon sezionamento. Siano $A \in \mathcal{R}$ e E un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{X}$; dobbiamo provare che

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E).$$

Supponiamo che $\mu^*(E) < +\infty$, altrimenti la conclusione è ovvia. Sia $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ un ricoprimento di E. Per le proprietà di $\mathcal{R}$ (vedi 1.2.16), vale che $E_j \cap A \in \mathcal{R}$ e $E_j \cap A^c \in \mathcal{R}$. Per subadditività, si ha che

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j \cap A),$$

$$\mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j \cap A^c).$$

Per la finita additività sugli elementi di $\mathcal{R}$, vale che

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j \cap A) + \mu^*(E_j \cap A^c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(E_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j).$$

Dalla definizione di μ^*, si deduce che

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

□

Osservazione 1.2.21. I teoremi di Carathéodory e di estensione di Carathéodory-Hahn (vedi 1.2.7 e 1.2.20) affermano che esiste una corrispondenza biunivoca tra misure numerabilmente additive e misure esterne. Data una misura esterna $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ possiamo considerare la classe $\mathcal{M}$ degli insiemi che godono della proprietà del buon sezionamento (vedi 1.2.5); per il teorema 1.2.7, $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e $\mu_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ è una misura σ-additiva; viceversa, se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ è una misura σ-additiva definita su una σ-algebra $\mathcal{A}$, la misura esterna $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ associata a μ (vedi 1.2.3) estende μ per il teorema 1.2.20. In questo senso, si può equivalentemente parlare di misure definite su σ-algebre e di misure esterne definite sull'insieme delle parti.

Esempio 1.2.22. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua a destra e monotona non decrescente. Sia

$$\mathcal{S} := \{(a, b] \mid -\infty < a \leq b < +\infty\}.$$

Per ogni $(a, b] \in \mathcal{S}$, poniamo

$$\mu((a, b]) := F(b) - F(a).$$

Si verifica immediatamente che $\mathcal{S}$ è un semi-anello. Utilizzando le proprietà di monotonia e continuità a destra di F, si può verificare facilmente che μ è una premisura su $\mathcal{S}$. Per il teorema di estensione di Carathéodory-Hahn (vedi 1.2.20), $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ è una misura esterna che coincide con μ su $\mathcal{S}$, chiamata misura di Lebesgue-Stieltjes.

Unicità dell'estensione di Carathéodory-Hahn

Definizione 1.2.23 ($\mathcal{S}_\sigma$ e $\mathcal{S}_\delta$)**.** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$; poniamo $\mathcal{S}_\sigma$ l'insieme delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{S}$; poniamo $\mathcal{S}_\delta$ l'insieme delle intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{S}$.

Esempio 1.2.24. Se $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ e $\mathcal{S}$ è la collezione degli intervalli aperti (limitati e illimitati) in $\mathbb{R}$, allora $\mathcal{S}_\sigma$ coincide con la collezione di tutti gli aperti di $\mathbb{R}$ (è facile provare che ogni aperto in $\mathbb{R}$ si scrive come unione numerabile e disgiunta di intervalli aperti) e $\mathcal{S}_{\sigma\delta}$ è la collezione delle intersezioni numerabili di aperti di $\mathbb{R}$.

Lemma 1.2.25. *Siano $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ una famiglia qualsiasi di insiemi, $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una qualsiasi funzione d'insieme tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ la misura esterna associata a μ (vedi 1.2.4); per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{X}$ tale che $\mu^*(E) < +\infty$*

- *esiste $A \in \mathcal{S}_{\sigma\delta}$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$,*
- *esiste $F \in \mathcal{S}_\sigma$ tale che $E \subseteq A \subseteq F$ tale che $\mu^*(F) < +\infty$.*

Dimostrazione. Per il primo enunciato, dalla definizione di μ^* si deduce che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\{F_{j,\varepsilon}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tale che, detto

$$F_\varepsilon \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_{j,\varepsilon},$$

vale $E \subseteq F_\varepsilon$ e

$$\mu^*(F_\varepsilon) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(F_{j,\varepsilon}) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Ovviamente $F_\varepsilon \in \mathcal{S}_\sigma$. Se poniamo

$$A \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{2^{-n}},$$

otteniamo che $A \in \mathcal{S}_{\sigma\delta}$, $E \subseteq A$ e inoltre

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(F_{2^{-n}}) \leq \mu^*(E) + 2^{-n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$; pertanto, segue che $\mu^*(A) \leq \mu^*(E)$. L'altra disuguaglianza segue dal contenimento.

Per quanto riguarda il secondo enunciato, è sufficiente considerare $F \coloneqq F_1$. □

Definizione 1.2.26. Siano $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ una collezione di sottoinsiemi e $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una funzione qualsiasi. Si dice che μ è σ-finita se esiste un ricoprimento numerabile $\{\mathbb{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{X}$ tale che $\mu(\mathbb{X}_k) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.27 (Unicità dell'estensione di Carathéodory-Hahn)**.** *Siano $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ un semi-anello, $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una premisura σ-finita e μ^* l'estensione di Carathéodory-Hahn costruita nel teorema 1.2.20. Detta $\mathcal{M}$ la classe degli insiemi misurabili secondo μ^*, se $\nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ è una misura che estende μ a $\mathcal{M}$, allora ν coincide con μ^* su $\mathcal{M}$.*

Dimostrazione. **Step 1**: Per l'ipotesi di σ-finitezza, se mostriamo che ν e μ^* coincidono sugli insiemi $E \in \mathcal{M}$ tali che $\mu^*(E) < +\infty$, allora coincidono ovunque in $\mathcal{M}$.

Step 2: Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu^*(E) < +\infty$; per il lemma 1.2.25, esiste un insieme $A \in \mathcal{S}_{\sigma\delta}$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$; per l'ipotesi di finitezza, vale che $\mu^*(A \backslash E) = 0$. Dalla definizione di μ^* si deduce che, dato $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tale che

$$A \setminus E \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j, \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(F_j) < \varepsilon.$$

Poiché $\nu(S) = \mu^*(S) = \mu(S)$ per ogni $S \in \mathcal{S}$, otteniamo che

$$\nu(A \setminus E) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(F_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(F_j) \leq \varepsilon;$$

essendo ε arbitrario, si ha che $\nu(A \setminus E) = 0$; dall'additività finita di ν, si deduce che $\nu(A) = \nu(E)$. Pertanto, è sufficiente provare che $\nu(S) = \mu^*(S)$ per ogni $S \in \mathcal{S}_{\sigma\delta}$ tale che $\mu^*(S) < +\infty$.

Step 3: Mostriamo che ν e μ^* coincidono in $\mathcal{S}_\sigma$ (non è necessario limitarsi agli insiemi $S \in \mathcal{S}_\sigma$ tali che $\mu^*(S) < +\infty$). Detto $\mathcal{R}$ l'anello delle unioni finite e disgiunte di elementi di $\mathcal{S}$, è ovvio che μ^* e ν coincidono in $\mathcal{R}$. Sia $F \in \mathcal{S}_\sigma$: esiste una famiglia $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tale che

$$F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j.$$

Poniamo $S_0 \coloneqq F_0$; per ogni $j \geq 1$ poniamo

$$S_j \coloneqq F_j \setminus \bigcup_{l=0}^{j-1} F_l;$$

osserviamo che

$$F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_j$$

e l'unione è disgiunta. Inoltre, essendo $\mathcal{R}$ un anello, vale che $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$. Essendo μ^* e ν numerabilmente additive sugli elementi di $\mathcal{M}$ e coincidenti in $\mathcal{R}$, si ha che

$$\mu^*(F) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(S_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(S_j) = \nu(F).$$

Step 4: Mostriamo, infine, che ν e μ^* coincidono sugli elementi $A \in \mathcal{S}_{\sigma\delta}$ tali che $\mu^*(A) < +\infty$. Sia $A \in \mathcal{S}_{\sigma\delta}$ tale che $\mu^*(A) < +\infty$; per definizione, esiste una famiglia $\{G_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_\sigma$ tale che

$$A = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_j.$$

Per il lemma 1.2.25, esiste un insieme $F \in \mathcal{S}_\sigma$ tale che $A \subseteq F$ e $\mu^*(F) < +\infty$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ poniamo

$$T_j \coloneqq F \cap \bigcap_{l=0}^{j} G_l.$$

Essendo $\mathcal{S}$ un semi-anello, la famiglia $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è contenuta in $\mathcal{S}_\sigma$ e decresce ad A. Per la continuità della misure μ^* e ν (infatti $\nu(T_0) = \mu^*(T_0) < +\infty$), si ha che

$$\mu^*(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu^*(T_j) = \lim_{n\to+\infty} \nu(T_j) = \nu(A).$$

□

1.3 La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.3.1. Sia $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$; introduciamo l'insieme dei rettangoli limitati

$$\mathcal{S} \coloneqq \{I_1 \times \cdots \times I_n \mid I_i \subseteq \mathbb{R} \text{ è un intervallo limitato}\}.$$

Definiamo

$$v_1(\emptyset) \coloneqq 0;$$

per ogni intervallo non vuoto limitato $I \subseteq \mathbb{R}$ (non importa se aperto o chiuso) definiamo

$$v_1(I) \coloneqq \sup I - \inf I.$$

Dato $I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathcal{S}$, definiamo

$$v_n(I_1 \times \cdots \times I_n) \coloneqq \prod_{i=1}^{n} v_1(I_i).$$

Osservazione 1.3.2. Osserviamo che $\emptyset \in \mathcal{S}$ e $v_n(\emptyset) = 0$; allora $v_n : \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ è una funzione d'insieme che rispetta le ipotesi del teorema di Carathéodory (vedi 1.2.7).

Definizione 1.3.3. Denotiamo con $m_n \coloneqq v_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ la misura esterna associata a v_n.

Osservazione 1.3.4. Per il teorema di Carathéodory (vedi 1.2.7 e 1.2.4), la collezione degli insiemi che godono della proprietà del buon sezionamento è una σ-algebra che denotiamo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ (detta σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue), $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $m_n : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ è una misura (detta misura di Lebesgue n-dimensionale). Inoltre, è facile mostrare che $\mathcal{S}$ è un semi-anello e v_n è una premisura su $\mathcal{S}$; allora, per il teorema di estensione di Carathéodory-Hahn (vedi 1.2.20), la restrizione di m_n a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è una misura che estende la funzione d'insieme v_n.

Proposizione 1.3.5. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualsiasi, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Poniamo $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che*

$$\Lambda(x_1; \ldots; x_n) \coloneqq (\lambda_1 x_i; \ldots; \lambda_n x_n).$$

Allora vale che

$$m_n(A + x) = m_n(A),\ m_n(\Lambda A) = \left(\prod_{i=1^n} |\lambda_i|\right) m_n(A).$$

Dimostrazione. Dalla definizione di v_n (vedi 1.3.1) segue immediatamente che le due relazioni sono verificate se A è un rettangolo limitato.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme qualsiasi e $x \in \mathbb{R}^n$. Osserviamo che $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di rettangoli limitati che copre A se e solo se $\{R_k + x\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di rettangoli limitati che copre $A + x$. Per definizione, vale che

$$\begin{aligned} m_n(A) &= \inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} v_n(R_k) \;\middle|\; \{R_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S},\ A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} v_n(R_k + x) \;\middle|\; \{R_k + x\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S},\ A + x \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k \right\} \\ &= m_n(A + x). \end{aligned}$$

La seconda relazione può essere estesa a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ in maniera totalmente analoga. $\square$

Osservazione 1.3.6. Dalla definizione di misura di Lebesgue n-dimensionale (vedi 1.3.3) si deduce facilmente che se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme qualsiasi limitato, allora $m_n(A) < +\infty$.

Teorema 1.3.7 (Vitali, 1905). *Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tale che $m_n(E) > 0$. Esiste $V \subseteq E$ tale che $V \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere che

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \cap \mathcal{B}(0; j).$$

Per subadditività numerabile vale che

$$0 < m_n(E) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m_n(E \cap \mathcal{B}(0; j));$$

dunque esiste $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m_n(E \cap \mathcal{B}(0; j_0)) > 0$. Osserviamo che ogni palla aperta appartiene alla σ-algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$: infatti ogni aperto si può scrivere come unione numerabile di rettangoli (notiamo che i rettangoli formano una base per la topologia euclidea in $\mathbb{R}^n$), che sono elementi di $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Dunque $E \cap \mathcal{B}(0; j_0) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. In altri termini, possiamo assumere che E sia limitato.

Introduciamo in E la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

L'insieme quoziente $E_{/\sim}$ formato dalle classi di equivalenza costituisce una partizione di E. Per l'assioma di scelta esiste una funzione $j : E_{/\sim} \to E$ tale che $j(C) \in C$ per ogni $C \in E_{/\sim}$. Definiamo $\mathcal{V} \coloneqq J(E_{/\sim})$ l'insieme di Vitali (è costruito scegliendo un elemento da ogni classe di equivalenza). Vogliamo mostrare che $\mathcal{V}$ non appartiene a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Numeriamo l'insieme $\mathbb{Q}^n = \{q_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ e poniamo $\mathcal{V}_k \coloneqq \mathcal{V} + q_k$. Gli insiemi $\{\mathcal{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono a due a due disgiunti per costruzione. Se $x \in E$, esiste $C \in E_{/\sim}$ tale che $x \in C$; allora esiste $q_k \in \mathbb{Q}^n$ tale che $x - j(C) = q_k \in \mathbb{Q}^n \cap (E - E)$. Essendo E limitato in norma da M, vale che $|q_k| \leq 2M$. Dunque, otteniamo che

$$E \subseteq \bigcup_{|q_k| < 2M} \mathcal{V} + q_k \subseteq E + \mathcal{B}(0; 2M).$$

Deduciamo che

$$0 < m_n(E) \leq m_n\left(\bigcup_{|q_k| \leq 2M} \mathcal{V} + q_k\right) \leq m_n(E + \mathcal{B}(0; 2M)) < +\infty,$$

perchè ogni insieme limitato in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ha misura finita. Dalla proposizione 1.3.5 segue che $m_n(\mathcal{V}) = m_n(\mathcal{V}_k)$; inoltre, si deduce facilmente che, se $\mathcal{V}$ è misurabile, allora $\mathcal{V}_k$ è misurabile e per ogni $k \in \mathbb{N}$. In tal caso, si ottiene che

$$m_n\left(\bigcup_{|q_k| \leq 2M} \mathcal{V} + q_k\right) = \sum_{|q_k| \leq 2M} m_n(\mathcal{V} + q_k) = \sum_{|q_k| \leq 2M} m_n(\mathcal{V}).$$

Allora otteniamo che

$$0 < \sum_{|q_k| \leq 2M} m_n(\mathcal{V}) < +\infty.$$

Tuttavia, se $m_n(\mathcal{V}) = 0$, allora la somma è nulla; se $m_n(\mathcal{V}) > 0$, allora la somma è $+\infty$. In ogni caso, si ottiene un assurdo. $\square$

Osservazione 1.3.8. La costruzione dell'insieme di Vitali ha grande importanza dal punto di vista storico; infatti si fonda sull'assioma di scelta e risale agli anni in cui si discuteva sull'accettabilità di tale assioma. Attualmente, la comunità matematica accetta quasi all'unanimità l'assioma di scelta, dunque non facciamo fatica ad accettare la dimostrazione del teorema 8.1.4; tuttavia, al tempo della sua formulazione, questo risultato destò grande stupore.

Capitolo 2

Teoria dell'integrazione astratta

2.1 Funzioni misurabili

2.1.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 2.1.1 (Funzione misurabile)**.** Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M}), (\mathbb{Y}, \mathcal{M}')$ spazi misurabili e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una funzione; si dice che f è misurabile se per ogni $A \in \mathcal{M}'$ vale che $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. Se $E \subseteq \mathcal{M}$ e $f : E \to \mathbb{Y}$, si dice che è una funzione misurabile se lo è rispetto alla σ-algebra $\mathcal{M}_E$.

Osservazione 2.1.2. Dalla definizione 2.1.1 segue immediatamente che la composizione di funzioni misurabili è ancora una funzione misurabile.

Osservazione 2.1.3. Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale completo, $E' \in \mathcal{M}$, E un sottoinsieme di $\mathbb{X}$, $Z \in \mathcal{M}$ un insieme nullo tali che $E' = E \setminus Z$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{M}')$ uno spazio misurabile e $f : E' \to \mathbb{Y}$ una funzione misurabile. Possiamo scrivere $E = E' \cup (Z \cap E)$; essendo Z un insieme nullo, anche $Z \cap E$ è un insieme nullo: dalla completezza dello spazio, deduciamo che E appartiene ad M. Sia $\tilde{f} : E \to \mathbb{Y}$ una qualsiasi estensione di f; allora $\tilde{f}$ è misurabile. Infatti, per ogni $A \in \mathcal{M}'$ vale che

$$\tilde{f}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cup \left(\tilde{f}^{-1}(A) \cap (E \cap Z)\right).$$

Essendo lo spazio completo, deduciamo che $\tilde{f}^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. Allora, se $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio mensurale completo, ha senso parlare di funzioni definite quasi ovunque.

Definizione 2.1.4 (σ-algebra generata)**.** Siano $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{S}$ una qualsiasi collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ poniamo

$$\sigma(\mathcal{S}) := \bigcap \{F \mid F \text{ è una } \sigma\text{-algebra}, \quad \mathcal{S} \subseteq F\}.$$

Si dice che $\sigma(\mathcal{S})$ è la σ-algebra generata da $\mathcal{S}$.

Osservazione 2.1.5. Nel contesto della definizione 2.1.4, l'intersezione che definisce $\sigma(\mathcal{S})$ è non vuota, perchè $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{S}$; essendo l'intersezione arbitraria di σ-algebre una σ-algebra (come si verifica immediatamente), $\sigma(\mathcal{S})$ è la più piccola σ-algebra (rispetto all'inclusione) che contiene $\mathcal{S}$.

Esempio 2.1.6. Siano $\mathbb{X}$ un insieme e $A \subseteq \mathbb{X}$ un sottoinsieme qualsiasi. La σ-algebra generata da $\{A\}$ è tale che

$$\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \mathbb{X}\}.$$

Definizione 2.1.7 (Boreliani)**.** Sia $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio topologico; denotiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{X}) := \sigma(\mathcal{T})$ la σ-algebra generata dalla topologia. $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ è detta σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{X}$.

Definizione 2.1.8. Siano $(\mathbb{X},\mathcal{M})$ uno spazio misurabile, $(\mathbb{Y};\mathcal{T})$ uno spazio topologico e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una funzione; diremo che f è misurabile (vedi 2.1.1) se lo è rispetto alla σ-algebra dei boreliani in $\mathbb{Y}$.

Osservazione 2.1.9. Nel contesto della definizione 2.1.8, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ è misurabile se e solo se per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{Y}$ vale che $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. Infatti, definendo

$$\mathcal{M}' := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}) \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\},$$

è immediato notare che $\mathcal{M}'$ è una σ-algebra che contiene gli aperti per ipotesi. Per la minimalità di $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, deduciamo che $\mathcal{M}'$ contiene i boreliani.

Osservazione 2.1.10. Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T}),(\mathbb{Y};\mathcal{T}')$ spazi topologici e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una funzione continua. Se dotiamo $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ delle σ-algebre dei boreliani generate dalle rispettive topologie, è immediato notare che f è una funzione misurabile nel senso della definizione 2.1.8.

Osservazione 2.1.11. Siano $(\mathbb{X},\mathcal{M})$ uno spazio misurabile, $(\mathbb{Y};\mathcal{T})$ uno spazio topologico e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una funzione misurabile. Se $(Z;\mathcal{T}')$ è uno spazio topologico e $g : \mathbb{Y} \to Z$ è boreliana, allora $g \circ f : \mathbb{X} \to Z$ è misurabile.

Funzioni misurabili a valori reali

Definizione 2.1.12. Siano $(\mathbb{X},\mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che f è misurabile se, detto

$$\overline{\mathcal{T}} := \mathcal{T}(\mathbb{R}) \cup \{[-\infty, a) \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{(a, +\infty] \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\},$$

per ogni $A \in \sigma(\overline{\mathcal{T}})$ vale che $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.

Osservazione 2.1.13. Si verifica facilmente che la collezione $\overline{\mathcal{T}}$ è una topologia su $\overline{\mathbb{R}}$; dunque, la definizione 2.1.12 rientra nella definizione 2.1.8. Per quanto provato in 2.1.9, f è misurabile se e solo se per ogni $A \in \overline{\mathcal{T}}$ vale che $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.

Definizione 2.1.14 (Funzione boreliana)**.** Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio topologico e $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$; si dice boreliana se è misurabile rispetto alla σ-algebra dei boreliani.

Proposizione 2.1.15. *Siano* $(\mathbb{X},\mathcal{M})$ *uno spazio misurabile e* $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione. Sono fatti equivalenti:*

1. f *è misurabile;*
2. $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{M}$ *per ogni* a *in* $\mathbb{R}$*;*
3. $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{M}$ *per ogni* a *in* $\mathbb{R}$*;*
4. $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{M}$ *per ogni* a *in* $\mathbb{R}$*;*
5. $f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}$ *per ogni* a *in* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Ovviamente la misurabilità implica tutte le altre condizioni. Per mostrare che la prima implica la seconda, è sufficiente osservare che

$$f^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, a + 2^{-n})).$$

Analogamente, si mostra che la quarta condizione implica la quinta. Per passaggio al complementare, si verifica banalmente che la terza condizione implica la quarta e che la quinta condizione implica la seconda. Rimane da provare che la seconda condizione implica la prima. Se vale la seconda condizione, allora valgono la terza, la quarta e la quinta; in particolare per ogni intervallo I in $\mathbb{R}$ si deduce che $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$. Essendo ogni aperto A in $\mathbb{R}$ unione numerabile di intervalli, si conclude che $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$. Infine, è ovvio che $f^{-1}([-\infty, a) \in \mathcal{M}$ e $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{M}$. □

2.1.2 Funzioni semplici

Definizione 2.1.16 (Funzione semplice)**.** Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Si dice che f è una funzione semplice se assume un numero finito di valori; in tal caso, esistono finiti insiemi misurabili disgiunti e finiti coefficienti in $\overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x).$$

Osservazione 2.1.17. Dalla definizione 2.1.16, è ovvio che se $f, g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ sono funzioni semplici tali che

$$f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}(\{+\infty\}) = \emptyset$$

e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g$ è puntualmente ben definita (nell'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$) ed è una funzione semplice.

Teorema 2.1.18. *Siano* $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ *uno spazio misurabile,* $E \in \mathcal{M}$ *e* $f : E \to [0, +\infty]$ *una funzione misurabile. Poniamo*

$$A_1 := \{x \in E \mid f(x) \geq 1\};$$

per ogni $k > 1$ *definiamo ricorsivamente*

$$A_k := \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \mathbb{1}_{A_j}(x) \right\}.$$

Gli insiemi $\{A_k\}_{k\geq 1}$ *sono misurabili e per ogni* x *in* E *vale che*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x).$$

Dimostrazione. Ragionando in maniera ricorsiva, è ovvio che gli insiemi $\{A_k\}_{k\geq 1}$ sono misurabili.

Siano x in E e $n \geq 1$; proviamo che

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x).$$

Se $x \notin \bigcup_{k=1}^n A_k$, la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo che $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$; sia $n(x)$ in $\{1;\dots;n\}$ tale che $x \in A_{n(x)}$ e $x \notin A_k$ se $k \in \{n(x)+1;\dots;n\}$. Poichè $x \in A_{n(x)}$, deduciamo che

$$f(x) \geq \frac{1}{n(x)} + \sum_{k=1}^{n(x)-1} \frac{1}{k}\mathbb{1}_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{n(x)} \frac{1}{k}\mathbb{1}_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\mathbb{1}_{A_k}(x),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di $n(x)$.

Passando all'estremo superiore in n, concludiamo che

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\mathbb{1}_{A_k}(x).$$

Dobbiamo provare che

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\mathbb{1}_{A_k}(x).$$

Se $f(x) = +\infty$, allora $x \in A_k$ per ogni $k \geq 1$; dunque

$$f(x) = +\infty = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}.$$

Supponiamo che $f(x) < +\infty$; allora per ogni $n \geq 1$ vale che $x \notin \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ (per quanto mostrato in precedenza). Si deduce che esiste una sottosuccessione $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ strettamente crescente tale che $x \notin A_{k_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per definizione, vale che

$$f(x) < \frac{1}{k_n} + \sum_{j=1}^{k_n-1} \frac{1}{j}\mathbb{1}_{A_j}(x).$$

Dal passo precedente, deduciamo che

$$0 \leq f(x) - \sum_{j=1}^{k_n-1} \frac{1}{j}\mathbb{1}_{A_j}(x) < \frac{1}{k_n}.$$

Prendendo il limite per n che tende a $+\infty$, si ottiene che

$$0 \leq f(x) - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\mathbb{1}_{A_j}(x) \leq 0.$$

$\square$

2.1.3 Operazioni tra funzioni misurabili

Proposizione 2.1.19. *Siano $(X;\mathcal{M})$ uno spazio misurabile, $E \in \mathcal{M}$ e $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni misurabili per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che*

$$\max_{1\leq k\leq n} f_k, \ \min_{1\leq k\leq n} f_k$$

sono funzioni misurabili. Inoltre

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \ \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \ \liminf_{k\to+\infty} f_k, \ \limsup_{k\to+\infty} f_k$$

sono funzioni misurabili.

Dimostrazione. Poniamo
$$\Phi = \max_{1 \le k \le n} f_k;$$
osserviamo che per ogni t in $\mathbb{R}$ vale che
$$\{x \in \mathbb{E} \mid \Phi(x) < t\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in E \mid f_k(x) < t\},$$
che è un elemento di $\mathcal{M}$ perchè intersezione di elementi di $\mathcal{M}$; allora Φ è misurabile per quanto provato in 2.1.15. Analogamente, si prova che il minimo di un numero finito di funzioni misurabili è misurabile.

Poniamo
$$G = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k.$$
Per ogni t in $\mathbb{R}$ vale che
$$\{x \in E \mid G(x) \le t\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in E \mid f_k(x) \le t\},$$
che è in $\mathcal{M}$ perchè intersezione numerabile di insiemi in $\mathcal{M}$; analogamente si prova che
$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$$
è una funzione misurabile. Infine, ricordiamo che
$$\limsup_{k \to +\infty} f_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \ge k} f_k \right), \ \liminf_{k \to +\infty} f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \ge k} f_k \right);$$
dunque, sono funzioni misurabili. □

Definizione 2.1.20. Dato uno spazio misurabile $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ e una funzione misurabile $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, poniamo
$$f^+ := \max\{0; f\}, \ f^- := \max\{0; -f\}.$$

Osservazione 2.1.21. Se $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ è uno spazio misurabile e $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile, f^+ ed f^- sono funzioni misurabili (vedi 2.1.19); inoltre $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni x in $\mathbb{X}$ e la differenza è sempre ben definita (nell'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$). Vale anche che $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ per ogni x in $\mathbb{X}$.

Proposizione 2.1.22. *Se $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ è uno spazio misurabile, $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \cdot f$ è ben definita ed è misurabile.*

Dimostrazione. La buona definizione segue dal fatto che operiamo con l'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$.

Scriviamo la decomposizione di $f = f^+ - f^-$ (vedi 2.1.20). Per il teorema di approssimazione con funzioni semplici (vedi 2.1.18), esistono successioni di funzioni semplici $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in $[0, +\infty)$ tali che
$$\lim_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = f^+(x), \ \lim_{k \to +\infty} \psi_k(x) = f^-(x).$$
Allora $\{\lambda \cdot \varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici che converge puntualmente a λf^+; analogamente $\{\lambda \cdot \psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici che converge puntualmente a $\lambda \cdot f^-$. A meno di moltiplicare per $\mathbb{1}_{\{f \ge 0\}}$ e per $\mathbb{1}_{\{f \le 0\}}$, possiamo supporre che $\varphi_k(x) = 0$ nell'insieme $\{f \le 0\}$ e $\psi_k(x) = 0$ nell'insieme $\{f \ge 0\}$. Allora, la successione $\{\lambda\varphi_k - \lambda\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è ben definita ed è formata da funzioni semplici che convergono a $\lambda f^+ - \lambda f^-$; dunque, $\lambda f^+ - \lambda f^-$ è una funzione misurabile e, per la proprietà distributiva, coincide con $\lambda(f^+ - f^-)$, cioè con λf. □

Proposizione 2.1.23. *Siano* $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ *uno spazio misurabile,* $f, g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *funzioni misurabili tali che* $f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(-\infty) = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(+\infty) = \emptyset$. *Allora la somma* $f + g$ *è ben definita ed è misurabile.*

Dimostrazione. Per le ipotesi su f, g la somma $f + g$ è puntualmente ben definita nell'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$.

Siano $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successioni di funzioni semplici che convergono rispettivamente a f^+ e g^+; siano $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successioni di funzioni semplici che convergono rispettivamente a f^- e g^-. Allora $\{(\varphi_k + \psi_k) - (\alpha_k + \beta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici che converge puntualmente a $(f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$; questo basta a provare che $f + g$ è misurabile. □

2.2 Integrazione di funzioni misurabili

In questa sezione, supporremo che siano assegnati uno spazio mensurale $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ e un sottoinsieme $E \in \mathcal{M}$.

2.2.1 Integrale di funzioni non negative

Definizione 2.2.1 (Integrale di funzioni semplici)**.** Sia $f : E \to [0, +\infty)$ una funzione semplice. Supponiamo che

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i \mathbb{1}_{E_i}(x),$$

dove $\{E_1; \dots; E_n\}$ è una partizione misurabile di E e i coefficienti $\{e_1; \dots; e_n\}$ sono in $[0, +\infty)$. Definiamo la somma di f su E come

$$\S_E(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} e_i \mu(E_i).$$

Osservazione 2.2.2. La definizione 2.2.1 è ben posta, cioè non dipende dalla rappresentazione scelta per f. Supponiamo che

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbb{1}_{F_j}(x),$$

dove $\{F_1; \dots; F_m\}$ è una partizione misurabile di E e $\{\lambda_1; \dots; \lambda_m\}$ sono coefficienti in $[0, +\infty)$. Osserviamo che se $E_j \cap F_i \neq \emptyset$, allora $e_j = \lambda_i$. Otteniamo che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} e_i \mu(E_i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e_i \mu(E_i \cap F_j)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda_j \mu(E_i \cap F_j)\\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu(F_j)\end{aligned}$$

Definizione 2.2.3 (Integrale di funzioni non negative)**.** Sia $f : E \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Definiamo

$$\int_E f \, d\mu := \sup \left\{ \S_E(\varphi) \;\middle|\; \varphi \text{ è semplice, } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Proposizione 2.2.4. *Sia $f : E \to [0, +\infty)$ una funzione semplice. Allora vale che*

$$\S_E(\varphi) = \int_E \varphi \, d\mu.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di integrale, segue banalmente che

$$\S_E(\varphi) \leq \int_E \varphi \, d\mu.$$

Sian $\psi : E \to [0, +\infty)$ una funzione semplice tale che $\psi(x) \leq \varphi(x)$. Vogliamo provare che

$$\S_E(\psi) \leq \S_E(\varphi).$$

Per fissare la notazione, supponiamo che

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} e_i \mathbb{1}_{E_i}, \;\; \psi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbb{1}_{F_j},$$

assumendo che $\{E_1; \dots; E_n\}$, $\{F_1; \dots; F_m\}$ siano partizioni misurabili di E e i coefficienti $\{e_1; \dots; e_n\}$, $\{\lambda_1; \dots; \lambda_m\}$ siano in $[0, +\infty)$. Osserviamo che se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$, allora $\lambda_j \leq e_i$. Segue che

$$\begin{aligned}
\S_E(\psi) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu(F_j) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \mu(E_i \cap F_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} e_i \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \mu(E_i) \\
&= \S_E(\varphi).
\end{aligned}$$

La tesi segue passando all'estremo superiore sulle funzioni semplici non negative e puntualmente minori di φ. □

Osservazione 2.2.5. Sia $f : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Per le definizioni date, vale ovviamente che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} f \mathbb{1}_E \, d\mu &= \sup\{\S_{\mathbb{X}}(\varphi) \mid \varphi : \mathbb{X} \to [0, +\infty) \text{ è semplice, } 0 \leq \varphi \leq f \mathbb{1}_E \; \forall x \in \mathbb{X}\} \\
&= \sup\{\S_E(\varphi) \mid \varphi : E \to [0, +\infty) \text{ è semplice, } 0 \leq \varphi \leq f \; \forall x \in E\} \\
&= \int_E f_{|E} \, d\mu.
\end{aligned}$$

Inoltre, per quanto provato in 2.2.4, vale che

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_E \, d\mu.$$

Dalla definizione 2.2.3, segue che se $f, g : E \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili tali che $f \leq g$, allora vale che

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

Inoltre, se $\lambda > 0$, si ha chiaramente che

$$\int_E \lambda f \, d\mu = \lambda \int_E f \, d\mu;$$

infatti la relazione vale per funzioni semplici e passa facilmente all'estremo superiore nella definizione 2.2.3.

Proposizione 2.2.6. *Sia $f : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile tale che*

$$\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu = 0.$$

Allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e supponiamo che l'insieme $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) > \varepsilon\}$ abbia misura positiva ($A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ perchè f è misurabile). Allora vale che

$$0 = \int_{\mathbb{X}} f \, d\mu \geq \int_{\mathbb{X}} \varepsilon \mathbb{1}_{A_\varepsilon} \, d\mu = \varepsilon \mu(A_\varepsilon) > 0,$$

che è assurdo. Osserviamo che

$$\{x \in \mathbb{X} \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{2^{-n}},$$

dunque ha misura nulla perchè è unione numerabile di insiemi di misura nulla. □

Proposizione 2.2.7. *Sia $f : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile tale che*

$$\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu < +\infty.$$

Allora $f(x) < +\infty$ per quasi ogni x in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Supponiamo che l'insieme $A \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) = +\infty\}$ abbia misura positiva ($A \in \mathcal{M}$ perchè f è misurabile). Per ogni n in $\mathbb{N}$ osserviamo che vale

$$+\infty > \int_{\mathbb{X}} f \, d\mu \geq \int_{\mathbb{X}} n \mathbb{1}_A = n\mu(A),$$

che è chiaramente assurdo. □

Teoremi di passaggio al limite

Teorema 2.2.8 (Beppo Levi, convergenza monotona)**.** *Sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili tra* E *e* $[0,+\infty]$ *tale che* $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *per ogni* $x \in E$*. Allora vale che*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_E f_n \, d\mu \right) = \int_E \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \right) \, d\mu.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Poniamo

$$f \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : E \to [0,+\infty];$$

abbiamo già mostrato che f è misurabile. Del resto, $f_n \le f$ per ogni n in $\mathbb{N}$, dunque

$$\int_E f_n \, d\mu \le \int_E f \, d\mu;$$

passando all'estremo superiore in n si trova che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_E f_n \, d\mu \right) \le \int_E f \, d\mu.$$

Osserviamo che se

$$\int_E f \, d\mu = 0,$$

allora la conclusione è immediata.

Step 2: Supponiamo che

$$\int_E f \, d\mu \in (0,+\infty].$$

Sia $\psi : E \to [0,+\infty)$ una funzione semplice tale che $\psi \le f$. Per fissare la notazione poniamo

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbb{1}_{F_j}(x);$$

assumiamo che gli insiemi $\{F_1,\dots,F_n\}$ siano disgiunti e appartengano a $\mathcal{M}_E$ e i coefficienti $l_1,\dots,l_n \in [0,+\infty)$. Denotiamo $J \coloneqq \{j \in \{1;\dots;n\} \mid l_j > 0\}$; notiamo che $J \neq \emptyset$ perchè $\int_E f \, d\mu > 0$. Fissiamo $\alpha \in (0,1)$; poniamo

$$F_{j,n} \coloneqq \{x \in F_j \mid f_n(x) \ge \alpha l_j\};$$

introduciamo le funzioni semplici

$$\psi_n(x) \coloneqq \sum_{j\in J} \alpha l_j \mathbb{1}_{F_{j,n}}(x).$$

Osserviamo che se $x \in F_{j,n}$, allora $\psi_n(x) = \alpha l_j \le f_n(x)$. Dunque, $\psi_n(x) \le f_n(x)$ per ogni $x \in E$. Per monotonia della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ osserviamo che $\{F_{j,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi e vale

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{j,n} = F_j;$$

infatti, per ogni x in F_j vale che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \geq l_j > \alpha l_j,$$

dunque vale che $x \in F_{j,n}$ definitivamente in $\mathbb{N}$. Questo mostra che

$$F_j \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{j,n};$$

l'altra inclusione è ovvia. Per continuità della misura, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(F_{j,n}) = F_j.$$

Segue che

$$\int_E f_n \, d\mu \geq \int_E \psi_n \, d\mu = \S_E(\psi_n) = \sum_{j\in J} \alpha l_j \mu(F_{j,n}).$$

Prendendo il limite in n, si trova che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu \geq \alpha \sum_{j\in J} l_j \mu(F_j) = \alpha \S_E(\psi).$$

Passando al limite per α che tende a 1, si trova che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu \geq \S_E(\psi).$$

La conclusione segue passando all'estremo superiore sulle funzioni semplici non negative e puntualmente minori o uguali rispetto a f. □

Lemma 2.2.9 (Fatou)**.** *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili tra E e $[0, +\infty]$. Allora vale che*

$$\int_E \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n \right) \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. Osserviamo che se fissiamo $n \in \mathbb{N}$, per ogni $k \geq n$ vale che

$$\int_E \inf_{h\geq n} f_h \, d\mu \leq \int_E f_k \, d\mu;$$

da ciò segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_E \inf_{h\geq n} f_h \, d\mu \leq \inf_{h\geq n} \int_E f_h \, d\mu.$$

Se applichiamo il teorema di Beppo Levi alla successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$g_n \coloneqq \inf_{k\geq n} f_k,$$

deduciamo che

$$\begin{aligned}
\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu &= \int_E \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \int_E f_k \, d\mu \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu.
\end{aligned}$$

□

Esempio 2.2.10. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ la funzione misurabile

$$f_n := \mathbb{1}_{[n,n+1]}.$$

Dalla definizione di misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ (vedi 1.3.3), deduciamo che

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} \ dx < \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \ dx = 1;$$

in particolare, la disuguaglianza nel lemma di Fatou (vedi 2.2.9) può essere stretta.

Corollario 2.2.11 (Linearità dell'integrale 1)**.**
Siano $f, g : E \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili. Allora

$$\int_E (f + g) \ d\mu = \int_E f \ d\mu + \int_E g \ d\mu.$$

Se $\lambda > 0$, allora

$$\int_E \lambda f \ d\mu = \lambda \int_E f \ d\mu.$$

Dimostrazione. Abbiamo provato che esistono successioni $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici non negative monotone in n che convergono rispettivamente a f e g (vedi 2.1.18). Osserviamo che se $\varphi, \psi : E \to [0, +\infty)$ sono funzioni semplici tali che

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j \mathbb{1}_{E_j}(x), \ \psi(x) = \sum_{i=1}^{m} l_i \mathbb{1}_{F_i}(x),$$

allora abbiamo che

$$\varphi(x) + \psi(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (e_j + l_i) \mathbb{1}_{E_j \cap F_i}(x).$$

Allora

$$\begin{aligned}
\S_E(\varphi + \psi) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (e_j + l_i)\mu(E_j \cap F_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} e_j \mu(E_j \cap F_i) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} l_i \mu(E_j \cap F_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \mu(E_j) + \sum_{i=1}^{m} l_i \mu(F_i) \\
&= \S_E(\varphi) + \S_E(\psi).
\end{aligned}$$

Deduciamo che per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che che

$$\int_E (\varphi_k + \psi_k) \ d\mu = \S_E(\varphi_k + \psi_k) = \S_E(\varphi_k) + \S_E(\psi_k) = \int_E \varphi_k \ d\mu + \int_E \psi_k \ d\mu.$$

Passando al limite in k, si ottiene la tesi come conseguenza del teorema di Beppo Levi.

Il secondo enunciato può essere verificato in maniera totalmente analoga. □

Osservazione 2.2.12. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di funzioni misurabili tra E e $[0,+\infty]$. Supponiamo che esista un insieme $E' \in \mathcal{M}_E$ tale che per ogni x in E' per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ e che $\mu(E \setminus E') = 0$. Sia $f : E \to [0,+\infty]$ tale che

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Allora vale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \; d\mu = \int_E f \; d\mu.$$

Infatti, se poniamo $\tilde{f}_n := f_n \mathbb{1}_{\mathbb{E}'}$ e $\tilde{f} := f\mathbb{1}_{E'}$, otteniamo che

$$\tilde{f}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}_n(x)$$

per ogni x in E; inoltre $\tilde{f}_n(x) \leq \tilde{f}_{n+1}(x)$ per ogni $x \in E$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il teorema di Beppo Levi, si ha che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E \tilde{f}_n \; d\mu = \int_E \tilde{f} \; d\mu.$$

Per concludere, basta osservare che se due funzioni misurabili non negative $g, h : E \to [0,+\infty]$ differiscono su un insieme di misura nulla, allora hanno lo stesso integrale. Per la linearità dell'integrale, vale che

$$\begin{aligned}\int_E h \; d\mu &= \int_{E'} h \; d\mu + \int_{E\setminus E'} h \; d\mu = \int_{E'} h \; d\mu \\ &= \int_{E'} g \; d\mu = \int_{E'} g \; d\mu + \int_{E\setminus E'} g \; d\mu = \int_E g \; d\mu.\end{aligned}$$

Infatti, dalla definizione di integrale, si trova che se $\mu(E \setminus E') = 0$ vale

$$\int_{E\setminus E'} h \; d\mu = 0.$$

2.2.2 Integrale di funzioni di segno qualsiasi

Definizione 2.2.13 (Integrale di funzioni a segno qualsiasi)**.** Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Supponiamo che

$$\min\left\{\int_E f^+ \; d\mu; \int_E f^- \; d\mu\right\} < +\infty.$$

Allora possiamo ben definire

$$\int_E f \; d\mu := \int_E f^+ \; d\mu - \int_E f^- \; d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Se vale che

$$\max\left\{\int_E f^+ \; d\mu; \int_E f^- \; d\mu\right\} < +\infty,$$

diciamo che la funzione f è integrabile e il suo integrale è finito.

Proposizione 2.2.14 (Linearità dell'integrale 2). *Supponiamo che $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ siano funzioni integrabili; siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $\alpha f + \beta g$ opportunamente ridefinita su un insieme di misura nulla è integrabile e vale*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\ d\mu = \alpha \int_E f\ d\mu + \beta \int_E g\ d\mu.$$

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto l'omogeneità. Se $\alpha = 0$ la conclusione è ovvia. Supponiamo $\alpha > 0$; allora

$$\begin{aligned}
\int_E \alpha f\ d\mu &= \int_E (\alpha f)^+\ d\mu - \int_E (\alpha f)^-\ d\mu \\
&= \int_E \alpha f^+\ d\mu - \int_E \alpha f^-\ d\mu \\
&= \alpha \left(\int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu \right) \\
&= \alpha \int_E f\ d\mu.
\end{aligned}$$

Se $\alpha < 0$ si invertono la parte positiva e quella negativa.

Verifichiamo l'additività. Poniamo

$$S \coloneqq \{x \in E \mid f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x \in E \mid f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}.$$

L'insieme S è misurabile e, essendo f, g integrabili, vale che $\mu(S) = 0$. Se definiamo $\tilde{f} \coloneqq f \mathbb{1}_S$ e $\tilde{g} \coloneqq g \mathbb{1}_S$, si ha che $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono ancora funzioni misurabili e vale

$$\int_E \tilde{f}\ d\mu = \int_E f\ d\mu, \quad \int_E \tilde{g}\ d\mu = \int_E g\ d\mu.$$

Osserviamo che per ogni x in E la funzione $\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)$ è puntualmente ben definita e coincide quasi ovunque con la funzione $f + g$. Sostituendo $\tilde{f}$ con f e $\tilde{g}$ con g, otteniamo che

$$\int_E |f + g|\ d\mu \leq \int_E |f|\ d\mu + \int_E |g|\ d\mu < +\infty.$$

Osserviamo che

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Dunque, vale che

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Integrando, otteniamo che

$$\int_E \left[(f + g)^+ + f^- + g^- \right]\ d\mu = \int_E \left[(f + g)^- + f^+ g^+ \right]\ d\mu.$$

Utilizzando la linearità dell'integrale di funzioni a termini positivi, si deduce che

$$\int_E (f + g)^+\ d\mu + \int_E f^-\ d\mu + \int_E g^-\ d\mu = \int_E (f + g)^-\ d\mu + \int_E f^+\ d\mu + \int_E g^+\ d\mu;$$

riordinando i termini (che sono tutti finiti), si ha la tesi. $\square$

Osservazione 2.2.15. Ragionando come nella proposizione 2.2.14, operando con l'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$, è facile mostrare che se $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione integrabile e $g : E \to [0, +\infty]$ è una qualsiasi funzione misurabile, allora

$$\int_E (f + g)\ d\mu$$

è ben definito in $(-\infty, +\infty]$ e vale che

$$\int_E (f + g)\ d\mu = \int_e f\ d\mu + \int_E g\ d\mu.$$

Osservazione 2.2.16. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Allora

$$\left| \int_E f\ d\mu \right| \leq \int_E |f|\ d\mu.$$

Infatti, si ha che

$$\int_E f\ d\mu = \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu \leq \int_E f^+\ d\mu + \int_E f^-\ d\mu = \int_E |f|\ d\mu.$$

Analogamente, si ha che

$$\int_E -f\ d\mu \leq \int_E |f|\ d\mu.$$

Per linearità, vale che

$$\int_E -f\ d\mu = -\int_E f\ d\mu.$$

Allora, otteniamo che

$$-\int_E f\ d\mu \leq \int_E |f|\ d\mu.$$

Questo è sufficiente a concludere.

Osservazione 2.2.17. Supponiamo che $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione integrabile; allora l'insieme $A \coloneqq \{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$ è σ-finito. Infatti, se definiamo per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$E_k \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid 2^k \leq f(x) < 2^{k+1}\},$$

$$F_k \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid -2^{k+1} \leq f(x) < -2^{-k}\},$$

$$E \coloneqq f^{-1}(+\infty),\ F \coloneqq f^{-1}(-\infty),$$

troviamo che

$$A = E \cup F \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_k,$$

tutti gli insiemi sono in $\mathcal{M}$ perchè f è misurabile e ciascuno ha misura finita perchè f è integrabile.

Proposizione 2.2.18. *Siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni integrabili. Sono fatti equivalenti:*

1. *per ogni F in $\mathcal{M}_E$ vale che*

$$\int_F f\ d\mu = \int_F g\ d\mu;$$

2. $\displaystyle\int_E |f-g| \; d\mu = 0$;

3. $f(x) = g(x)$ *per quasi ogni* $x \in E$.

Dimostrazione. Le implicazioni $3 \Rightarrow 1$ e $3 \Rightarrow 2$ sono ovvie. Abbiamo già provato che se una funzione non negativa ha integrale nullo, allora è quasi certamente nulla; allora segue l'implicazione $2 \Rightarrow 3$. Mostriamo che $1 \Rightarrow 3$. Sia

$$P^+ \coloneqq \{x \in E \mid f(x) - g(x) > 0\}.$$

Supponiamo che $\mu(P^+) > 0$. Come provato in 2.2.6, si ha che

$$\int_{P^+} (f-g) \; d\mu > 0;$$

essendo tutti gli integrali finiti, deduciamo che

$$\int_{P^+} f \; d\mu > \int_{P^+} g \; d\mu,$$

contro l'ipotesi. In maniera del tutto analoga, si mostra che

$$P^- \coloneqq \{x \in E \mid f(x) - g(x) < 0\}$$

ha misura nulla. □

Teoremi di passaggio al limite

Proposizione 2.2.19. *Siano* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili tra* E *e* $\overline{\mathbb{R}}$ *e* $g : E \to [0,+\infty]$ *una funzione misurabile tale che* $|f_k(x)| \leq g(x)$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *per ogni* $x \in E$ *e inoltre*

$$\int_E g \; d\mu < +\infty.$$

Allora vale che

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_E f_k \; d\mu \leq \int_E \left(\limsup_{k\to+\infty} f_k\right) \; d\mu.$$

Dimostrazione. A meno di modificare $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e g in un insieme di misura nulla, possiamo supporre che g sia a valori in $[0,+\infty)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo ben definire la funzione $F_k \coloneqq g - f_k$. Osserviamo che $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili non negative. Per il lemma di Fatou (vedi 2.2.9), otteniamo che

$$\int_E \left(\liminf_{k\to+\infty} F_k\right) \; d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_E F_k \; d\mu,$$

ovvero

$$\int_E \left(g - \liminf_{k\to+\infty} f_k\right) \; d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_E g - f_k \; d\mu,$$

Utilizzando la linearità dell'integrale (tutti gli integrali sono finiti), si ottiene la disuguaglianza cercata. □

Teorema 2.2.20 (Lebesgue, convergenza dominata)**.** *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili tra E ed $\overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

per ogni x in E ed esiste una funzione $g : E \to [0,+\infty)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in E$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\int_E g \; d\mu < +\infty.$$

Si dice che g è una dominazione per $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Allora f è integrabile e vale

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \; d\mu = 0.$$

Dimostrazione. A meno di modificare la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in un insieme di misura nulla, possiamo assumere che f_n sia a valori reali per ogni $n \in \mathbb{N}$. Nelle nostre ipotesi, vale ovviamente che $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni x in E; dunque, f è integrabile. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$F_n = 2g - |f - f_n|.$$

$F_n(x)$ è ben definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in E$ ed è una successione di funzioni misurabili non negative. Possiamo applicare il lemma di Fatou e otteniamo che

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} F_n \; d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E F_n \; d\mu.$$

Per ipotesi, vale che

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} F_n \; d\mu = 2\int_E g \; d\mu.$$

Inoltre, per linearità si ha che

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} \int_E F_n \; d\mu &= 2\int_E g \; d\mu + \liminf_{n\to+\infty} \left(-\int_E |f_n - f| \; d\mu \right) \\ &= 2\int_E g \; d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \; d\mu.\end{aligned}$$

Riordinando i termini (sono tutti finiti) nella disuguaglianza data dal lemma di Fatou, si trova che

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \; d\mu \leq 0,$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Teorema 2.2.21 (Continuità dell'integrale)**.** *Siano $(\Lambda; d)$ uno spazio metrico e $f : \Lambda \times \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione con le seguenti proprietà:*

- *$f(\lambda; \cdot) : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile per ogni $\lambda \in \Lambda$;*
- *$|f(\lambda; p)| \leq \rho(p)$ per ogni $(\lambda; p) \in \Lambda \times E$, dove $\rho : E \to [0,+\infty]$ è una funzione integrabile;*
- *per ogni $(\lambda_0; p) \in \Lambda \times E$ vale che*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(\lambda; p) = h(p).$$

Allora $h : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile e vale che

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_E f(\lambda; p)\ d\mu = \int_E h\ d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ una successione in Λ che tende a λ_0. Allora, h è misurabile perchè limite puntuale di funzioni misurabili. Inoltre, per il teorema di convergenza dominata (con dominazione ρ), si ha che

$$\lim_{k \to +\infty} \int_E f(\lambda_k; p)\ d\mu = \int_E h\ d\mu.$$

Dall'arbitrarietà della successione $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ segue la tesi. □

Teorema 2.2.22 (Derivazione sotto il segno di integrale)**.**
Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

- *$f(x; \cdot) : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile per ogni $x \in \Omega$;*
- *per ogni $(x; p) \in \Omega \times E$ è ben definita la derivata parziale*
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x; p);$$
- *esiste una funzione $g : E \to [0, +\infty]$ integrabile tale che per ogni $(x; p) \in \Omega \times E$ vale*
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x; p) \right| \leq g(p).$$

Per ogni $x \in \Omega$ poniamo

$$F(x) \coloneqq \int_E f(x; p)\ d\mu.$$

Allora per ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x_j}(x; p)\ d\mu.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per le ipotesi su f la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è ben definita; inoltre anche $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x; \cdot) : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile, essendo limite puntuale di funzioni misurabili (i rapporti incrementali). Sia $x \in \Omega$ fissato; dato $h \neq 0$ per ogni p in E esiste $c_p(h)$ tale che $|c_p(h)| \leq |h|$ con la proprietà che

$$\frac{f(x + he_j; p) - f(x; p)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + c_p(h)e_j; p),$$

per il teorema di Lagrange. Deduciamo che per ogni h per ogni $p \in E$ vale che

$$\left| \frac{f(x + he_j; p) - f(x; p)}{h} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + c_p(h)e_j; p) \right| \leq g(p).$$

Fissiamo una successione infinitesima $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Allora vale che

$$\begin{aligned} \int_E \frac{\partial f}{\partial x_j}(x; p)\ d\mu &= \lim_{k \to +\infty} \int_E \frac{f(x + h_k e_j; p) - f(x; p)}{h_k}\ d\mu \\ &= \lim_{k \to +\infty} \frac{F(x + h_k e_j) - F(x)}{h_k} \end{aligned}$$

avendo utilizzato il teorema di convergenza dominata (con dominazione data da g) e la linearità dell'integrale (infatti $f(x;\cdot)$ è integrabile). Dall'arbitrarietà della successione, deduciamo che esiste la derivata parziale rispetto a j di F in x e vale

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+he_j)-F(x)}{h}.$$

$\square$

2.3 Un altro approccio per la costruzione dell'integrale

Presentiamo un altro approccio per l'integrazione di funzioni non negative, delle quali non richiediamo la misurabilità. Questa costruzione ricorda quella di Riemann per la definizione dell'integrale di funzioni limitate su intervalli limitati della retta reale.

In questa sezione supponiamo che sia assegnato uno spazio mensurale $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ e che sia dato un insieme $E \in \mathcal{M}$.

2.3.1 Funzioni δ-integrabili

Definizione 2.3.1 (δ-integrabilità)**.** Sia $f : E \to [0,+\infty]$ una funzione qualsiasi. Sia $\mathcal{P} = \{E_k\}$ una partizione di E formata da una quantità al più numerabile di insiemi in $\mathcal{M}$. Si definiscono

$$S(f,\mathcal{P}) \coloneqq \sum_k \mu(E_k) \sup_{E_k} f, \;\; s(f,\mathcal{P}) \coloneqq \sum_k \mu(E_k) \inf_{E_k} f$$

rispettivamente la somma superiore e inferiore di f relativamente alla partizione $\mathcal{P}$. Definiamo

$$\int_E^* f\ d\mu \coloneqq \inf_{\mathcal{P}} S(f,\mathcal{P}), \;\; \int_{*E} f\ d\mu \coloneqq \sup_{\mathcal{P}} s(f,\mathcal{P})$$

rispettivamente l'integrale superiore e l'integrale inferiore di f in E. Diremo che f è δ-integrabile se

$$\int_E^* f\ d\mu = \int_{*E} f\ d\mu.$$

Definizione 2.3.2. Siano date due partizioni $\mathcal{P} = \{E_k\}$, $\mathcal{Q} = \{F_j\}$ al più numerabili formate da elementi di $\mathcal{M}$. Definiamo il raffinamento di $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ovvero la partizione

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \coloneqq \{E_k \cap F_j\}.$$

Osservazione 2.3.3. Nel contesto della definizione 2.3.1, osserviamo che

$$\int_E^* f\ d\mu \geq \int_{*E} f\ d\mu.$$

Infatti, date due partizioni $\mathcal{P} = \{E_k\}$, $\mathcal{Q} = \{F_j\}$ al più numerabili formate da elementi di $\mathcal{M}$, consideriamo il raffinamento $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ (vedi 2.3.2); allora vale che

$$\begin{aligned}
S(f, \mathcal{P}) &= \sum_k \mu(E_k) \sup_{E_k} f \\
&= \sum_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) \sup_{E_k} f \\
&\geq \sum_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) \sup_{E_k \cap F_j} f \\
&\geq \sum_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) \inf_{E_k \cap F_j} f \\
&\geq \sum_j \sum_k \mu(E_k \cap F_j) \inf_{F_j} f \\
&= \sum_j \mu(F_j) \inf_{F_j} f \\
&= s(f, \mathcal{Q})
\end{aligned}$$

Osservazione 2.3.4. Nel contesto della definizione 2.3.1, è immediato provare che se $f : E \to [0, +\infty]$ è una funzione misurabile, allora vale che

$$\int_{*E} f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu \leq \int_E^* f \, d\mu.$$

Proposizione 2.3.5. *Sia $f : E \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Allora f è δ-integrabile e valgono le uguaglianze*

$$\int_{*E} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \int_E^* f \, d\mu.$$

Dimostrazione. Costruiamo delle partizioni modellate sulla funzione f. Sia $\lambda > 1$; per ogni $k \in \mathbb{Z}$ poniamo

$$E_k^\lambda := \{x \in E \mid \lambda^k \leq f(x) < \lambda^{k+1}\};$$

siano $F := f^{-1}(0)$, $G := f^{-1}(+\infty)$. Poniamo $\mathcal{P}^\lambda := \{E_k^\lambda\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{F\} \cup \{G\}$: è una partizione di E formata da elementi in $\mathcal{M}$ (perchè f è misurabile). Osserviamo che

$$\begin{aligned}
S(f, \mathcal{P}^\lambda) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(E_k^\lambda) \sup_{E_k^\lambda} f + \mu(G) \cdot (+\infty) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(E_k^\lambda) \lambda^{k+1} + \mu(G) \cdot (+\infty) \\
&= \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(E_k^\lambda) \lambda^k + \mu(G) \cdot (+\infty) \\
&\leq \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(E_k^\lambda) \inf_{E_k^\lambda} f + \mu(G) \cdot (+\infty) \\
&= \lambda s(f; \mathcal{P}^\lambda).
\end{aligned}$$

Allora deduciamo che per ogni $\lambda > 1$ vale che

$$\int_E^* f \, d\mu \leq \lambda \int_{*E} f \, d\mu.$$

Prendendo il limite per λ che tende a 1^+, si ottiene la tesi. Infine, per quanto osservato in 2.3.4, è facile concludere che

$$\int_{*E} f\ d\mu = \int_E f\ d\mu = \int_E^* f\ d\mu.$$

□

Proposizione 2.3.6. *Supponiamo che lo spazio misurabile* $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *sia completo. Sia* $f : E \to [0, +\infty]$ *una funzione* δ*-integrabile tale che*

$$\int_E^* f\ d\mu = \int_{*E} f\ d\mu < +\infty.$$

Allora f *è misurabile; inoltre valgono le uguaglianze*

$$\int_{*E} f\ d\mu = \int_E f\ d\mu = \int_E^* f\ d\mu.$$

Dimostrazione. Per definizione di integrale superiore esiste una successione di partizioni $\{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ al più numerabili e formate da elementi di $\mathcal{M}$ tali che

$$\int_E^* f\ d\mu = \lim_{k\to+\infty} S(f, \mathcal{P}_k).$$

Date due partizioni, $\mathcal{P} = \{E_j\}, \mathcal{P}' = \{F_i\}$, consideriamo il raffinamento $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' := \{E_j \cap F_i\}$. Vale ovviamente che

$$S(f, \mathcal{P} \cap \mathcal{P}') \leq \min\{S(f, \mathcal{P}); S(f, \mathcal{P}')\}.$$

Allora, a meno di sostituire $\mathcal{P}_k$ con il raffinamento (vedi 2.3.2) $\mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_k$, si può assumere che $\mathcal{P}_{k+1}$ sia una partizione più fine di $\mathcal{P}_k$ e che valga

$$\lim_{k\to+\infty} S(f; \mathcal{P}_k) = \inf_{k\in\mathbb{N}} S(f, \mathcal{P}_k) = \int_E^* f\ d\mu.$$

Se definiamo per ogni k in $\mathbb{N}$

$$\varphi_k = \sum_{F\in\mathcal{P}_k} \left(\sup_F\right) f \mathbb{1}_F,$$

otteniamo che $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili. Per il teorema di Beppo Levi, vale che

$$S(f; \mathcal{P}_k) = \int_E \varphi_k\ d\mu.$$

Avendo scelto $\mathcal{P}_{k+1}$ più fine di $\mathcal{P}_k$, si trova che $\varphi_k(x) \geq \varphi_{k+1}(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in E$. Per monotonia, esiste una funzione misurabile $\overline{f}$ che è limite puntuale della successione $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ovviamente vale che $\overline{f}(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in E$. Per il teorema di convergenza dominata, vale che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_E \varphi_k\ d\mu = \int_E \overline{f}\ d\mu;$$

infatti $0 \leq \varphi_k(x) \leq \varphi_0(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in E$ e possiamo assumere che

$$\int_E \varphi_0 \, d\mu < +\infty,$$

essendo

$$\int_E^* f \, d\mu < +\infty.$$

Deduciamo che

$$\int_E \overline{f} \, d\mu = \int_E^* f \, d\mu.$$

Procedendo in maniera totalmente analoga e manipolando le partizioni inferiori, si trova una successione di funzioni misurabili $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ puntualmente crescente e minore o uguale a f tale che, detto $\underline{f}$ il limite puntuale della successione $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, allora vale che $\underline{f}(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$, la funzione $\underline{f}$ è misurabile e vale che

$$\int_E \underline{f} \, d\mu = \int_{*E} f \, d\mu.$$

Abbiamo ottenuto che $\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x)$ per ogni $x \in E$, $\underline{f}$ e $\overline{f}$ sono funzioni misurabili e vale che

$$\int_E \overline{f} \, d\mu = \int_E \underline{f} \, d\mu < +\infty.$$

Essendo gli integrali finiti, possiamo fare la differenza e deduciamo che

$$\int_E (\overline{f} - \underline{f}) \, d\mu = 0;$$

segue che $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ per quasi ogni $x \in E$. Allora $f(x) = \overline{f}(x)$ per quasi ogni $x \in E$; per completezza dello spazio, deduciamo che f è misurabile. $\square$

2.3.2 Integrale di Riemann e di Lebesgue a confronto

Sia data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata; sia $\mathcal{P}$ una partizione di $[a, b]$. Denotiamo $\mathcal{P}$ come

$$a = t_0 < t_1 \cdots < t_n < t_{n+1} = b.$$

Poniamo

$$S(f; \mathcal{P}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n+1} |t_i - t_{i-1}| \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f, \quad s(f; \mathcal{P}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n+1} |t_i - t_{i-1}| \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f.$$

Osservazione 2.3.7. Osserviamo che se $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ sono due partizioni di $[a, b]$ tali che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, allora vale che

$$s(f; \mathcal{P}_1) \leq s(f; \mathcal{P}_2) \leq S(f; \mathcal{P}_2) \leq S(f; \mathcal{P}_1).$$

Teorema 2.3.8. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile secondo Riemann. Allora f è misurabile, integrabile secondo Lebesgue (nello spazio $([a, b]; \mathcal{M}(\mathbb{R})_{[a,b]}; m_1)$) e l'integrale di Riemann coincide con quello di Lebesgue.*

Dimostrazione. Dalla Riemann-integrabilità di f segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono delle partizioni $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{Q}_n$ di $[a,b]$ tali che

$$0 \leq S(f;\mathcal{P}_n) - s(f;\mathcal{Q}_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Per quanto osservato in 2.3.7, possiamo fare le seguenti assunzioni

- $\mathcal{P}_n = \mathcal{Q}_n$ (altrimenti rimpiazziamo entrambe con $\mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}_n$);
- $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$ (altrimenti rimpiazziamo $\mathcal{P}_{n+1}$ con $\bigcup_{i \leq n+1} \mathcal{P}_i$).

Per fissare la notazione, supponiamo che $\mathcal{P}_n$ sia tale che

$$a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n < t_{m_n+1}^n = b.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo le funzioni

$$g_n \coloneqq \sum_{j=1}^{m_n+1} \left(\sup_{[t_{i-1}^n, t_i^n]} f \right) \mathbf{1}_{[t_{i-1}^n, t_i^n]}, \quad h_n \coloneqq \sum_{j=1}^{m_n+1} \left(\inf_{[t_{i-1}^n, t_i^n]} f \right) \mathbf{1}_{[t_{i-1}^n, t_i^n]}.$$

Essendo $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$, osserviamo che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni decrescente e $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni crescente. Detti $\overline{f}$ il limite puntuale della successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\underline{f}$ il limite puntuale delle successione $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è ovvio che per ogni $x \in [a,b]$ vale che

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x).$$

Inoltre $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni di funzioni misurabili; pertanto anche $\underline{f}$ e $\overline{f}$ sono funzioni misurabili. Per la scelta della partizione $\mathcal{P}_n$ e per il teorema di Beppo Levi vale che

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} s(f;\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} h_n(x)\ dx = \int_{[a,b]} \underline{f}(x)\ dx.$$

Per il teorema di convergenza dominata (infatti $\sup_{[a,b]} f$ è una dominazione integrabile in $[a,b]$ per la successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) vale che

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} S(f;\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} g_n(x)\ dx = \int_{[a,b]} \overline{f}(x)\ dx.$$

Dunque, abbiamo che

$$\int_{[a,b]} \underline{f}\ dx = \int_{[a,b]} \overline{f}\ dx < \infty.$$

Deduciamo che $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$ per quasi ogni $x \in [a,b]$; allora segue che $f(x) = \underline{f}(x)$ per quasi ogni $x \in [a,b]$. Essendo $([a,b];\mathcal{M}([a,b]);m_1)$ uno spazio mensurale completo, troviamo che f è una funzione misurabile e che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int_{[a,b]} f\ dx = \int_{[a,b]} \underline{f}\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

$\square$

Proposizione 2.3.9. *Sia $[a,b)$ un intervallo in $\mathbb{R}$, con $b \in (a,+\infty]$. Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ tale che f è limitata e Riemann-integrabile in $[a,c]$ per ogni $c \in (a,b)$. Allora vale che*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c |f(t)| \ dt < +\infty$$

se e solo se f è integrabile secondo Lebesgue in $[a,b)$ e vale

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(t) \ dt = \int_{[a,b)} f \ dt.$$

In tal caso diremo che f è integrabile secondo Riemann in $[a,b)$ in senso generalizzato.

Dimostrazione. Innanzitutto, precisiamo che dall'ipotesi di Riemann-integrabilità in ogni sotto-intervallo $[a,c]$ segue che $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ è misurabile. Infatti se poniamo $f_n := f \mathbb{1}_{[a,b-2^{-n}]} : [a,b) \to \mathbb{R}$, per il teorema 2.3.8, vale che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili che tende puntualmente a f. Applicando il teorema 2.3.8 e il teorema di Beppo Levi, deduciamo che

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c |f(t)| \ dt = \lim_{c \to b^-} \int_{[a,c]} |f| \ dt = \int_{[a,b)} |f| \ dt.$$

Dunque, tale limite è finito se e solo se f è integrabile secondo Lebesgue in $[a,b)$. In tal caso, per il teorema 2.3.8 e per il teorema di convergenza dominata vale che

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(t) \ dt = \lim_{c \to b^-} \int_{[a,c]} f \ dt = \int_{[a,b)} f \ dt.$$

□

Esempio 2.3.10. La funzione $f(t) := \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann $[1,c]$ per ogni $c > 1$ ed è tale che esiste ed è finito

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c f(t) \ dt.$$

Tuttavia, non è integrabile secondo Lebesgue in $[1,+\infty)$.

Esempio 2.3.11. Utilizzando il teorema di convergenza dominata e il teorema 2.3.8, è immediato dimostrare il seguente enunciato. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni Riemann-integrabili in $[a,b]$ con le seguenti proprietà:

- esiste una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente ad f per ogni $x \in [a,b]$;
- esiste una funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo anche che f sia Riemann-integrabile. Allora vale che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t) \ dt = \int_a^b f(t) \ dt.$$

Confrontando questo enunciato con quello del teorema di convergenza dominata (vedi 2.2.20), si nota immediatamente la sua debolezza: infatti, in questo caso bisogna assumere che il limite puntuale della successione sia Riemann-integrabile. Del resto, è facile mostrare che la funzione $f := \mathbb{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ è integrabile nel senso di Lebesgue (e il suo integrale vale 0) ma non è integrabile nel senso di Riemann (perchè l'estremo superiore delle somme inferiori è 0 e l'estremo inferiore delle somme superiori è 1); inoltre, numerando i razionali in $[0,1]$ è facile costruire una successione di funzioni Riemann-integrabili che converge puntualmente a f. Questo è uno dei punti deboli della teoria dell'integrazione secondo Riemann ed è un valido motivo per sviluppare una teoria dell'integrazione più robusta e generale (quella presentata in questo capitolo).

Caratterizzazione delle funzioni Riemann-integrabili

Definizione 2.3.12 (Oscillazione)**.** Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definiamo oscillazione di f su $[a,b]$ come

$$\operatorname*{osc}_{[a,b]}(f) := \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$

Definizione 2.3.13 (Insieme di discontinuità)**.** Sia data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sia $D(f) \subseteq [a,b]$ l'insieme dei punti di discontinuità di f. Per ogni $n \geq 1$ poniamo

$$D^n(f) = \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; \operatorname*{osc}_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\cap[a,b]}(f) \geq \frac{1}{n} \ \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

Osservazione 2.3.14. Nel contesto della definizione 2.3.13, se $x_0 \in [a,b]$, è immediato verificare che f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{osc}_{[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\cap[a,b]}(f) = 0.$$

Segue banalmente che

$$D(f) = \bigcup_{n\geq 1} D^n(f).$$

Teorema 2.3.15 (Vitali-Lebesgue)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata; f è Riemann integrabile se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla.*

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che f sia Riemann-integrabile in $[a,b]$; dobbiamo provare che $m_1(D(f)) = 0$. Basta dimostrare che $m_1(D^n(f)) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Essendo f Riemann-integrabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ tale che

$$a = x_0^\varepsilon < x_1^\varepsilon < \cdots < x_n^\varepsilon < x_{n+1}^\varepsilon = b$$

e vale

$$\varepsilon \geq S(f;\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f;\mathcal{P}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\operatorname*{osc}_{[x_{i-1}^\varepsilon,x_i^\varepsilon]}(f) \right) (x_i^\varepsilon - x_{i-1}^\varepsilon).$$

Fissiamo $n \geq 1$; consideriamo l'insieme

$$J := \{ j \mid [x_{j-1}^\varepsilon, x_j^\varepsilon] \cap D^n(f) \neq \emptyset \}.$$

Si ha

$$\frac{1}{n} \sum_{j\in J} (x_j^\varepsilon - x_{j-1}^\varepsilon) < \varepsilon$$

da cui segue che

$$\sum_{j\in J}(x_j^\varepsilon - x_{j-1}^\varepsilon) < \varepsilon n.$$

Essendo ε arbitrario e n fissato, si deduce che $m_1(D^n(f)) = 0$.

Step 2: Supponiamo che $m_1(D(f)) = 0$; dobbiamo provare che f è Riemann-integrabile in $[a,b]$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; per costruzione (vedi 1.3.3) esiste una famiglia al più numerabile di intervalli aperti $\{I_j\}_{j\in J}$ contenuti in $[a,b]$ che copre $D(f)$ ed è tale che

$$\sum_{j\in J} m_1(I_j) \leq \varepsilon.$$

Sia $x \notin D(f)$; per definizione 2.3.13, esiste un intervallo $I_x \subseteq [a,b]$ tale che $x \in I_x$ e

$$\operatorname*{osc}_{I_x}(f) < \varepsilon.$$

Abbiamo mostrato che

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j \cup \bigcup_{x\notin D(f)} I_x.$$

Per compattezza, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito di $[a,b]$, cioè troviamo che

$$[a,b] \subseteq I_{j_1} \cup \cdots \cup I_{j_k} \cup I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_i}$$

per certi $j_1,\ldots,j_k \in J$ e $x_1,\ldots,x_i \notin D(f)$. A patto di rimpiazzare due intervalli A, B con $A\cap B, A\setminus B$ e $B\setminus A$, possiamo supporre che l'unione che compare a destra sia formata da intervalli disgiunti. Abbiamo ottenuto una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ tale che

$$\begin{aligned}
S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) &= \sum_{l=1}^{k} m_1(I_{j_l})\operatorname*{osc}_{I_{j_l}}(f) + \sum_{l=1}^{i} m_1(I_{x_l})\operatorname*{osc}_{I_{x_l}}(f)\\
&\leq \sum_{l=1}^{k} m_1(I_{j_l}) 2\sup_{[a,b]}(f) + \sum_{l=1}^{i} m_1(l_{x_i})\varepsilon\\
&\leq 2\sup_{[a,b]}(f)\sum_{j\in J} m_1(I_j) + \varepsilon m_1([a,b])\\
&\leq 2\sup_{[a,b]}(f)\varepsilon + \varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Questo è sufficiente a concludere che f è Riemann-integrabile in $[a,b]$. □

2.4 Appendice: integrale di funzioni a valori vettoriali

Il caso di $\mathbb{R}^n$

Abbiamo introdotto una topologia $\overline{\mathcal{T}}$ su $\overline{\mathbb{R}}$ (vedi 2.1.13). Consideriamo lo spazio $(\overline{\mathbb{R}})^n$ dotato della topologia prodotto $\overline{\mathcal{T}}^n$ e sia $\mathcal{B}((\overline{\mathbb{R}})^n)$ la σ-algebra dei boreliani generata da $\overline{\mathcal{T}}^n$.

Siano dati uno spazio mensurale $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ ed una funzione $f : \mathbb{X} \to (\overline{\mathbb{R}})^n$ misurabile (rispetto alla σ-algebra dei boreliani di $(\overline{\mathbb{R}})^n$). Per fissare la notazione, supponiamo che

$$f = (f_1; \ldots; f_n),$$

con $f_i : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile (la proiezione sulla i-esima coordinata π_i è un'applicazione continua da $(\overline{\mathbb{R}})^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$, pertanto $\pi_i \circ f = f_i$ è un'applicazione misurabile nel senso della definizione 2.1.12).

Notiamo che $|f| : E \to [0, +\infty]$ è un'applicazione misurabile. Supponiamo che

$$\int_{\mathbb{X}} |f| \ d\mu < +\infty;$$

in particolare per ogni $i \in \{1; \ldots ; n\}$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} |f_i| \ d\mu < +\infty.$$

Allora, a meno di modificare f su un insieme di misura nulla, possiamo assumere che $|f(x)| < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Possiamo anche ben definire

$$\int_{\mathbb{X}} f \ d\mu := \left(\int_{\mathbb{X}} f_1 \ d\mu; \ldots ; \int_{\mathbb{X}} f_n \ d\mu \right).$$

Segue immediatamente che l'integrale di funzioni a valori vettoriali gode della proprietà di linearità enunciata per l'integrale di funzioni a valori scalari (vedi 2.2.14). In particolare, se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è un'applicazione lineare vale che $L \circ f$ è misurabile e inoltre

$$\int_{\mathbb{X}} L \circ f \ d\mu = L \left(\int_{\mathbb{X}} f \ d\mu \right).$$

Ricordiamo che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$|y| = \sup_{|v|=1} < y, v > .$$

Allora, fissato un vettore unitario $v \in \mathbb{R}^n$, vale che

$$< v, \int_{\mathbb{X}} f \ d\mu >= \int_{\mathbb{X}} < v, f > \ d\mu \leq \int_{\mathbb{X}} |f| \ d\mu.$$

Passando all'estremo superiore sui vettori unitari v, si trova che

$$\left| \int_{\mathbb{X}} f \ d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{X}} |f| \ d\mu.$$

Precisiamo anche che è possibile riformulare opportunamente i teoremi di passaggio al limite (vedi 2.2.8, 2.2.9, 2.2.20) in questo contesto.

Il caso di uno spazio di Banach di dimensione finita

Se E è uno spazio di Banach di dimensione finita e $f : \mathbb{X} \to E$ è una funzione misurabile possiamo analogamente definire il suo integrale rispetto alla misura μ in coordinate. Fissiamo una base $\mathcal{B} := \{e_1; \ldots ; e_n\}$ di E. Sia $[\cdot]_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{R}^n$ l'isomorfismo lineare del passaggio in coordinate. Si osserva facilmente che $[f]_{\mathcal{B}} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n$ è misurabile. Inoltre, se vale che

$$\int_{\mathbb{X}} |f| \ d\mu < +\infty,$$

allora vale anche che
$$\int_{\mathbb{X}} |[f]_{\mathcal{B}}| < +\infty.$$
In tal caso, possiamo definire
$$\int_{\mathbb{X}} f \ d\mu := \left[\int_{\mathbb{X}} [f]_{\mathcal{B}} \ d\mu \right]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$
Dalla linearità dell'integrale delle funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ segue che la definizione data è ben posta, cioè non dipende dalla base scelta. Inoltre l'integrale di funzioni a valori in E gode delle proprietà di linearità enunciate in 2.2.14. Quindi, se F è uno spazio di Banach di dimensione finita, $L : E \to F$ è un'applicazione lineare, allora $L \circ f$ è misurabile e vale che
$$\int_{\mathbb{X}} L \circ f \ d\mu = L \left(\int_{\mathbb{X}} f \ d\mu \right).$$
Ricordiamo che, detto E' lo spazio duale di E, per ogni $y \in E$ vale che
$$\|y\| = \sup_{\|L\|_{E'}=1} L(y).$$
Fissata un'applicazione $L : E \to \mathbb{R}$ lineare (e continua) di norma operatoriale unitaria, vale che
$$L \left(\int_E f \ d\mu \right) = \int_E L \circ f \ d\mu \leq \int_E \|f\| \ d\mu.$$
Passando all'estremo superiore su sui funzionali lineari e 1-lipschitziani si trova che
$$\left\| \int_E f \ d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \ d\mu.$$

Concludiamo precisando che anche in questo contesto è possibile riformulare i teoremi di passaggio al limite.

Capitolo 3

Spazi L^p

In questo capitolo supponiamo che sia assegnato uno spazio mensurale $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$.

3.1 Definizione

Definizione 3.1.1 (Norma L^p)**.** Sia $p \in [1, +\infty)$. Data una funzione misurabile $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, poniamo

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \coloneqq \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definizione 3.1.2 (Sup e inf essenziale)**.** Data una funzione misurabile $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, definiamo

$$\text{ess sup}\,(f) \coloneqq \inf\{M \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq M \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{X}\};$$
$$\text{ess inf}\,(f) \coloneqq \sup\{M \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \geq M \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{X}\}.$$

Poniamo

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \coloneqq \text{ess sup}\,(|f|)\,.$$

Osservazione 3.1.3. Gli estremi inferiore e superiore nella definizione 3.1.2 sono raggiunti, cioè sono un minimo e un massimo rispettivamente. Sia $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $[0, +\infty]$ che decresce in maniera monotona a ess sup (f). Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{X} \mid \; |f(x)| \geq l_n\}\right) = 0.$$

Segue che

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{X} \mid \; |f(x)| \geq \text{ess sup}\,(f)\}\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\{x \in \mathbb{X} \mid \; |f(x)| \geq l_n\}\right) = 0.$$

Definizione 3.1.4 (Spazi $\mathcal{L}^p$)**.** Sia $p \in [1, +\infty]$; definiamo lo spazio

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{X}) \coloneqq \left\{ f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty] \;\middle|\; f \text{ è misurabile, } \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} < +\infty \right\}_{/\sim},$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica le funzioni che coincidono quasi ovunque.

Osservazione 3.1.5. Dato $p \in [1, +\infty]$, la funzione $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{X})} : L^p(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ è ben definita sulle classi di equivalenza, dunque può essere analogamente definita sull'insieme quoziente $\mathcal{L}^p(\mathbb{X})$ e la denoteremo come $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{X})}$.

3.2 Disuguaglianze integrali

Mostriamo alcune delle più famose disuguaglianze integrali per dotare $\mathcal{L}^p(\mathbb{X})$ di una struttura di spazio normato.

Disuguaglianza di Jensen

Proposizione 3.2.1 (Disuguaglianza di Jensen)**.** *Sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile che sia integrabile rispetto a μ. Supponiamo che $0 < \mu(\mathbb{X}) < +\infty$. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che $\varphi \circ f$ sia integrabile rispetto a μ. Vale che*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}} f \; d\mu\right) \le \frac{1}{\mu(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}} \varphi \circ f \; d\mu.$$

Lo stesso enunciato vale assumendo φ a valori non negativi.

Dimostrazione. Denotiamo

$$y_0 \coloneqq \frac{1}{\mu(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}} f \; d\mu.$$

Essendo φ una funzione convessa, esiste un numero reale m tale che per ogni $y \in \mathbb{R}$ vale che

$$\varphi(y) \ge \varphi(y_0) + m(y - y_0).$$

In particolare, per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$\varphi(f(x)) \ge \varphi(y_0) + m(f(x) - y_0).$$

Se integriamo, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} \varphi(f(x)) \; d\mu &\ge \int_{\mathbb{X}} [\varphi(y_0) + m(f(x) - y_0)] \; d\mu \\
&= \mu(\mathbb{X})\varphi\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}} f(x) \; d\mu\right) + m\left[\int_{\mathbb{X}} f \; d\mu - \mu(\mathbb{X})y_0\right] \\
&= \mu(\mathbb{X})\varphi\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}} f(x) \; d\mu\right).
\end{aligned}$$

□

Corollario 3.2.2. *Supponiamo che $0 < \mu(\mathbb{X}) < +\infty$. Siano p, q tali che*

$$1 \le p < q \le +\infty.$$

L'inclusione $i : \mathcal{L}^q(\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{X})$ è ben definita ed è continua.

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo $q = +\infty$. Sia f una funzione in $L^\infty(\mathbb{X})$; allora è limitata quasi ovunque. In particolare, f è in $L^p(\mathbb{X})$ e vale:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \le \mu(\mathbb{X})^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})};$$

allora la conclusione è immediata.

Step 2: Supponiamo $p, q < +\infty$; data $f \in L^q(\mathbb{X})$, possiamo scrivere

$$|f| = |f| \, \mathbb{1}_{\{|f|<1\}} + |f| \, \mathbb{1}_{\{|f|>1\}}.$$

Essendo $p < q$ e $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$, vale che

$$\int_E |f|^p \, d\mu = \int_E \left(|f|^p \mathbb{1}_{\{|f|<1\}} + |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|>1\}}\right) \, d\mu \leq \int_E (1 + |f|^q) \, d\mu < +\infty;$$

in particolare, deduciamo che $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{X})$. Osserviamo che la funzione $\varphi(x) := |x|^{\frac{q}{p}}$ è convessa. Possiamo applicare la disuguaglianza di Jensen (vedi 3.2.1) e troviamo che

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{X})} \int_{\mathbb{X}} |f|^p \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\mathbb{X})} \int_{\mathbb{X}} \varphi(|f|^p) \, d\mu.$$

In altri termini, otteniamo che

$$\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{X})} \int_{\mathbb{X}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{\mu(\mathbb{X})} \int_{\mathbb{X}} |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Riarrangiando i termini, troviamo che

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{X})} \leq \mu(\mathbb{X})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{X})}$$

e la tesi segue immediatamente. □

Disuguaglianze di Young e Hölder

Definizione 3.2.3 (Esponenti coniugati)**.** Sia $p \in [1, +\infty]$. Diremo che p' è l'esponente coniugato di p se vale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

con la convenzione che $\frac{1}{\infty} = 0$.

Proposizione 3.2.4 (Disuguaglianza di Young)**.** *Siano p, p' esponenti coniugati in $(1, +\infty)$ e $a, b \in [0, +\infty)$. Vale che*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Più precisamente, l'uguaglianza vale se e solo se $a^p = b^{p'}$.

Dimostrazione. Se uno tra a, b è 0, la conclusione è banale. Allora possiamo assumere che entrambi siano strettamente positivi. Siccome la funzione $\log(x)$ è strettamente concava e p, p' sono esponenti coniugati, troviamo che

$$\frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(b^{p'}) \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right).$$

Notiamo che il left hand side coincide con $\log(ab)$. Essendo $\log(x)$ una funzione crescente, deduciamo che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Per stretta concavità, l'uguaglianza vale se e solo se $a^p = b^{p'}$. □

Proposizione 3.2.5 (Disuguaglianza di Hölder). *Siano $f, g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni misurabili e $p, p' \in [1, +\infty]$ esponenti coniugati. Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})} .$$

Più precisamente, se p, p' sono numeri reali e $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}$ sono numeri reali positivi, vale che

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{X})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}$$

se e solo se

$$|f(x)|^p = |g(x)|^{p'} \frac{\|f\|^p_{L^p(\mathbb{X})}}{\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\mathbb{X})}}$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Siano $p = +\infty$ e $p' = 1$. Allora per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} .$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^1(\mathbb{X})} &= \int_{\mathbb{X}} |fg| \ d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{X}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} |g| \ d\mu \\ &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \|g\|_{L^1(\mathbb{X})} . \end{aligned}$$

Se $p = 1$ e $p' = +\infty$, la dimostrazione è analoga. Allora possiamo assumere che p, p' siano numeri reali in $(1, +\infty)$. Se $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} = 0$, allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$; allora $f(x)g(x) = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{X}$ e la conclusione è banale. Se $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})} = 0$, concludiamo allo stesso modo. Dunque, possiamo assumere che $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})}$ e $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}$ siano in $(0, +\infty]$. Osserviamo che se $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} = +\infty$ o $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})} = +\infty$, la conclusione è banale. Allora, possiamo assumere che p, p' siano numeri reali in $(1, +\infty)$ e $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}$ siano numeri reali in $(0, +\infty)$. In particolare, $f(x)$ e $g(x)$ sono numeri reali per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$. Per la disuguaglianza di Young (vedi 3.2.4), per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|^p_{L^p(\mathbb{X})}} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p' \|g\|^{p'}_{L^{p'}(\mathbb{X})}}.$$

Integrando, otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}} \ d\mu &\leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{X}} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\mathbb{X})}} \ d\mu + \frac{1}{p'} \int_{\mathbb{X}} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\mathbb{X})}} \ d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{aligned}$$

La tesi segue riarrangiando i termini. Notiamo che l'uguaglianza vale se e solo se per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha che

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}} = \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|^p_{L^p(\mathbb{X})}} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p' \|g\|^{p'}_{L^{p'}(\mathbb{X})}}.$$

Come mostrato in 3.2.4, è equivalente a richiedere che per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p(\mathbb{X})}^p} = \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}^{p'}}.$$

□

Corollario 3.2.6 (Disuguaglianza di interpolazione)**.**
Siano $1 \leq p < q \leq +\infty$; sia $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Fissato $r \in [p, q]$, sia $\alpha \in [0, 1]$ tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Vale che

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{X})}^{\alpha} \|f\|_{L^q(\mathbb{X})}^{1-\alpha}.$$

Dimostrazione. Notiamo che

$$1 = \frac{r\alpha}{p} + \frac{r(1-\alpha)}{q}.$$

Supponiamo $q < +\infty$; per la disuguaglianza di Hölder, vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} |f|^r \, d\mu &= \int_{\mathbb{X}} |f|^{r\alpha} |f|^{(1-\alpha)r} \, d\mu \\
&\leq \| |f|^{r\alpha} \|_{L^{\frac{p}{\alpha r}}(\mathbb{X})} \left\| |f|^{(1-\alpha)r} \right\|_{L^{\frac{q}{(1-\alpha)r}}(\mathbb{X})} \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{X})}^{\alpha r} \|f\|_{L^q}^{(1-\alpha)r}.
\end{aligned}$$

Se $q = +\infty$, si ragiona in maniera del tutto analoga. □

Lemma 3.2.7 (Disuguaglianza di Chebyshev)**.** *Siano $g : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile e $\delta > 0$. Se definiamo*

$$E_\delta := \{x \mid g(x) \geq \delta\},$$

vale che

$$\mu(E_\delta) \leq \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{X}} g \, d\mu.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che $\delta \mathbb{1}_{E_\delta}(x) \leq g(x)$. Integrando, otteniamo che

$$\delta\mu(E_\delta) = \int_{\mathbb{X}} \delta \mathbb{1}_{E_\delta} \, d\mu \leq \int_{\mathbb{X}} g \, d\mu.$$

□

Proposizione 3.2.8. *Sia $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Supponiamo che valga almeno una delle due seguenti ipotesi:*

- $0 < \mu(\mathbb{X}) < +\infty$;
- $\mu(\mathbb{X}) = +\infty$ *ed esiste* $q \in [1, +\infty)$ *tale che* $f \in L^q(\mathbb{X})$.

Allora vale che

$$\lim_{r \to +\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che $0 < \mu(\mathbb{X}) < +\infty$. Supponiamo anche che

$$0 < \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} < +\infty.$$

A meno di modificare f in un insieme di misura nulla, possiamo supporre che per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ valga

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}.$$

Integrando, otteniamo che per ogni $r \geq 1$ vale che

$$\left(\int_{\mathbb{X}} |f|^r \; d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{\mathbb{X}} \|f\|^r_{L^\infty(\mathbb{X})} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} = \mu(\mathbb{X})^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}.$$

Passando al limsup, si ha che

$$\limsup_{r\to+\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}.$$

Sia $\varepsilon > 0$; dalla definizione 3.1.1 segue che esiste un insieme misurabile A_ε tale che $0 < \mu(A_\varepsilon) < +\infty$ e per ogni $x \in A_\varepsilon$ vale che

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon \leq |f(x)|.$$

Integrando si trova che

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{X}} |f|^r \; d\mu\right)^{\frac{1}{r}} &\geq \left(\int_{A_\varepsilon} |f|^r \; d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\geq \left(\int_{A_\varepsilon} (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon)^r \; d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{r}} (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon).\end{aligned}$$

Passando al liminf si trova che

$$\liminf_{r\to+\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \geq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon;$$

dall'arbitrarietà di ε si deduce che

$$\liminf_{r\to+\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \geq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}.$$

Osserviamo che se $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} = +\infty$, la disuguaglianza

$$\limsup_{r\to+\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}$$

è ovvia; invece, la disuguaglianza

$$\liminf_{r\to+\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \geq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}$$

può essere dimostrata in maniera totalmente analoga al caso analizzato in precedenza. Del resto, se $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} = 0$, la conclusione è ovvia.

Step 2: Supponiamo in alternativa che $\mu(\mathbb{X}) = +\infty$ ed esiste $q \in [1, +\infty)$ tale che $f \in L^q(\mathbb{X})$. Mostriamo che

$$\limsup_{r \to +\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} .$$

Osserviamo che se $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} = +\infty$ la disuguaglianza è banalmente vera; allora possiamo supporre che $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} < +\infty$. In tal caso, per ogni $r \geq q$ possiamo applicare la disuguaglianza di interpolazione (vedi 3.2.6) e trovare che esiste $\alpha_r \in [0, 1]$ tale che

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \leq \|f\|^{\alpha_r}_{L^q(\mathbb{X})} \|f\|^{1-\alpha_r}_{L^\infty(\mathbb{X})} .$$

Dalla proposizione 3.2.6 segue che $\alpha_r = \frac{q}{r}$. Allora, passando al limsup otteniamo che

$$\limsup_{r \to +\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \leq \limsup_{r \to +\infty} \|f\|^{\frac{q}{r}}_{L^q(\mathbb{X})} \|f\|^{1-\frac{q}{r}}_{L^\infty(\mathbb{X})} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} .$$

Mostriamo che vale

$$\liminf_{r \to +\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} \geq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} .$$

Supponiamo che $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} > 0$ (in caso contrario la disuguaglianza è ovvia). Siano $0 < \varepsilon < \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}$ e $r \geq 1$; per la disuguaglianza di Chebyshev (vedi 3.2.7) vale che

$$\mu(\{x \in \mathbb{X} \mid |f(x)|^r \geq (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon)^r\}) \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{X}} |f|^r \, d\mu}{(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon)^r},$$

da cui segue che

$$(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon)\mu(\{x \in \mathbb{X} \mid |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon\})^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} .$$

Essendo

$$0 < \mu(\{x \in \mathbb{X} \mid |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon\}) < +\infty$$

(è positiva per la scelta di ε ed è finita perchè $f \in L^q(\mathbb{X})$, quindi $|f|$ non può essere uniformemente limitato dal basso in un insieme di misura infinita), possiamo prendere il liminf e ottenere

$$\begin{aligned}\liminf_{r \to +\infty} \|f\|_{L^r(\mathbb{X})} &\geq \liminf_{r \to +\infty} (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon)\mu(\{x \in \mathbb{X} \mid |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon\})^{\frac{1}{r}} \\ &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} - \varepsilon;\end{aligned}$$

si conclude per l'arbitrarietà di ε. □

Esempio 3.2.9. Osserviamo se $\mu(\mathbb{X}) = +\infty$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ è tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$, allora vale che $\|f\|_{L^r(\mathbb{X})} = +\infty$ per ogni $r \in [1, +\infty)$, tuttavia $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} = 1$. In tal caso, l'enunciato del teorema 3.2.8 non vale.

Disuguaglianza di Minkowski e struttura metrica

Proposizione 3.2.10 (Disuguaglianza di Minkowski). *Siano $f, g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni misurabili e $p \in [1, +\infty]$. Supponiamo che la somma $f + g$ sia puntualmente ben definita (nell'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$) per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$. Vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{X})} .$$

Dimostrazione. Se $p = 1$, la conclusione segue banalmente dalla disuguaglianza triangolare tra numeri reali.

Se $p = +\infty$, per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})}$ e $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{X})}$. Allora per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{X})}.$$

In questo caso, la conclusione è immediata.

Supponiamo che $p \in (1, +\infty)$. Se $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} = +\infty$ o $\|g\|_{L^p(\mathbb{X})} = +\infty$, la conclusione è banale. Allora, possiamo assumere che $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})}, \|g\|_{L^p(\mathbb{X})}$ siano numeri reali. In particolare, $f(x)$ e $g(x)$ sono numeri reali per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$. Essendo $p > 1$, la funzione $\varphi_p(x) := |x|^p$ è convessa. Per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{2}\right)^p \leq 2^{p-1}\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right).$$

Se integriamo, otteniamo che

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{X})} \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{X})}\right) < +\infty.$$

Sia p' l'esponente coniugato di p; dalla definizione 3.2.3, abbiamo che

$$p' = \frac{p}{p-1}.$$

Per la disuguaglianza di Hölder (vedi 3.2.5), otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} |f + g|^p \, d\mu &= \int_{\mathbb{X}} |f + g|^{p-1} |f + g| \, d\mu \\
&\leq \int_{\mathbb{X}} |f + g|^{p-1} |f| \, d\mu \\
&\quad + \int_{\mathbb{X}} |f + g|^{p-1} |g| \, d\mu \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{X}} |f + g|^{(p-1)p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{X}} |f + g|^{(p-1)p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{X}} |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{X}} |f + g|^p \, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{X}} |f + g|^p \, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{X}} |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Abbiamo mostrato che

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{X})}^p \leq \|f + g\|_{L^p(\mathbb{X})}^{p-1}\left(\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{X})}\right).$$

Osserviamo che se $\|f + g\|_{L^p(\mathbb{X})}^p = 0$, la conclusione è banale; altrimenti, possiamo dividere entrambi i membri per il numero reale positivo $\|f + g\|_{L^p(\mathbb{X})}^{p-1}$ e la tesi segue immediatamente. □

Teorema 3.2.11. *Sia $p \in [1, +\infty]$. La funzione*

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{X})} : \mathcal{L}^p(\mathbb{X}) \to [0, +\infty)$$

è una norma; in particolare, $\mathcal{L}^p(\mathbb{X})$ è uno spazio metrico con la distanza indotta dalla norma.

Dimostrazione. Abbiamo già discusso la buona definizione nell'insieme quoziente della funzione

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{X})} : \mathcal{L}^p(\mathbb{X}) \to [0; +\infty).$$

Mostriamo che è una norma.

- Ovviamente, per ogni $f \in L^p(\mathbb{X})$, vale che $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \in [0, +\infty)$.
- Notiamo che $\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} = 0$ se e solo se $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$, ovvero f è l'elemento nullo nell'insieme quoziente.
- Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ vale che

$$|\lambda| \, \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} = \|\lambda f\|_{L^p(\mathbb{X})} .$$

- La disuguaglianza triangolare è una conseguenza immediata della disuguaglianza di Minkowski (vedi 3.2.10).

□

Proposizione 3.2.12. *Siano $p \in [1, +\infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{X})$; esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\mathbb{X})$ con le seguenti proprietà:*

- $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ *per ogni* $x \in \mathbb{X}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
- *per ogni* $x \in \mathbb{X}$ *vale che*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x);$$

- $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge a* f *in* $L^p(\mathbb{X})$.

In particolare, l'insieme delle funzioni semplici a valori reali appartenenti ad $L^p(\mathbb{X})$ è denso in $L^p(\mathbb{X})$.

Dimostrazione. Essendo $f \in L^p(\mathbb{X})$, se consideriamo la decomposizione $f = f^+ - f^-$, otteniamo che f^+ ed f^- sono in $L^p(\mathbb{X})$; in altri termini, possiamo supporre che f sia non negativa. Inoltre, possiamo anche assumere che sia finita per ogni $x \in \mathbb{X}$. Per il teorema 2.1.18, esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

- $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Per il teorema di convergenza dominata (infatti $(2f)^p \in L^1(\mathbb{X})$, quindi è una dominazione ammissibile per la successione $\{(f - \varphi_n)^p\}_{n \in \mathbb{N}}$), vale che

$$\lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n - f\|_{L^p(\mathbb{X})} = 0.$$

□

3.2.1 Completezza

Vogliamo provare che $\mathcal{L}^p(\mathbb{X})$ è uno spazio metrico completo con la distanza indotta dalla norma, ovvero che $(\mathcal{L}^p(\mathbb{X}; \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{X})})$ è uno spazio di Banach. Dobbiamo mostrare alcuni lemmi preliminari.

Lemma 3.2.13 (Borel-Cantelli)**.** *Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi in $\mathcal{M}$; se definiamo*

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid x \in A_n \textit{ per infiniti indici } n\},$$

allora $A \in \mathcal{M}$. Supponiamo che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty;$$

allora vale che $\mu(A) = 0$.

Dimostrazione. Sia $m \in \mathbb{N}$; definiamo

$$E_m \coloneqq \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

Notiamo che

$$A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geq m} A_n \right) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} E_m,$$

dunque, $A \in \mathcal{M}$. Si mostra facilmente che

$$\mu(A) \leq \inf_{m\in\mathbb{N}} \mu(E_m) \leq \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\geq m} \mu(A_n) \right);$$

in conclusione, notiamo che il right hand side è 0 perchè stiamo assumendo che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty.$$

□

Lemma 3.2.14. *Siano $(\mathbb{Y}; d)$ uno spazio metrico e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{Y}$. Supponiamo che*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} d(x_n; x_{n+1}) < +\infty.$$

Allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy rispetto alla distanza in $\mathbb{Y}$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$; esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n\geq n_0} d(x_n; x_{n+1}) \leq \varepsilon.$$

Se $n > m > n_0$, per la disuguaglianza triangolare vale che

$$d(x_m; x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k; x_{k+1}) \leq \sum_{k\geq n_0} d(x_k; x_{k+1}) \leq \varepsilon.$$

□

Lemma 3.2.15. *Siano* $(\mathbb{Y}; d)$ *uno spazio metrico e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di Cauchy in* $\mathbb{Y}$. *Sia* $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione infinitesima di numeri reali positivi. Esiste una sottosuccessione* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tale che per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *vale che* $d(x_{n_k}; x_{n_{k+1}}) \leq \delta_k$.

Dimostrazione. La successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ può essere definita per ricorsione. Nelle nostre ipotesi, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ vale che $d(x_{n_0}; x_n) \leq \delta_0$. Abbiamo definito x_{n_0}. Sia $k \in \mathbb{N}$ e supponiamo di aver già definito $\{x_{n_0}; \ldots; x_{n_k}\}$. Esiste $n_{k+1} > n_k$ tale che per ogni $n \geq n_{k+1}$ vale che $d(x_{n_{k+1}}; x_n) \leq \delta_{k+1}$. Allora, abbiamo definito $x_{n_{k+1}}$. $\square$

Teorema 3.2.16. *Sia* $p \in [1, +\infty]$; $\left(\mathcal{L}^p(\mathbb{X}); \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{X})}\right)$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}^p(\mathbb{X})$. Denotiamo con $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la corrispondente successione di funzioni in $L^p(\mathbb{X})$. Se mostriamo che esiste una funzione misurabile $\tilde{f} : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{X})$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\right\|_{L^p(\mathbb{X})} = 0$$

e denotiamo con f la classe corrispondente in $\mathcal{L}^p(\mathbb{X})$, è ovvio che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f rispetto alla norma $\mathcal{L}^p(\mathbb{X})$ nell'insieme quoziente. In altri termini, possiamo assumere che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di funzioni ben definita.

Step 1: Supponiamo $p = +\infty$. Per definizione di successione di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ vale che

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty(\mathbb{X})} < \varepsilon.$$

Per la definizione 3.1.2, esiste un insieme $C \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(C^c) = 0$ e per ogni $x \in C$ vale che $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy. Allora, per ogni $x \in C$ possiamo ben definire il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$; se $x \in C^c$, definiamo $f(x) \coloneqq 0$. Allora f è una funzione ben definita tra $\mathbb{X}$ e $\mathbb{R}$. Inoltre, possiamo assumere che per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in C$ vale che $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{X})}$. Siccome $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma $L^\infty(\mathbb{X})$, è facile mostrare che esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \leq M$. In particolare, per ogni $x \in C$ abbiamo che $|f(x)| \leq M$. Essendo f limite puntuale di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in C e 0 in C^c, f è una funzione misurabile; inoltre f appartiene a $L^\infty(\mathbb{X})$. Sia ε un numero reale positivo; sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ vale che

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \leq \varepsilon.$$

Per definizione di C, abbiamo che per ogni $x \in C$ per ogni $n, m \geq n_0$ vale che $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. In particolare, vale che

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

In altri termini, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f rispetto alla norma di $L^\infty(\mathbb{X})$.

Step 2: Supponiamo che $p \in [1, +\infty)$. Per il lemma 3.2.15, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che

$$\left\|f_{n_{k-1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p(\mathbb{X})} \leq 4^{-k}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo

$$g_k \coloneqq \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|, \ A_k \coloneqq \left\{x \in \mathbb{X} \mid g_k(x) \geq 2^{-k}\right\}.$$

Si vede facilmente che $g_k : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ è una funzione misurabile e che $A_k \in \mathcal{M}$. Per la disuguaglianza di Chebyshev (vedi 3.2.7), otteniamo che

$$\mu(A_k) = \mu(\{x \in \mathbb{X} \mid g_k(x)^p \geq 2^{-kp}\}) \leq \frac{1}{2^{-kp}} \int_{\mathbb{X}} g_k^p \, d\mu \leq 2^{-kp}.$$

Definiamo l'insieme

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid x \in A_k \text{ per infiniti indici } k\}.$$

Per il lemma di Borel-Cantelli (vedi 3.2.13), deduciamo che $\mu(A) = 0$. Dunque, per ogni $x \in A^c$ abbiamo che $\{f_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy (vedi lemma 3.2.14). Per ogni $x \in A^c$ denotiamo con $f(x)$ il limite puntuale della successione $\{f_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$; per ogni $x \in A$ definiamo $f(x) = 0$. Come mostrato nel passo precedente, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile. Inoltre, esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{X})} \leq M$; per il lemma di Fatou, vale che

$$\int_{\mathbb{X}} |f|^p \, d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} |f_{n_k}|^p \, d\mu \leq M^p.$$

In particolare, f appartiene a $L^p(\mathbb{X})$. Sia $k \in \mathbb{N}$; per il lemma di Fatou, si ha che

$$\begin{aligned}
\|f - f_{n_k}\|^p_{L^p(\mathbb{X})} &= \int_{\mathbb{X}} |f_{n_k} - f|^p \, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} \left(\lim_{h\to+\infty} |f_{n_k} - f_{n_h}|^p \right) d\mu \\
&\leq \liminf_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} |f_{n_k} - f_{n_h}|^p \, d\mu \\
&\leq 4^{-kp}.
\end{aligned}$$

Dunque, $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f rispetto alla norma $L^p(\mathbb{X})$. Per concludere, osserviamo che l'intera successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f rispetto alla norma $L^p(\mathbb{X})$ perchè è una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione convergente. □

3.3 Varie nozioni di convergenza

Convergenza puntuale e uniforme

Osservazione 3.3.1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili tra $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{R}$ che converge uniformemente ad una funzione f. Ovviamente la convergenza è anche puntuale e puntuale quasi ovunque. Supponiamo che $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$ e che $p \in [1, +\infty)$. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $L^p(\mathbb{X})$, è immediato mostrare che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f anche in $L^p(\mathbb{X})$.

Teorema 3.3.2 (Egorov)**.** *Supponiamo che $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ sia uno spazio mensurale completo tale che $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$. Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili tra $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

per quasi ogni x in $\mathbb{X}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente in E_ε^c.

Dimostrazione. Sia

$$Z := \left\{ x \in \mathbb{X} \;\middle|\; \limsup_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| > 0 \right\}.$$

Per completezza, l'insieme Z è misurabile e vale che $\mu(Z) = 0$ (è essenziale che tutte le funzioni siano a valori reali). Poniamo $\mathbb{X}' = \mathbb{X} \setminus Z$. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$E_n(k) := \bigcup_{j\geq n} \left\{ x \in \mathbb{X}' \mid |f_j(x) - f(x)| \geq e^{-k} \right\}.$$

Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$, la successione di insiemi $\{E_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Per definizione, osserviamo che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n(k) = \emptyset.$$

Poichè $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n(k)) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$; per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_{n_k}(k)) \leq \varepsilon 2^{-k-1}$. Poniamo

$$E_\varepsilon := Z \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{n_k}(k);$$

per quanto mostrato, vale che $\mu(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Possiamo anche supporre che la successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sia strettamente crescente. Notiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ per ogni $j \geq n_k$ vale che

$$\sup_{\mathbb{X}\setminus E_\varepsilon} \{|f_j(x) - f(x)|\} \leq e^{-k};$$

questo è equivalente alla tesi. □

Convergenza in misura

Definizione 3.3.3 (Convergenza in misura)**.** Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili finite quasi ovunque e f una funzione misurabile finita quasi ovunque. Si dice che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f in misura se per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Proposizione 3.3.4. *Siano $p \in [1, +\infty)$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p(\mathbb{X})$ e f una funzione in $L^p(\mathbb{X})$. Supponiamo che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga ad f in $L^p(\mathbb{X})$. Allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f in misura.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, per la disuguaglianza di Chebyshev (vedi 3.2.7), vale che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &= \lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)|^p > \varepsilon^p\}) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\|f_n - f\|^p_{L^p(\mathbb{X})}}{\varepsilon^p} \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Esempio 3.3.5. Definiamo la seguente successione di funzioni. Poniamo

$$f_1 \coloneqq \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]},\ f_2 \coloneqq \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}.$$

Se $n \geq 3$, sia $M_n \geq 2$ tale che $n \in \{2^{M_n-1};\ldots;2^{M_n}-1\}$ e sia $k_n \coloneqq n - 2^{M_n-1}$. Poniamo

$$f_n \coloneqq \mathbb{1}_{[\frac{k_n}{2^{M_n}},\frac{k_n+1}{2^{M_n}}]}.$$

Si può verificare che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni in $[0,1]$ che converge alla funzione nulla in misura, tuttavia $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a 0 per ogni $x \in [0,1]$.

Proposizione 3.3.6. *Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili finite quasi ovunque e f una funzione misurabile finita quasi ovunque. Supponiamo che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f in misura. Allora esiste una sottosuccessione che converge a f puntualmente per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Siano $n, k \in \mathbb{N}$. Poniamo

$$A_{n,k} \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{X} \;\middle|\; |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{2^k} \right\}.$$

Per l'ipotesi di convergenza in misura, per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n,k}) = 0.$$

Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(A_{n_k,k}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Inoltre, possiamo supporre che la successione $\{n_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia strettamente crescente. Osserviamo che

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n_k,k}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_{n_k,k}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Per il lemma di Borel-Cantelli (vedi 3.2.13), vale che

$$\mu(x \mid x \in A_{n_k,k} \text{ per infiniti indici } k) = 0.$$

Allora per quasi ogni x in $\mathbb{X}$ vale che $x \notin A_{n_k,k}$ per finiti indici k; pertanto, per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k}$$

definitivamente in k; questo è equivalente alla tesi. □

Proposizione 3.3.7. *Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili finite quasi ovunque e f una funzione misurabile finita quasi ovunque. Supponiamo che $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$ e che $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $f(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$. Allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f in misura.*

Dimostrazione. Siano $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Poniamo

$$A_{n,\varepsilon} \coloneqq \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$E_{n,\varepsilon} \coloneqq \bigcup_{m \geq n} A_{m,\varepsilon}.$$

Poniamo anche

$$A_\varepsilon \coloneqq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n;\varepsilon}.$$

Dalla convergenza puntuale quasi ovunque segue che

$$\mu(A_\varepsilon) = 0.$$

Osserviamo che $\{E_{n,\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi che converge ad A_ε. Essendo $\mu(\mathbb{X}) < \infty$, vale che

$$\mu(A_\varepsilon) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_{n,\varepsilon}).$$

Per concludere, osserviamo che vale

$$0 = \mu(A_\varepsilon) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_{n,\varepsilon}) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} \mu(A_{m,\varepsilon}) = \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_{n,\varepsilon}).$$

Allora vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n,\varepsilon}) = 0.$$

$\square$

Capitolo 4

Misure prodotto

In questo capitolo assumiamo che siano dati due spazi mensurali $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ e $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$; denotiamo

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}.$$

4.1 Costruzione della misura prodotto

Lemma 4.1.1. *Sia $\{A_k \times B_k\} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ una successione di insiemi a due a due disgiunti e tali che*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \times B_k = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Allora, vale che

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)\nu(B_k).$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{X}$, per ogni $y \in \mathbb{Y}$ vale che

$$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_k}(x)\mathbb{1}_{B_k}(y).$$

Fissato $x \in \mathbb{X}$, integriamo in y e, per il teorema di Beppo Levi, otteniamo che

$$\mathbb{1}_A(x)\nu(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_k}(x)\nu(B_k).$$

Integrando rispetto alla variabile x e applicando ancora il teorema di Beppo Levi, si ottiene che

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)\nu(B_k).$$

□

Definizione 4.1.2. Poniamo $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ tale che

$$\lambda(A \times B) := \mu(A)\nu(B).$$

Osservazione 4.1.3. Si verifica facilmente che $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ è un semi-anello; per il lemma 4.1.1, la funzione d'insieme λ definita in 4.1.2 è numerabilmente additiva su $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$; inoltre è ovvio che $\lambda(\emptyset) = 0$. Per il lemma 1.2.19, la funzione λ è una premisura su $\mathcal{S}$.

Definizione 4.1.4. Si pone $\mu \times \nu := \lambda^*$, dove λ^* è l'estensione di λ costruita dal teorema di Carathéodory-Hahn (vedi 1.2.20). $\mu \times \nu$ è detta misura prodotto.

Osservazione 4.1.5. Ovviamente la costruzione della misura prodotto è commutativa. Infatti, è immediato osservare che le misure esterne $\mu \times \nu$ e $\nu \times \mu$ costruite tramite il teorema di Carathéodory-Hahn (vedi 1.2.20) generano la stessa σ-algebra di insiemi misurabili e coincidono ovunque.

Osservazione 4.1.6. Dal teorema 1.2.20, segue che $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ è contenuta nella σ-algebra degli insiemi misurabili per $\mu \times \nu$; inoltre

$$\mu \times \nu(A \times B) = \lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

4.2 Teoremi di Fubini e Tonelli

Definizione 4.2.1 (Sezione)**.** Siano $E \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ e $x \in \mathbb{X}$. Si pone

$$E_x := \{y \in \mathbb{Y} \mid (x; y) \in E\}.$$

Proposizione 4.2.2. *Supponiamo che μ e ν siano misure finite. Sia $E \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_{\sigma\delta}$; allora vale che:*

- *per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha che $E_x \in \mathcal{B}$;*
- *la funzione $x \to \nu(E_x)$ è $\mathcal{A}$-misurabile;*
- *vale la formula*
$$\mu \times \nu(E) = \int_{\mathbb{X}} \nu(E_x)\ d\mu.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Sia $F \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma$; per definizione, esiste una famiglia $\{A_k \times B_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tale che
$$F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \times B_k.$$
Essendo $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ un semi-anello, si può supporre che l'unione sia disgiunta. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{X}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$(A_k \times B_k)_x = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \notin A_k, \\ B_k & \text{se } x \in A_k. \end{cases}$$

Inoltre, si ha che
$$F_x = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \times B_k)_x;$$

in ogni caso, $F_x \in \mathcal{B}$. Si verifica banalmente che se $k \neq j$, per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che $(A_k \times B_k)_x \cap (A_j \times B_j)_x = \emptyset$. Per la numerabile additività di ν possiamo scrivere che

$$\nu(F_x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu((A_k \times B_k)_x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_k}(x)\nu(B_k).$$

Questo è sufficiente a concludere che la funzione $x \to \nu(F_x)$ è misurabile (infatti è estremo superiore di funzioni misurabili). Applicando il teorema di Beppo Levi e la definizione di misura prodotto, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} \nu(F_x)\, d\mu &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{A_k}(x)\nu(B_k)\, d\mu \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)\nu(B_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu \times \nu(A_k \times B_k) \\ &= \mu \times \nu(F).\end{aligned}$$

Dunque, la proposizione è completamente dimostrata nel caso in cui $F \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma$.

Step 2: Sia $E \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_{\sigma\delta}$; osserviamo che $\mu \times \nu(E) < +\infty$. Per definizione, esiste una famiglia $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k.$$

Essendo $\mathcal{S}$ un semi-anello possiamo supporre che $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sia una successione decrescente. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che $\{(F_k)_x\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{B}$ che converge decrescendo a E_x. Essendo ν una misura finita, per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$\lim_{k\to+\infty} \nu((F_k)_x) = \nu(E_x).$$

Pertanto, la funzione $x \to \nu(E_x)$ è ben definita ed è misurabile, essendo limite puntuale di funzioni misurabili. Inoltre, $\nu((F_k)_x) \le \nu((F_1)_x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in \mathbb{X}$; essendo ν una misura finita, la successione $\{\nu(F_k)_x\}_{k\in\mathbb{N}}$ è equi-limitata in k e in x. Usando il fatto che anche $\mu \times \nu$ è una misura finita e il teorema di convergenza dominata (infatti μ è una misura finita e le costanti sono dominazioni ammissibili), vale che

$$\mu \times \nu(E) = \lim_{k\to+\infty} \mu \times \nu(F_k) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \nu((F_k)_x)\, d\mu = \int_{\mathbb{X}} \nu(E_x)\, d\mu.$$

□

Teorema 4.2.3 (Formula di riduzione)**.** *Supponiamo che μ e ν siano misure finite e che $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ sia uno spazio mensurale completo. Sia E un insieme misurabile secondo $\mu \times \nu$; valgono i seguenti fatti:*

- *per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ l'insieme E_x appartiene a $\mathcal{B}$;*
- *esiste una funzione misurabile $s : \mathbb{X} \to [0, +\infty)$ tale che per ogni x fuori da un insieme di misura nulla (misurabile per $\mathcal{A}$) vale che $s(x) = \nu(E_x)$;*
- *vale la formula*

$$\mu \times \nu(E) = \int_{\mathbb{X}} \nu(E_x)\, d\mu.$$

Dimostrazione. Per il lemma 1.2.25 esiste un insieme $G \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_{\sigma\delta}$ tale che $E \subseteq G$ e $\mu \times \nu(G) = \mu \times \nu(E)$; essendo tutte le misure finite, vale che $\mu \times \nu(G \setminus E) = 0$. Applicando ancora il lemma 1.2.25, deduciamo che esiste $F \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_{\sigma\delta}$ tale che

$G \setminus E \subseteq F$ e $\mu \times \nu(F) = 0$. Per la proposizione 4.2.2 vale che per ogni $x \in \mathbb{X}$ l'insieme $F_x \in \mathcal{B}$, la funzione $x \to \nu(F_x)$ è ben definita e misurabile e vale la formula

$$0 = \mu \times \nu(F) = \int_{\mathbb{X}} \nu(F_x)\ d\mu.$$

Deduciamo che esiste un insieme $A_0 \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(\mathbb{X} \setminus A_0) = 0$ e $\nu(F_x) = 0$ per ogni $x \in A_0$. Essendo ν una misura completa, possiamo affermare che $(G \setminus E)_x \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in A_0$ (infatti $(G \setminus E)_x \subseteq F_x$). Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$G_x = (G \setminus E)_x \cup E_x$$

e $G_x \in \mathcal{B}$ per la proposizione 4.2.2; tuttavia, se $x \in A_0$, abbiamo detto che $(G \setminus E)_x \in \mathcal{B}$ e, essendo l'unione disgiunta, otteniamo che $E_x \in \mathcal{B}$. Otteniamo che per ogni $x \in A_0$ vale che $\nu(G_x) = \nu(E_x)$; allora la funzione $x \to \nu(E_x)$ è ben definita in A_0 ed è misurabile per la proposizione 4.2.2. Se la estendiamo a 0 fuori da A_0, otteniamo una mappa misurabile definita su tutto $\mathbb{X}$. In conclusione, osserviamo che

$$\begin{aligned}
\mu \times \nu(E) &= \mu \times \nu(G) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \nu(G_x)\ d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X} \setminus A_0} \nu(G_x)\ d\mu + \int_{A_0} \nu(G_x)\ d\mu \\
&= \int_{A_0} \nu(E_x)\ d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} \nu(E_x)\ d\mu.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.4 (Fubini). *Supponiamo che μ e ν siano misure finite e che $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ sia uno spazio mensurale completo. Sia $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione in $L^1(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$. Valgono i seguenti fatti:*

- *per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ la funzione $y \to f(x; y)$ è ν-integrabile;*
- *esiste una funzione misurabile $\theta : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni x fuori da un insieme di misura nulla (misurabile per $\mathcal{A}$) vale che*
$$\theta(x) = \int_{\mathbb{Y}} f(x; y)\ d\nu;$$
- *vale la formula*
$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x; y)\ d\mu \times \nu = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x; y)\ d\nu \right)\ d\mu.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che ψ sia una funzione semplice non negativa tale che $\psi \in L^1(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ e mostriamo che in tal caso il teorema è valido. Per fissare la notazione, abbiamo che

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbb{1}_{E_j},$$

con $\lambda_j > 0$ e gli insiemi $E_1, \dots, E_n$ a due a due disgiunti. Per la formula di riduzione (vedi 4.2.3), esiste un insieme $A_0 \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(\mathbb{X} \setminus A_0) = 0$ e per ogni $x \in A_0$ per ogni $j \in \{1; \dots; n\}$ vale che $(E_j)_x \in \mathcal{B}$. Osserviamo che per ogni $x \in A_0$ la funzione

$$y \to \psi(x; y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbb{1}_{(E_j)_x}(y)$$

è misurabile e inoltre

$$\int_{\mathbb{Y}} \psi(x; y)\ d\nu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nu((E_j)_x) < +\infty.$$

La funzione

$$x \to \int_{\mathbb{Y}} \psi(x; y)\ d\nu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nu((E_j)_x) < +\infty$$

è ben definita e misurabile in A_0; se la estendiamo a 0 fuori da A_0, otteniamo una mappa misurabile definita su tutto $\mathbb{X}$. Infine, applicando la formula di riduzione (vedi 4.2.3), osserviamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \psi(x; y)\ d\mu \times \nu &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu \times \nu(E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_{\mathbb{X}} \nu((E_j)_x)\ d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nu((E_j)_x)\ d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} \psi(x; y)\ d\nu \right)\ d\mu.
\end{aligned}$$

Step 2: Sia $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to [0, +\infty]$ una funzione in $L^1(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$. Sia $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici non negative che converge crescendo a f in maniera puntuale (vedi 2.1.18). Per quanto provato nel passo precedente, per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ la funzione $y \to f(x; y)$ è misurabile, essendo limite puntuale di funzioni misurabili: infatti esiste un insieme $A_0 \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(\mathbb{X} \setminus A_0) = 0$ e $y \to \psi_k(x; y)$ è misurabile per ogni $x \in A_0$. Per il teorema di Beppo Levi, per ogni $x \in A_0$ vale che

$$\int_{\mathbb{Y}} f(x; y)\ d\nu = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{Y}} \psi_k(x; y)\ d\nu.$$

Allora, la funzione

$$x \to \int_{\mathbb{Y}} f(x; y)\ d\nu = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{Y}} \psi_k(x; y)\ d\nu$$

è ben definita in A_0 e misurabile perchè limite puntuale di funzioni misurabili; estendendola a 0 fuori da 0 si ottiene una mappa misurabile e globalmente definita su $\mathbb{X}$.

Applicando il teorema di Beppo Levi, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x;y)\ d\nu \right) d\mu &= \int_{\mathbb{X}} \left(\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{Y}} \psi_k(x;y)\ d\nu \right)\ d\mu \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} \psi_k(x;y)\ d\nu \right)\ d\mu \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \psi_k(x;y)\ d\mu\times\nu \\
&= \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x;y)\ d\mu\times\nu.
\end{aligned}$$

Step 3: Sia $f : \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione in $L^1(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$. Possiamo decomporla nella sua parte positiva e negativa, cioè scriviamo $f = f^+ - f^-$. Abbiamo dimostrato il teorema separatamente per f^+ e per f^-. Concludiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f\ d\mu\times\nu &= \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f^+\ d\mu\times\nu - \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f^-\ d\mu\times\nu && (4.1)\\
&= \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f^+(x;y)\ d\nu \right)\ d\mu - \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f^-(x;y)\ d\nu \right)\ d\mu && (4.2)\\
&= \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f^+(x;y)\ d\nu - \int_{\mathbb{Y}} f^-(x;y)\ d\nu \right)\ d\mu && (4.3)\\
&= \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} (f^+(x;y) - f^-(x;y))\ d\nu \right)\ d\mu && (4.4)\\
&= \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x;y)\ d\nu \right)\ d\mu.
\end{aligned}$$

In 4.1 abbiamo usato il fatto che $f \in L^1(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$, quindi gli integrali al membro di destra sono entrambi finiti e in tal caso l'integrale è un operatore lineare; in 4.2 abbiamo usato il fatto che le funzioni

$$x \to \int_{\mathbb{Y}} f^+(x;y)\ d\nu, \quad x \to \int_{\mathbb{Y}} f^-(x;y)\ d\nu$$

sono in $L^1(\mathbb{X})$; in 4.3 abbiamo usato il fatto che per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$\int_{\mathbb{Y}} f^+(x;y)\ d\nu < +\infty, \quad \int_{\mathbb{Y}} f^-(x;y)\ d\nu < +\infty;$$

in 4.4 abbiamo usato la definizione di $f = f^+ - f^-$. □

Teorema 4.2.5 (Tonelli)**.** *Supponiamo che μ e ν siano misure finite e che $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ sia uno spazio mensurale completo. Sia $f : \mathbb{X}\times\mathbb{Y} \to [0,+\infty]$ una funzione misurabile. Valgono i seguenti fatti:*

- *per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ la funzione $y \to f(x;y)$ è misurabile;*
- *esiste una funzione misurabile $\theta : \mathbb{X} \to [0,+\infty]$ tale che per ogni x fuori da un insieme di misura nulla (misurabile secondo $\mathcal{A}$) vale che*

$$\theta(x) = \int_{\mathbb{Y}} f(x;y)\ d\nu;$$

- *vale la formula*

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x;y)\ d\mu\times\nu = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x;y)\ d\nu\right)\ d\mu.$$

Dimostrazione. La dimostrazione può essere ottenuta con pochissime modifiche dai primi due passi del teorema di Fubini (vedi 4.2.4). □

Osservazione 4.2.6. I teoremi di Fubini e Tonelli (vedi 4.2.4 e 4.2.5) possono essere immediatamente estesi al caso in cui $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ e $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ siano spazi σ-finiti.

Osservazione 4.2.7. Ovviamente, se $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ e $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi mensurali completi e le misure μ, ν sono finite, valgono i teoremi di Fubini (vedi 4.2.4) e Tonelli (vedi 4.2.5) scambiando le misure μ e ν.

Esempio 4.2.8. Siano $\gamma : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ la misura che conta i punti in $\mathbb{R}$ e $m_1 : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$. Consideriamo la diagonale del quadrato

$$D \coloneqq \{(x;x) \mid x \in [0,1]\}.$$

Osservando che D si può scrivere come intersezione numerabile di unioni finite di quadrati, si conclude che $D \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}))_{\sigma\delta}$; in particolare, D è un insieme misurabile secondo $\gamma \times m_1$. Ricordiamo che gli spazi mensurali $(\mathbb{R}; \mathcal{P}(\mathbb{R}); \gamma)$ e $(\mathbb{R}; \mathcal{M}(\mathbb{R}); m_1)$ sono completi; inoltre, per ogni $x \in [0,1]$ vale che $D_x = \{x\}$; altrimenti $D_x = \emptyset$. Osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} m_1(D_x)\ d\gamma = 0,\ \int_{\mathbb{R}} \gamma(D_y)\ dy = \int_{[0,1]} 1\ dy = 1.$$

Questo è sufficiente che non può valere il teorema di Fubini in questo caso; del resto, lo spazio $(\mathbb{R}; \mathcal{P}(\mathbb{R}); \gamma)$ non è σ-finito.

Esempio 4.2.9. Siano m, n interi positivi. Consideriamo gli spazi mensurali completi $(\mathbb{R}^n; \mathcal{M}(\mathbb{R}^n); m_n)$ e $(\mathbb{R}^m; \mathcal{M}(\mathbb{R}^m); m_m)$. Siano $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{S}_m$ i rettangoli rispettivamente in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ e $v_n : \mathcal{S}_n \to [0,+\infty]$, $v_m : \mathcal{S}_m \to [0,+\infty]$ le funzioni definite in 1.3.3. Se denotiamo con $\pi_n : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ la proiezione sulle prime n componenti e con $\pi^m : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ la proiezione sulle ultime componenti, osserviamo che la mappa $\Theta : \mathcal{S}_{n+m} \to \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m$ tale che

$$\Theta(E) = (\pi_n(E); \pi^m(E))$$

è ben definita ed è una bigezione. Dato $A \times B \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m$, definiamo

$$\lambda_{n,m}(A \times B) \coloneqq m_n(A) m_m(B).$$

Osserviamo che per ogni $E \in \mathcal{S}_{n+m}$ vale che

$$v_{n+m}(E) = v_n(\pi_n(E)) v_m(\pi^m(E)) = \lambda_{n,m}(\Theta(E)).$$

In altri termini, le funzioni v_{n+m} e $\lambda_{n,m} \circ \Theta$ coincidono su $\mathcal{S}_{n+m}$. Per costruzione (vedi 1.2.20 e 4.1.4), è immediato osservare che le misure esterne prodotte con il teorema di Carathéodory (vedi 1.2.7) coincidono su ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+m}$; in particolare definiscono la stessa σ-algebra di insiemi misurabili e la loro restrizione a tale σ-algebra è una misura. Siccome $\mathcal{S}_{n+m}$ è un semi-anello e v_{n+m} è una premisura su $\mathcal{S}_{n+m}$, allora m_{n+m} e $m_n \times m_n$ estendono rispettivamente v_{n+m} e $\lambda_{n,m} \circ \Theta$.

Capitolo 5

Misure con segno

In questo capitolo supponiamo che sia assegnato uno spazio misurabile $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$.

5.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 5.1.1 (Misura con segno)**.** Sia $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una funzione con seguenti proprietà:

- $\nu(\emptyset) = 0$;
- per ogni famiglia $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ numerabile e disgiunta in $\mathcal{M}$ vale che

  $$\nu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \nu(E_i),$$

  intendendo che la somma al secondo membro è ben definita in $\overline{\mathbb{R}}$ e non dipende dall'ordinamento.

Diremo che ν è una misura con segno. Se ν è a valori reali, diremo che ν è una misura con segno finita.

Proposizione 5.1.2. *Sia $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno; allora $\nu(\mathcal{M}) \subseteq (-\infty, +\infty]$ oppure $\nu(\mathcal{M}) \subseteq [-\infty, +\infty)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $E, F \in \mathcal{M}$ tali che $\nu(E) = +\infty$ e $\nu(F) = -\infty$. In particolare, sono non vuoti. Allora vale che

$$\nu(E \cap F) + \nu(E \setminus F) = \nu(E) = +\infty$$

$$\nu(E \cap F) + \nu(F \setminus E) = \nu(F) = -\infty.$$

Dovendo essere le somme ben definite nell'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$, deve valere che $\nu(E \cap F)$ è finito, $\nu(E \setminus F) = +\infty$ e $\nu(F \setminus E) = -\infty$. Essendo $E \setminus F$ e $F \setminus E$ insiemi disgiunti, deduciamo che

$$\nu((E \setminus F) \cup (F \setminus E)) = \nu(E \setminus F) + \nu(F \setminus E) = (+\infty) + (-\infty)$$

che non è definita come operazione nell'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$. Tuttavia, questo è assurdo per la definizione di misura con segno. $\square$

Definizione 5.1.3 (Restrizione di una misura)**.** Siano ν una misura con segno e $A \in \mathcal{M}$. Poniamo
$$\nu_{\lfloor A}(F) \coloneqq \nu(A \cap F).$$

Osservazione 5.1.4. Ovviamente la restrizione di una misura (vedi 5.1.3) $\nu_{\lfloor A} : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ è ancora una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{M}$.

Osservazione 5.1.5. Sia $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno. Sia $F \in \mathcal{M}$ tale che $\nu(F) \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $A \in \mathcal{M}_F$ vale che $\nu(A) \in \mathbb{R}$. Infatti, se esistesse $A \in \mathcal{M}_F$ tale che $\nu(A) = +\infty$, deve valere che $\nu(F \setminus A) \neq -\infty$ (altrimenti la somma $\nu(F) = \nu(A) + \nu(F \setminus A)$ non è ben definita e questo sarebbe assurdo). In ogni caso, si ottiene che $\nu(F) = +\infty$. Se $\nu(A) = -\infty$ si ragiona in maniera analoga.

Osservazione 5.1.6. Sia $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno. Ragionando come nel teorema 1.1.14, è possibile mostrare che se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi, vale che
$$\nu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \lim_{j\to+\infty} \nu(A_j);$$
se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi e $\nu(A_j) \in \mathbb{R}$, allora
$$\nu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \lim_{j\to+\infty} \nu(A_j).$$

5.2 Decomposizione di misure

Definizione 5.2.1 (Insieme positivo, negativo o nullo)**.** Siano $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno e $A \in \mathcal{M}$. Diremo che A è

- positivo se $\nu(S) \geq 0$ per ogni $S \in \mathcal{M}_A$,
- negativo se $\nu(S) \leq 0$ per ogni $S \in \mathcal{M}_A$,
- nullo se $\nu(S) = 0$ per ogni $S \in \mathcal{M}_A$

Osservazione 5.2.2. Se $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ è una misura con segno e $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ è una famiglia di insiemi positivi, allora $A \coloneqq \bigcup A_j$ è positivo. Basta osservare che per ogni $S \in \mathcal{M}_A$ vale che
$$S = \bigcup A_j \cap S$$
e $A_j \cap S \in \mathcal{M}_{A_j}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Vale un enunciato analogo per insiemi negativi.

Lemma 5.2.3 (Hahn)**.** *Siano $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno e $E \in \mathcal{M}$ tale che $\nu(E) \in (0, +\infty)$. Allora esiste un sottoinsieme $A \subseteq E$ tale che $A \in \mathcal{M}$, A è positivo e vale $\nu(A) \in (0, +\infty)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per ogni $S \in \mathcal{M}_E$ vale che $\nu(S) \in \mathbb{R}$ (vedi 5.1.5). Se E è positivo, abbiamo concluso; altrimenti è ben definito
$$m_1 \coloneqq \min\left\{ j \in \mathbb{N}^+ \;\middle|\; \exists S \in \mathcal{M}_E \text{ tale che } \nu(S) < -\frac{1}{j} \right\}.$$

Sia $E_1 \in \mathcal{M}_E$ tale che $\nu(E_1) < -\frac{1}{m_1}$. In particolare, deduciamo che $\nu(E \setminus E_1) > 0$ ed è ovviamente finito. Se $E \setminus E_1$ è un insieme positivo, abbiamo concluso; altrimenti, è ben definito

$$m_2 := \min \left\{ j \in \mathbb{N}^+ \;\middle|\; \exists S \in \mathcal{M}_{E \setminus E_1} \text{ tale che } \nu(S) < -\frac{1}{j} \right\}.$$

Allora esiste $E_2 \in \mathcal{M}_{E \setminus E_1}$ tale che $\nu(E_2) < -\frac{1}{m_2}$. Come in precedenza, deduciamo che $\nu(E \setminus E_1 \setminus E_2) \in (0, +\infty)$, ovvero $\nu(E \setminus (E_1 \cup E_2)) \in (0, +\infty)$. Se $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ è positivo, abbiamo concluso; altrimenti ripetiamo il procedimento. Se la procedura termina al passo k_0, allora esistono degli insiemi $E_1, \dots, E_{k_0}$ tali che $E_k \in \mathcal{M}_{E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i}$ per ogni $k \leq k_0$ e vale

$$\nu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_0} E_i\right) \in (0, +\infty)$$

e l'insieme $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_0} E_i$ è positivo. In tal caso, l'enunciato è dimostrato. Se la procedura non termina, troviamo una successione $\{E_j\}_{j \in \mathcal{M}}$ tale che $E_k \subseteq E \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_i$ ed esiste una successione $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di numeri interi positivi tali che $\nu(E_k) \leq -\frac{1}{m_k}$. Osserviamo che vale

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(E_k) := \lambda.$$

Osserviamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ perchè $\nu(E) \in (0, +\infty)$; del resto, si ha

$$\lambda = \sum_{j=1}^{+\infty} \nu(E_k) \leq -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{m_k}.$$

Allora, deduciamo che la successione $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deve convergere a $+\infty$. Poniamo

$$A := E \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j.$$

Osserviamo che $\nu(A) < +\infty$, perchè E ha misura finita; inoltre $\nu(A) > 0$ perchè E ha misura positiva e $\nu(E_j) < 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Vogliamo mostrare che A è un insieme positivo. Sia $B \in \mathcal{M}_A$. Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$B \subseteq E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i;$$

per definizione di m_{k+1}, vale che

$$\nu(B) \geq -\frac{1}{m_{k+1}}.$$

Prendendo il limite per k che tende a $+\infty$, concludiamo che $\nu(B) \geq 0$. □

Teorema 5.2.4 (Hahn). *Sia $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno. Allora esiste una partizione $\{A, B\} \subseteq \mathcal{M}$ di $\mathbb{X}$ tale che A è positivo e B è negativo.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $\nu(\mathcal{M}) \subseteq [-\infty, +\infty)$. Poniamo

$$\lambda := \sup\{\nu(E) \mid E \in \mathcal{M},\ E \text{ è positivo}\} \geq 0.$$

Osserviamo che λ è ben definito perchè $\emptyset$ è un insieme positivo. Esiste una successione di insiemi positivi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \nu(A_k) = \lambda.$$

Poniamo

$$A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Abbiamo già osservato che l'unione numerabile di insiemi positivi forma un insieme positivo; dunque A è un insieme positivo. Per definizione di λ, si ha che $\nu(A) \leq \lambda$. Notiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\nu(A) = \nu(A \setminus A_k) + \nu(A_k) \geq \nu(A_k);$$

prendendo il limite per k che tende a $+\infty$, si ottiene che $\nu(A) \geq \lambda$. Ovviamente $\lambda < +\infty$, perchè stiamo assumendo che $\nu(\mathcal{M}) \subseteq [-\infty, +\infty)$. Poniamo $B := \mathbb{X} \setminus A$ e mostriamo che è un insieme negativo. Supponiamo che esista $B' \subseteq B$ tale che $\nu(B) > 0$; per ipotesi, vale ovviamente che $\nu(B) < +\infty$. Per il lemma di Hahn (vedi 5.2.3), esiste un insieme $B'' \subseteq B$ positivo e tale che $\nu(B'') \in (0, +\infty)$; osserviamo che $A \cup B''$ è un insieme positivo tale che

$$\nu(A \cup B'') = \nu(A) + \nu(B'') > \lambda,$$

che è assurdo perchè contrario alla definizione di λ. □

Definizione 5.2.5 (Misure mutualmente singolari)**.** Siano $\alpha, \beta : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$; diremo che α, β sono mutualmente singolari se esistono due insiemi disgiunti $A, B \in \mathcal{M}$ tali che $\mathbb{X} = A \cup B$, A è nullo per β e B è nullo per α.

Osservazione 5.2.6. Nel contesto della definizione 5.2.5, se esiste un insieme $Z \in \mathcal{M}$ che è nullo per α e per β, allora gli insiemi A, B non sono univocamente determinati.

Definizione 5.2.7 (Misura concentrata)**.** Siano $E \in \mathcal{M}$ e $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno. Diremo che ν è concentrata in E se E^c è nullo per ν.

Teorema 5.2.8 (Decomposizione di Jordan)**.** *Sia $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ una misura con segno. Esistono due misure $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ mutualmente singolari e tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$, intendendo che la differenza è ben definita. Inoltre ν^+, ν^- sono uniche, cioè se $\alpha, \beta : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ sono misure mutualmente singolari tali che $\nu = \alpha - \beta$ e la differenza è ben definita, allora $\alpha = \nu^+$ e $\beta = \nu^-$.*

Dimostrazione. **Step 1**: Per il teorema di Hahn (vedi 5.2.4), esistono due insiemi disgiunti $A, B \in \mathcal{M}$ tali che $\mathbb{X} = A \cup B$, A è positivo e B è negativo. Poniamo $\nu^+ := \nu_{\lfloor A} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ e $\nu^- := -\nu_{\lfloor B} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$. Ricordando che per ogni $E \in \mathcal{M}$ vale

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) \geq 0$$

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap B) \geq 0,$$

è ben definita la decomposizione

$$\nu(E) = \nu(A \cap E) + \nu(B \cap E) = \nu^+(E) - \nu^-(E),$$

perchè ν è una misura con segno.

Step 2: Consideriamo un'altra decomposizione $\nu = \alpha - \beta$, dove α è una misura non negativa concentrata in A', β è una misura non negativa concentrata in B', A', B' sono insiemi disgiunti in $\mathcal{M}$ e $A' \cup B' = \mathbb{X}$. Vogliamo provare che $\nu^+ = \alpha$ e $\nu^- = \beta$. Per costruzione vale che

$$\nu^+ = \nu_{\lfloor A} = \nu_{\lfloor A \cap A'} + \nu_{\lfloor A \setminus A'}.$$

Vale che

$$0 \leq \nu_{\lfloor A \setminus A'} = \alpha_{\lfloor A \setminus A'} - \beta_{\lfloor A \setminus A'} = -\beta_{\lfloor A \setminus A'} \leq 0;$$

Dunque, otteniamo che $\nu_{\lfloor A \setminus A'} \equiv 0$. Allora vale che

$$\nu^+ = \nu_{\lfloor A \cap A'} = \alpha_{\lfloor A \cap A'} - \beta_{\lfloor A \cap A'} = \alpha_{\lfloor A \cap A'} = \alpha_{\lfloor A \cap A'} + \alpha_{\lfloor A \setminus A'} = \alpha_{\lfloor A}.$$

Se mostriamo che $\alpha_{\lfloor A} = \alpha$, allora concludiamo che $\alpha = \nu^+$. Osservando che $A' \setminus A \subseteq B$, si ha

$$\alpha = \alpha_{\lfloor A} + \alpha_{\lfloor A^c} = \alpha_{\lfloor A} + \alpha_{\lfloor A' \setminus A}.$$

Notiamo che

$$0 \geq \nu_{\lfloor A' \setminus A} = \alpha_{\lfloor A' \setminus A} - \beta_{\lfloor A' \setminus A} = \alpha_{\lfloor A' \setminus A} \geq 0,$$

dunque $\alpha_{\lfloor A' \setminus A} \equiv 0$, da cui si conclude che $\alpha = \alpha_{\lfloor A}$. Ragionando in maniera totalmente analoga, si deduce che $\beta = \nu^-$. □

Osservazione 5.2.9. Dal teorema di decomposizione di Jordan, si deduce che se ν è una misura con segno finita, allora ν^+ e ν^- sono misure non negative finite.

Integrale rispetto ad una misura finita con segno

Definizione 5.2.10. Siano $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura con segno e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Per il teorema di decomposizione di Jordan (vedi 5.2.8) esistono due misure non negative e mutualmente singolari $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Supponiamo che

$$\int_{\mathbb{X}} |f| \ d(\nu^+ + \nu^-) < +\infty.$$

Notiamo che

$$\int_{\mathbb{X}} |f| \ d(\nu^+ + \nu^-) = \int_{\mathbb{X}} |f| \ d\nu^+ + \int_{\mathbb{X}} |f| \ d\nu^-;$$

l'identità vale se f è una funzione semplice; allora si può estendere a tutte le funzioni misurabili non negative utilizzando il teorema di Beppo Levi e il teorema 2.1.18.

Si può definire ben definire

$$\int_{\mathbb{X}} f \ d\nu := \int_{\mathbb{X}} f \ d\nu^+ - \int_{\mathbb{X}} f \ d\nu^-.$$

Osservazione 5.2.11. L'integrale rispetto ad una misura finita con segno gode ovviamente delle stesse proprietà di linearità dell'integrale rispetto ad una misura non negativa.

Capitolo 6

Misure a valori in uno spazio di Banach

In questo capitolo, supponiamo che siano assegnati uno spazio di Banach E e uno spazio misurabile $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$.

6.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 6.1.1 (Convergenza incondizionata)**.** Sia $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione in E. Diremo che la serie

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$$

converge incondizionatamente a $\overline{x} \in E$ se la successione delle somme parziali converge a $\overline{x}$ e per ogni permutazione di indici π, vale che la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x_{\pi(j)}$$

converge a $\overline{x}$.

Osservazione 6.1.2. Se E ha dimensione finita, la convergenza incondizionata di una serie è equivalente alla convergenza assoluta per il teorema di Riemann-Dini.

Definizione 6.1.3 (Misura a valori in uno spazio di Banach)**.** Sia $\nu : \mathcal{M} \to E$ una funzione d'insieme. Si dice che ν è una misura a valori in uno spazio di Banach se gode delle seguenti proprietà:

- $\nu(\emptyset) = 0$;
- per ogni famiglia numerabile disgiunta $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ vale che

$$\nu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(F_j),$$

  intendendo che la serie converge incondizionatamente.

Esempio 6.1.4. Se $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è una misura con segno finita come indicato nella definizione 5.1.1, allora ν è una misura a valori in uno spazio di Banach secondo la definizione 6.1.3.

Esempio 6.1.5. Se E ha dimensione finita, allora le serie che compaiono nella definizione 6.1.3 sono assolutamente convergenti (per il criterio di Riemann-Dini). Questo è generalmente falso se E ha dimensione infinita. Supponiamo che $\mathbb{X} = \mathbb{N}^+$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ ed $E = \ell^2(\mathbb{R})$ (ricordiamo che è uno spazio di Banach). Denotiamo con $\{e_j \mid j \in \mathbb{N}^+\}$ la base canonica di $\ell^2(\mathbb{R})$. Per ogni $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$, definiamo

$$\nu(A) \coloneqq \begin{cases} \sum_{j \in A} \frac{1}{j} e_j & \text{se } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la serie che definisce ν è ben definita e converge incondizionatamente in $\ell^2(\mathbb{R})$. Verifichiamo che $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \to \ell^2(\mathbb{R})$ è una misura a valori in uno spazio di Banach. Sia data una successione $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ formata da elementi a due a due disgiunti. Denotiamo con

$$A \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Per la convergenza incondizionata della serie che definisce ν, possiamo riordinare la serie nel modo seguente:

$$\nu(A) = \sum_{j \in A} \frac{1}{j} e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in A_n} \frac{1}{j} e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Questo prova che ν è una misura a valori in uno spazio di Banach. Tuttavia, osserviamo che se $A_j = \{j\}$, si ha che

$$\nu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^+} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{j} e_j \in \ell^2(\mathbb{R}),$$

tuttavia vale che

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^+} \|\nu(A_j)\| = \sum_{j \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Dunque, abbiamo una serie che converge nella norma dello spazio di Banach, ma non converge assolutamente (la serie delle norme è divergente).

Definizione 6.1.6 (Insieme nullo)**.** Siano $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach e $N \in \mathcal{M}$. Diremo che N è nullo per ν se $\nu(S) = 0$ per ogni $S \in \mathcal{M}_N$.

6.1.1 Variazione totale di una misura

Definizione 6.1.7 (Variazione totale)**.** Sia $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach. Definiamo $\|\nu\| : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ tale che

$$\|\nu\|(A) \coloneqq \sup \left\{ \sum_{j=1}^{N} \|\nu(A_j)\| \;\middle|\; \{A_1; \ldots; A_N\} \subseteq \mathcal{M} \text{ è una partizione di } A \right\}.$$

Osservazione 6.1.8. Nel contesto della definizione 6.1.7, per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale ovviamente che $\|\nu(A)\| \leq \|\nu\|(A)$.

Teorema 6.1.9. *Sia $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach. La variazione totale $\|\nu\| : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ è una misura.*

Dimostrazione. **Step 1**: Ovviamente vale che $\|\nu\|(\emptyset) = 0$; dobbiamo provare l'additività numerabile. Sia $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ una famiglia disgiunta; poniamo

$$A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j).$$

Sia $\{F_1; \dots; F_n\} \subseteq \mathcal{M}$ una partizione di A. Per la numerabile additività di ν vale che

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \|\nu(F_l)\| &= \sum_{l=1}^{n} \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(F_l \cap A_j) \right\| \\
&\le \sum_{l=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{N}} \|\nu(F_l \cap A_j)\| \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{n} \|\nu(F_l \cap A_j)\| \\
&\le \sum_{j\in\mathbb{N}} \|\nu\|(A_j),
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla definizione della variazione totale. Passando all'estremo superiore sulle partizioni finite di A, otteniamo che

$$\|\nu\|(A) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \|\nu\|(A_j).$$

Step 2: Dobbiamo mostrare la disuguaglianza opposta; possiamo supporre che $\|\nu\|(A)$ sia finito, altrimenti la disuguaglianza è ovvia. Sia $\{A_{j,1}; \dots; A_{j,p_j}\} \subseteq \mathcal{M}$ una partizione di A_j. Osserviamo che

$$\sum_{l=1}^{p_j} \|\nu(A_{j;l})\| + \|\nu(A \setminus A_j)\| \le \|\nu\|(A).$$

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni finite di A_j formate da elementi di $\mathcal{M}$, si deduce che

$$\|\nu\|(A_j) \le \|\nu\|(A) < +\infty.$$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Sia $\{B_{j,1}; \dots; B_{j,p_j}\} \subseteq \mathcal{M}$ una partizione di A_j tale che

$$\|\nu\|(A_j) - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \le \sum_{l=1}^{p_j} \|\nu(B_{j,l})\|.$$

Segue che

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\nu\|(A_j) - \varepsilon \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{p_j} \|\nu(B_{j,l})\|.$$

Poniamo

$$\mathcal{P}_n := \{B_{j,l} \mid j \in \{0; \dots; n\},\ l \in \{1; \dots; p_j\}\} \cup \left\{ \bigcup_{s=n+1}^{\infty} A_s \right\};$$

è una partizione finita di A formata da elementi di $\mathcal{M}$. Si trova che

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{l=1}^{p_j} \|\nu(B_{j,l})\| \leq \|\nu\| (A).$$

Prendendo il limite per n che tende a $+\infty$, si deduce che

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{p_j} \|\nu(B_{j,l})\| \leq \|\nu\| (A).$$

Otteniamo che

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\nu\| (A_j) - \varepsilon \leq \|\nu\| (A).$$

La conclusione segue dall'arbitrarietà di ε. $\square$

Osservazione 6.1.10. Sia $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach. Un insieme $F \in M$ è nullo per ν se e solo se $\|\nu\| (F) = 0$. Dalla definizione di variazione totale di una misura (vedi 6.1.7) segue immediatamente che se $\|\nu\| (F)$, per ogni $S \in \mathcal{M}_F$ vale che $\|\nu(S)\| = 0$, da cui $\nu(S) = 0$. L'altra implicazione è analoga.

Esempio 6.1.11. Sia $\nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa. La definizione di variazione totale (vedi 6.1.7) ha senso anche per ν; del resto, dalla finita additività e dalla positività di ν, si deduce che $\nu = \|\nu\|$.

Esempio 6.1.12. Sia $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura con segno finita con segno; per il teorema di decomposizione di Jordan (vedi 5.2.8), esistono delle misure $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ mutualmente singolari tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Vogliamo mostrare che $\|\nu\| = \nu^+ + \nu^-$. Sia $B \in \mathcal{M}$; fissata una partizione $\{B_1; \dots ; B_N\} \subseteq \mathcal{M}$ di B, vale che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |\nu(B_i)| &= \sum_{i=1}^{N} \left|\nu^+(B_i) - \nu^-(B_i)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \nu^+(B_i) + \nu^-(B_i) \\
&= \nu^+(B) + \nu^-(B).
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore sulle partizioni finite di B, si ottiene che $\|\nu\| \leq \nu^+ + \nu^-$.

Vogliamo provare la disuguaglianza opposta. Per fissare la notazione, supponiamo che ν^+ sia supportata in $A^+ \in \mathcal{M}$ e che ν^- sia supportata in $A^- \in \mathcal{M}$, con $A^+ \cap A^- = \emptyset$ e $A^+ \cup A^- = \mathbb{X}$. Osserviamo che $\{A^+ \cap B; A^- \cap B\} \subseteq \mathcal{M}$ è una partizione di B. Per le ipotesi su ν^+ e ν^-, vale che

$$\nu^+(B) + \nu^-(B) = \nu(B \cap A^+) + \nu(B \cap A^-) \leq \|\nu\| (B).$$

Osservazione 6.1.13. Notiamo che la definizione di variazione totale (vedi 6.1.7) ha senso anche se $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una misura con segno, non necessariamente finita. Considerando la decomposizione di Jordan di ν in misure mutualmente singolari come $\nu = \nu^+ - \nu^-$ (vedi 5.2.8), è facile provare che

$$\|\nu\| = \nu^+ + \nu^-,$$

ragionando come nell'esempio 6.1.12.

Sulla finitezza della variazione totale

Lemma 6.1.14. *Se E ha dimensione finita. Esiste una costante $C>0$ dipendente solo dalla dimensione di E tale che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ per ogni $v_1, \dots, v_n \in E$ vale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \|v_i\| \leq C \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left\| \sum_{i\in B} v_i \right\|.$$

Dimostrazione. Essendo E uno spazio di Banach di dimensione finita (a meno di costanti universali), possiamo supporre che E coincida con $\mathbb{R}^M$ e che sia dotato della norma

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{M} \left|v^i\right|,$$

intendendo che $v = (v^1; \dots; v^M)$. Possiamo procedere per induzione su M. Supponiamo $M = 1$; sia $\{v_1; \dots; v_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo l'insieme

$$C \coloneqq \{i \in \{1;\dots;n\} \mid v_i \leq 0\}.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |v_i| &= \sum_{i\in C} v_i - \sum_{i \in C^c} v_i \\
&\leq \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left| \sum_{i\in B} v_i \right| + \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left| \sum_{i\in B} v_i \right| \\
&= 2 \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left| \sum_{i\in B} v_i \right|.
\end{aligned}$$

Supponiamo che la tesi valga in $\mathbb{R}^M$ con una costante C_M e mostriamo che vale in $\mathbb{R}^{M+1}$. Dato $v = (v^1; \dots; v^M; v^{M+1}) \in \mathbb{R}^{M+1}$, definiamo $P(v) \coloneqq (v^1; \dots; v^M) \in \mathbb{R}^M$. Dati $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{M+1}$, vale che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \|P(v_i)\|_1 + \sum_{i=1}^{n} \left|v_i^{M+1}\right| \\
&\leq C_M \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left\| \sum_{i\in B} P(v_i) \right\|_1 + 2 \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left| \sum_{i\in B} v_i^{M+1} \right| \\
&\leq C_M \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left\| \sum_{i\in \mathcal{B}} v_i \right\|_1 + 2 \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left\| \sum_{i\in \mathcal{B}} v_i \right\|_1 \\
&= (C_M + 2) \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left\| \sum_{i\in \mathcal{B}} v_i \right\|_1,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi induttiva e il fatto che per ogni $w \in E$ vale che

$$\|P(w)\|_1 \leq \|w\|_1, \ \left|w^{M+1}\right| \leq \|w\|_1.$$

Allora, basta porre $C_{M+1} \coloneqq C_M + 2$. □

Lemma 6.1.15. *Se E ha dimensione finita, la misura $\nu : \mathcal{M} \to E$ assume valori in un insieme limitato.*

Dimostrazione. **Step 1**: Iniziamo osservando che se $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è una misura con segno finita (cioè una misura a valori in uno spazio di Banach di dimensione 1), allora ν assume valori in un insieme limitato. Infatti, per il teorema di decomposizione di Jordan (vedi 5.2.8), esistono due misure non negative $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Essendo ν una misura finita, è immediato dedurre che anche ν^+ e ν^- sono misure finite; allora ν^+ e ν^- assumono valori in un insieme limitato. Si ottiene che anche ν ha valori in un insieme limitato.

Step 2: Sia $\{e_1; \dots; e_M\}$ una base di E; per ogni $i \in \{1; \dots; n\}$ denotiamo con $P_i : E \to \mathbb{R}$ la proiezione sulla i-esima coordinata. Essendo P_i un'applicazione lineare e continua, $P_i \circ \nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è una misura con segno; allora esiste $l_i > 0$ tale che $|P_i \circ \nu(A)| \leq l_i$ per ogni $A \in \mathcal{M}$. Notiamo che

$$\|v\|_1 \coloneqq \sum_{i=1}^{n} |P_i(v)|$$

è una norma su E e che per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\|\nu(A)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

Essendo E uno spazio di dimensione finita, deduciamo che ν è limitata anche rispetto alla norma di cui E era inizialmente dotato. □

Proposizione 6.1.16. *Se E ha dimensione finita e $\nu : \mathcal{M} \to E$ è una misura a valori in uno spazio di Banach, allora $\|\nu\|(\mathbb{X}) < +\infty$.*

Dimostrazione. Sia $\{A_1; \dots; A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ una partizione di $\mathbb{X}$. Per il lemma 6.1.14, esiste una costante C dipendente solo dalla dimensione di E tale che

$$\sum_{i=1}^{n} \|\nu(A_i)\| \leq C \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left\| \sum_{i \in B} \nu(A_i) \right\| = C \max_{B \subseteq \{1;\dots;n\}} \left\| \nu\left(\bigcup_{i \in \mathcal{B}} A_i \right) \right\| \leq C \sup_{K \in \mathcal{M}} \|\nu(K)\|.$$

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni finite di $\mathbb{X}$ formate da insiemi di $\mathcal{M}$, troviamo che

$$\|\nu\|(\mathbb{X}) \leq C \sup_{K \in \mathcal{M}} \|\nu(K)\|.$$

Allora, la conclusione segue immediatamente dal lemma 6.1.15. □

6.2 Assoluta continuità di misure

Definizione 6.2.1 (Assoluta continuità di misure)**.** Siano $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa. Si dice che ν è assolutamente continua rispetto a μ e si indica $\nu << \mu$ se per ogni $A \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A) = 0$, allora vale $\nu(A') = 0$ per ogni $A' \in \mathcal{M}_A$.

Osservazione 6.2.2. Nel contesto della definizione 6.2.1, vale che $\nu << \mu$ se e solo se $\|\nu\| << \mu$ (vedi 6.1.10).

Teorema 6.2.3. *Supponiamo che E abbia dimensione finita; siano $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa. Sono fatti equivalenti:*

- $\nu << \mu$;
- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $A \in \mathcal{M}$ e $\mu(A) < \delta$, allora $\|\nu(A)\| < \varepsilon$.*

Dimostrazione. La seconda condizione implica ovviamente la prima.

Per mostrare l'altra implicazione procediamo per assurdo. Supponiamo che esista $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $A_n \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ e $\|\nu(A_n)\| \geq \varepsilon_0$. Definiamo

$$S := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

Per ogni $m \geq n$ vale che

$$\varepsilon_0 \leq \|\nu(A_n)\| \leq \|\nu\| (A_n) \leq \|\nu\| \left(\bigcup_{m\geq n} A_m \right).$$

Essendo E uno spazio di Banach di dimensione finita, vale che $\|\nu\| (\mathbb{X}) < +\infty$ (vedi 6.1.16); allora, passando al limite per n che tende a $+\infty$, otteniamo che

$$\|\nu\| (S) = \lim_{n\to+\infty} \|\nu\| \left(\bigcup_{m\geq n} A_m \right) \geq \varepsilon_0.$$

Del resto, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\mu \left(\bigcup_{m\geq n} A_m \right) \leq \sum_{m\geq n} \frac{1}{2^m}.$$

Passando all'estremo inferiore in n, si ottiene che

$$\mu(S) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\geq n} \frac{1}{2^m} = 0,$$

che è assurdo. □

6.2.1 Misure definite da una densità

Esempio 6.2.4. Siano $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa e $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Detta detta $f = f^+ - f^-$ la decomposizione di f in parte positiva e negativa, si ha che

$$\max \left\{ \int_{\mathbb{X}} f^+ \, d\mu; \int_{\mathbb{X}} f^- \, d\mu \right\} < +\infty.$$

Dato $A \in \mathcal{M}$, definiamo

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu.$$

Per definizione, vale che

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu;$$

vogliamo provare che ν è una misura finita con segno. Ovviamente vale che $\rho(\emptyset) = 0$; data $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ una famiglia disgiunta, poniamo $A \coloneqq \bigcup_n A_n$. Per il teorema di convergenza dominata (f è una dominazione ammissibile), vale che

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \, d\mu;$$

è immediato osservare che la serie a destra converge incondizionatamente. Questo è sufficiente a concludere che ν è una misura con segno. Per il teorema di decomposizione di Jordan (vedi 5.2.8), esistono due misure $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ mutualmente singolari, tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Essendo

$$\nu(A) = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu$$

e ricordando che $f^+, f^- : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ sono tali che $f^+ = \max\{f; 0\}$, $f^- = \max\{-f; 0\}$, è immediato dedurre che

$$\rho^+(A) \coloneqq \int_A f^+ \, d\mu, \ \rho^-(A) \coloneqq \int_A f^- \, d\mu$$

sono misure non negative, mutualmente singolari e tali che $\nu = \rho^+ - \rho^-$. Per l'unicità della decomposizione di Jordan, otteniamo che $\rho^+ = \nu^+$ e $\rho^- = \nu^-$. Per quanto mostrato in 6.1.12, è immediato concludere che per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\|\nu\|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A) = \int_A f^+ \, d\mu + \int_A f^- \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu.$$

Osservazione 6.2.5. Sia $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile tale che

$$\min\left\{\int_{\mathbb{X}} f^+ \, d\mu; \int_{\mathbb{X}} f^- \, d\mu\right\} < +\infty.$$

Le argomentazioni dell'esempio 6.2.4 possono essere facilmente adattate per mostrare che

$$\nu(A) \coloneqq \int_A f \, d\mu$$

è ben definito per ogni $A \in \mathcal{M}$ e ν è una misura con segno a valori in $\overline{\mathbb{R}}$; detta $f = f^+ - f^-$ la decomposizione in parte positiva e negativa, si trova che per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\|\nu\|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A) = \int_A f^+ \, d\mu + \int_A f^- \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu.$$

Corollario 6.2.6. *Siano $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa e $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $A \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A) < \delta$ vale che*

$$\left|\int_A f \, d\mu\right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Per ogni $A \in \mathcal{M}$ poniamo

$$\nu(A) := \int_A f \; d\mu.$$

Abbiamo già mostrato che $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è una misura finita con segno (vedi 6.2.4); in particolare, ν è una misura a valori in uno spazio di Banach di dimensione finita, secondo la definizione 6.1.3. Ovviamente, se $\mu(A) = 0$, vale che $\nu(A') = 0$ per ogni $A' \in \mathcal{M}_A$; quindi ν è assolutamente continua rispetto a μ. Per quanto provato in 6.2.3, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con la proprietà che per ogni $A \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A) < \delta$ vale che

$$\left| \int_A f \; d\mu \right| = |\nu(A)| < \varepsilon.$$

□

Definizione 6.2.7 (Derivata di Radon-Nikodym)**.** Siano $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa, $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura con segno e $g : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Supponiamo che per ogni $A \in \mathcal{M}$ valga

$$\nu(A) = \int_A g \; d\mu.$$

Si dice che ν è una misura definita da una densità rispetto a μ e che g è una versione della derivata alla Radon-Nikodym di ν rispetto a μ. Si indica $\nu = g \cdot \mu$ e $g = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Lemma 6.2.8. *Siano $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa e $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura finita con segno. Supponiamo che ν sia definita da una densità rispetto a μ (vedi 6.2.7). Allora la derivata alla Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{d\mu}$ è univocamente determinata a meno di insiemi di misura μ nulla.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano due funzioni integrabili $g_1, g_2 : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\int_A g_1 \; d\mu = \nu(A) = \int_A g_2 \; d\mu.$$

Poniamo $B := \{g_1 < g_2\}$; deduciamo che

$$\int_B g_1 \; d\mu - \int_B g_2 \; d\mu = 0.$$

Ricordiamo che tutti gli integrali sono finiti, da 2.2.14 segue che

$$\int_B (g_1 - g_2) \; d\mu = 0.$$

Questa condizione è incompatibile con il fatto che $\mu(B) > 0$; allora deve valere che $\mu(B) = 0$. Analogamente si prova che $\mu(\{g_2 < g_1\}) = 0$ e questo è sufficiente a concludere. □

Proposizione 6.2.9 (Formula di integrazione rispetto ad una misura definita da una densità)**.** *Supponiamo che $\nu, \mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ siano misure non negative, eventualmente infinite. La nozione di derivata alla Radon-Nikodym (vedi 6.2.7) ha perfettamente senso* *anche in questo contesto. Supponiamo che esista la derivate alla Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{d\mu}$. Allora $\frac{d\nu}{d\mu}$ coincide quasi ovunque (rispetto a μ) con una funzione non negativa. Sia $f : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Allora vale la formula*

$$\int_{\mathbb{X}} f \; d\nu = \int_{\mathbb{X}} \left(f \frac{d\nu}{d\mu} \right) \; d\mu.$$

In particolare, se esiste anche la derivata alla Radon-Nikodym $\frac{d\mu}{d\nu}$, vale che

$$\left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^{-1} = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Si osserva immediatamente che $\frac{d\nu}{d\mu}(x) \geq 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ (rispetto a μ). Per ogni insieme $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_A \; d\nu = \nu(A) = \int_{\mathbb{X}} \left(\mathbb{1}_A \frac{d\nu}{d\mu} \right) \; d\mu.$$

Allora la formula di integrazione rispetto ad una misura definita da una densità vale per le funzioni indicatrici; per linearità si estende alle funzioni semplici. Sia $f : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile; come mostrato in 2.1.18, sia $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici non negative che tende puntualmente a f crescendo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} \varphi_n \; d\nu = \int_{\mathbb{X}} \left(\varphi_n \frac{d\nu}{d\mu} \right) \; d\mu.$$

Passando all'estremo superiore con il teorema di Beppo Levi, si deduce che

$$\int_{\mathbb{X}} f \; d\nu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{X}} \varphi_n \; d\nu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{X}} \left(\varphi_n \frac{d\nu}{d\mu} \right) \; d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left(f \frac{d\nu}{d\mu} \right) \; d\mu.$$

Step 2: Supponiamo che esista $\frac{d\mu}{d\nu}$; per quanto mostrato nel passo precedente, coincide quasi ovunque (rispetto a ν e quindi anche rispetto a μ, per assoluta continuità) con una funzione non negativa. Per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\int_A 1 \; d\nu = \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_A \left(\frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\nu} \right) \; d\nu.$$

Deduciamo che per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ (rispetto a μ o ν) vale che

$$1 = \frac{d\nu}{d\mu}(x) \frac{d\mu}{d\nu}(x).$$

□

6.2.2 Teorema di Radon-Nikodym

Definizione 6.2.10 (Misure mutualmente singolari)**.** Siano $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach e $\beta : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ una misura con segno. Diciamo che ν, β sono mutualmente singolari se esistono $A, B \in \mathcal{M}$ disgiunti tali che A è nullo per β, B è nullo per ν e $\mathbb{X} = A \cup B$. Scriveremo $\nu \perp \beta$.

Osservazione 6.2.11. Nel contesto della definizione 6.2.10, vale che $\nu \perp \beta$ se e solo se $\|\nu\| \perp \beta$ (vedi 6.1.10). Inoltre, se $\nu \perp \beta$ e $\nu << \beta$, allora $\nu \equiv 0$.

Lemma 6.2.12. *Siano $\mu, \nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ misure non negative finite. Sono alternativi i seguenti fatti:*

- *$\mu \perp \nu$;*
- *esiste $A \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A) > 0$ ed esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\nu_{\lfloor A} \geq \varepsilon_0 \mu_{\lfloor A}$.*

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo la misura con segno $\alpha_k := \nu - e^{-k}\mu$. Osserviamo che la successione $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è ben definita perchè le misure μ, ν sono finite. Per il teorema di Hahn (vedi 5.2.4), per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una partizione $\{P_k, N_k\} \subseteq \mathcal{M}$ di $\mathbb{X}$ tale che P_k è positivo per α_k e N_k è negativo per α_k. Poniamo

$$P := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k, \;\; N := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_k^c = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} N_k.$$

Osserviamo che N è negativo per α_k per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque, vale che

$$\nu(N) - e^{-k}\mu(N) \leq 0$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se prendiamo il limite per k che tende a $+\infty$, deduciamo che $\nu(N) \leq 0$, ovvero $\nu(N) = 0$. Se $\mu(P) = 0$, allora otteniamo che $\mu \perp \nu$; in tal caso vale la prima condizione. Altrimenti, $\mu(P) > 0$, dunque esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(P_{n_0}) > 0$. Del resto, vale che

$$0 \leq \alpha_{n_0 \lfloor P_{n_0}} = \nu_{\lfloor P_{n_0}} - e^{-n_0}\mu_{\lfloor P_{n_0}},$$

da cui segue immediatamente la tesi. □

Teorema 6.2.13 (Radon-Nikodym)**.** *Siano $\nu, \mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ misure σ-finite. Allora esistono e sono uniche due misure $\rho, \lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ non negative e σ-finite tali che*

- *$\rho << \mu$;*
- *$\lambda \perp \mu$;*
- *$\nu = \lambda + \rho$.*

Infine esiste una funzione $g : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ misurabile tale che $\rho = g \cdot \mu$ e g è unica a meno di insiemi di misura μ nulla. In particolare, se $\nu << \mu$, allora $\lambda \equiv 0$, cioè $\nu = g \cdot \mu$.

Dimostrazione. **Step 1**: Mostriamo l'esistenza della decomposizione nel caso in cui μ e ν siano misure finite. Poniamo

$$F := \left\{ f : \mathbb{X} \to [0, +\infty] \;\middle|\; f \text{ è misurabile}, \int_A f \, d\mu \leq \nu(A) \; \forall A \in \mathcal{M} \right\}.$$

Osserviamo che $F \neq \emptyset$, perchè contiene la funzione nulla. Notiamo che se $f_1, f_2 \in F$, allora $f_1 \vee f_2 \in F$. Infatti per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\begin{aligned}\int_A f_1 \vee f_2 \, d\mu &= \int_{A\cap\{f_1\leq f_2\}} f_2 \, d\mu + \int_{A\cap\{f_1>f_2\}} f_1 d\mu \\ &\leq \mu(A \cap \{f_1 \leq f_2\}) + \mu(A \cap \{f_1 > f_2\}) \\ &= \mu(A).\end{aligned}$$

Ragionando ricorsivamente, si mostra che se $f_1, \dots, f_n \in F$, allora $f_1 \vee \cdots \vee f_n \in F$. Per ogni $f \in F$ osserviamo che

$$\int_{\mathbb{X}} f \; d\mu \le \nu(\mathbb{X}) < +\infty;$$

dunque, se poniamo

$$a \coloneqq \sup \left\{ \int_{\mathbb{X}} f \; d\mu \;\middle|\; f \in F \right\},$$

deduciamo che $a < +\infty$. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n \; d\mu = a.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$g_n = \max_{k\le n} f_k.$$

Osserviamo che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$, è una successione puntualmente crescente e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} f_n \; d\mu \le \int_{\mathbb{X}} g_n \; d\mu.$$

Allora, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} g_n \; d\mu = a.$$

Se denotiamo con

$$g(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x),$$

per il teorema di Beppo Levi vale che

$$\int_{\mathbb{X}} g \; d\mu = a = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} g_n \; d\mu.$$

In maniera analoga, osserviamo che per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\nu(A) \ge \lim_{n\to+\infty} \int_A g_n \; d\mu = \int_A g \; d\mu.$$

In altri termini, abbiamo provato che $g \in F$. Se poniamo $\lambda \coloneqq \nu - g \cdot \mu$, osserviamo che $\nu = \lambda + g\mu$. Osserviamo che λ è una misura ben definita e, per costruzione, è non negativa. Vogliamo provare che $\lambda \perp \mu$. Supponiamo per assurdo che non sia vero; allora il lemma 6.2.12 garantisce l'esistenza di un insieme $A_0 \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A_0) > 0$ e di $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\lambda_{\lfloor A_0} \ge \varepsilon_0 \mu_{\lfloor A_0}$. Abbiamo che $\nu_{\lfloor A_0} - g \cdot \mu_{\lfloor A_0} \ge \varepsilon_0 \mu_{\lfloor A_0}$, da cui segue che

$$\nu_{\lfloor A_0} \ge \varepsilon_0 \mu_{\lfloor A_0} + g \cdot \mu_{\lfloor A_0}.$$

Per costruzione vale anche che

$$\nu_{\lfloor A_0^c} \ge g \cdot \mu_{\lfloor A_0^c}.$$

Sommando le due disuguaglianze, si deduce che

$$\nu \ge g \cdot \mu + \varepsilon_0 \mu_{\lfloor A_0} = (g + \varepsilon_0 \mathbb{1}_{A_0}) \cdot \mu.$$

Dunque, vale che $g + \varepsilon_0 \mathbb{1}_{A_0} \in F$; essendo $\mu(A_0) > 0$, si ha che

$$\int_{\mathbb{X}} (g + \varepsilon_0 \mathbb{1}_{A_0})\, d\mu > a,$$

che è assurdo perchè contrario alla massimalità di a.

Step 2: Mostriamo l'unicità della decomposizione nel caso in cui μ e ν siano misure finite. Supponiamo che esistano due decomposizioni

$$\nu = \lambda + g \cdot \mu = \lambda' + g' \cdot \mu,$$

con $g, g' : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili e $\lambda, \lambda' : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ misure finite e mutualmente singolari rispetto a μ. Essendo ν una misura finita, deve valere che g, g' sono funzioni con integrale rispetto a μ finito. Allora, a meno di modificarle in insiemi di misura μ nulla, possiamo supporre che siano a valori finiti; in particolare, è ben definita la differenza puntuale $g - g'$ e vale che $\lambda - \lambda' = (g' - g) \cdot \mu$. Dunque $\lambda - \lambda'$ è una misura con segno assolutamente continua rispetto a μ; inoltre, è mutualmente singolare rispetto a μ; deduciamo che $\lambda - \lambda' \equiv 0$. Allora $g \cdot \mu = g' \cdot \mu$, da cui segue facilmente che $g(x) = g'(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.

Step 3: Mostriamo l'esistenza della decomposizione nel caso in cui μ e ν siano misure σ-finite. Esiste una partizione $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ tale che $\nu(A_j) < +\infty, \mu(A_j) < +\infty$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Poniamo $\nu_j \coloneqq \nu_{\lfloor A_j}$ e $\mu_j \coloneqq \mu_{\lfloor A_j}$. Essendo misure finite, per ogni $j \in \mathbb{N}$ esistono una misura $\lambda_j : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ e una funzione misurabile $g_j : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ tale che $\nu_j = \lambda_j + g_j \cdot \mu_j$ e $\lambda_j \perp \mu_j$. Possiamo anche supporre che $g_j(x) = 0$ per ogni $x \in A_j^c$, dal momento che A_j^c ha misura μ_j nulla. Poniamo

$$g \coloneqq \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j, \ \ \lambda \coloneqq \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j.$$

Per il teorema di Beppo Levi, vale che

$$\nu = \sum_{j=0}^{+\infty} \nu_j, \ \ g \cdot \mu = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} g_j \right) \cdot \mu.$$

Allora, concludiamo che

$$\nu = \sum_{j=0}^{+\infty} \nu_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j + g_j \cdot \mu = \lambda + g \cdot \mu.$$

Infine, si verifica facilmente che $\lambda \perp \mu$.

Step 4: Mostriamo l'unicità della decomposizione nel caso in cui μ e ν siano misure σ-finite. Supponiamo che esistano due misure $\lambda, \lambda' : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ mutualmente singolari rispetto a μ e che esistano due funzioni misurabili $g, g' : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ tali che

$$\nu = \lambda + g \cdot \mu = \lambda' + g \cdot \mu.$$

Sia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ una partizione di $\mathbb{X}$ tale che $\nu(A_j) < +\infty$ e $\mu(A_j) < +\infty$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Per restrizione ad ogni insieme A_j, deduciamo che $\lambda_{\lfloor A_j} = \lambda'_{\lfloor A_j}$ e $(g \cdot \mu)_{\lfloor A_j} = (g' \cdot \mu)_{\lfloor A_j}$; allora $g_{|A_j} = g'_{\lfloor A_j}$ per quasi ogni $x \in A_j$. Deduciamo che $g = g'$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$. Inoltre, per il teorema di Beppo Levi, vale che

$$\lambda = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_{\lfloor A_j} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda'_{\lfloor A_j} = \lambda'.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 6.2.14. *Siano $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ una misura con segno σ-finita e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura σ-finita. Allora esistono e sono uniche due misure σ-finite $\rho, \lambda : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che*

- $\rho << \mu$;
- $\lambda \perp \mu$;
- $\nu = \lambda + \rho$ *e la somma è ben definita.*

Infine esiste una funzione $g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile con le seguenti proprietà:

- *detta $g = g^+ - g^-$ la decomposizione di g in parte positiva e parte negativa, vale che*
$$\min\left\{\int_{\mathbb{X}} g^+ \, d\mu; \int_{\mathbb{X}} g^- \, d\mu\right\} < +\infty;$$
- $\rho = g \cdot \mu$, *osservando che la misura $g \cdot \mu$ è ben definita per quanto precisato nel punto precedente;*
- *g è unica a meno di insiemi di misura μ nulla.*

In particolare, se $\nu << \mu$, allora $\lambda \equiv 0$, cioè $\nu = g \cdot \mu$.

Dimostrazione. **Step 1**: Per il lemma 5.1.2, possiamo supporre che $\nu(\mathcal{M}) \subseteq (-\infty, +\infty]$: infatti, se fosse $\nu(\mathcal{M}) \subseteq [-\infty, +\infty)$ potremmo ragionare in maniera totalmente analoga. Per il teorema decomposizione di Jordan (vedi 5.2.8), esistono due misure $\nu^+ : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$, $\nu^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ mutualmente singolari e tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Si osserva facilmente che ν^+ è una misura σ-finita; ovviamente ν^- è una misura finita. Per il teorema di Radon-Nikodym (vedi 6.2.13), esistono delle misure $\lambda^+, \lambda^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ e delle funzioni misurabili $g^+, g^- : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ con le seguenti proprietà:

- $\nu^+ = \lambda^+ + g^+ \cdot \mu$, $\nu^+ = \lambda^- + g^+ \cdot \mu$;
- $g^+ \cdot \mu << \mu$, $g^- \cdot \mu << \mu$;
- $\lambda^+ \perp \mu$, $\lambda^- \perp \mu$;
- g^+, g^- sono uniche a meno di insiemi di misura μ nulla.

Osserviamo che λ^- è una misura finita non negativa. Se poniamo $\lambda := \lambda^+ - \lambda^-$, è immediato verificare che λ è una misura a valori in $(-\infty, +\infty]$.

Per fissare la notazione, supponiamo che ν^+ sia supportata in $A^+ \in \mathcal{M}$ e ν^- sia supportata in $A^- \in \mathcal{M}$, con $A^+ \cup A^- = \mathbb{X}$; essendo ν^+ e ν^- mutualmente singolari, si può supporre che $A^+ \cap A^- = \emptyset$. Osserviamo che $g^+ \cdot \mu$ è supportata in A^+ e che $g^- \cdot \mu$ è supportata in A^-; allora (a meno di modificare g^+, g^- in insiemi di misura μ nulla), possiamo supporre che $g^+(x) = 0$ per ogni $x \in A^-$ e $g^-(x) = 0$ per ogni $x \in A^+$. Essendo ν^- una misura finita, vale che

$$\int_{\mathbb{X}} g^- \, d\mu < +\infty.$$

Se poniamo $g := g^+ - g^-$, osserviamo che g è una funzione misurabile puntualmente ben definita (e che g^+, g^- coincide con la sua decomposizione in parte positiva e negativa).

Si osserva facilmente che $g \cdot \mu$ è una misura con segno a valori in $(-\infty, +\infty]$ e che $g \cdot \mu = g^+ \cdot \mu - g^- \cdot \mu$. Allora otteniamo che

$$\nu = \nu^+ - \nu^- = (\lambda^+ - \lambda^-) + (g^+ \cdot \mu - g^- \cdot \mu) = \lambda + g \cdot \mu.$$

Step 2: Supponiamo che esistano due decomposizioni di ν, cioè

$$\lambda_1 + \rho_1 = \nu = \lambda_2 + \rho_2,$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$ aventi le proprietà indicate nell'enunciato del teorema. Per il teorema di decomposizione di Jordan (vedi 5.2.8), esistono misure non negative tali che

$$\lambda_1 + \rho_1 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + \rho_1^+ - \rho_1^-,$$

$$\lambda_2 + \rho_2 = \lambda_2^+ - \lambda_2^- + \rho_2^+ - \rho_2^-.$$

Allora, si ha che

$$(\lambda_1^+ + \rho_1^+) - (\lambda_1^- + \rho_1^-) = \nu = (\lambda_2^+ + \rho_2^+) - (\lambda_2^- + \rho_2^-).$$

Per l'unicità della decomposizione di Jordan per ν (vedi 5.2.8), si ottiene che

$$\lambda_1^+ + \rho_1^+ = \nu^+ = \lambda_2^+ + \rho_2^+,$$

$$\lambda_1^- + \rho_1^- = \nu^- = \lambda_2^- + \rho_2^-.$$

Osservando che le proprietà delle misure introdotte permettono di applicare il teorema di Radon-Nikodym (vedi 6.2.13), si conclude che

$$\rho_1^+ = \rho_2^+, \ \rho_1^- = \rho_2^-,$$

$$\lambda_1^+ = \lambda_2^+, \ \lambda_1^- = \lambda_2^-,$$

da cui segue che $\rho_1 = \rho_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$.

L'unicità a meno di insiemi di misura μ nulla della funzione g può essere dedotta in maniera totalmente analoga. □

Corollario 6.2.15. *Supponiamo che E sia uno spazio di Banach di dimensione finita. Siano $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura σ-finita non negativa. Allora esistono e sono uniche due misure $\rho, \lambda : \mathcal{M} \to E$ a valori in uno spazio di Banach tali che*

- $\rho << \mu$;
- $\lambda \perp \mu$;
- $\nu = \lambda + \rho$.

Infine esiste una funzione $g : \mathbb{X} \to E$ misurabile e integrabile tale che $\rho = g \cdot \mu$ e g è unica a meno di insiemi di misura μ nulla. In particolare, se $\nu << \mu$, allora $\lambda \equiv 0$, cioè $\nu = g \cdot \mu$.

Dimostrazione. Sia $\{e_1; \ldots; e_n\}$ una base di E; denotiamo con $P_i : E \to \mathbb{R}$ la proiezione sulla i-esima componente. Essendo P_i lineare e continua, la mappa $\nu_i := P_i \circ \nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è una misura con segno a valori in $\mathbb{R}$. Per il corollario 6.2.14, esistono $\lambda_i, \rho_i : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- $\rho_i << \mu$;
- $\lambda_i \perp \mu$;
- $\nu_i = \lambda_i + \rho_i$.

Inoltre esiste una funzione $g_i : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile tale che $\rho_i = g_i\mu$. Essendo ν_i una misura con segno finita, è immediato dedurre che ρ_i, λ_i sono misure finite e che g_i è una funzione integrabile.

Per ogni $A \in \mathcal{M}$ poniamo

$$\lambda(A) := \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i(A), \quad \rho(A) := \sum_{i=1}^{n} e_i\rho_i(A).$$

Si verifica immediatamente che $\lambda, \rho : \mathcal{M} \to E$ sono misure a valori in uno spazio di Banach; inoltre, $\rho << \mu$ e $\lambda \perp \mu$. Se poniamo

$$g := \sum_{i=1}^{n} g_ie_i : \mathbb{X} \to E,$$

notiamo che g è misurabile (infatti $g_ie_i : \mathbb{X} \to E$ è misurabile) e per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\rho(A) = \sum_{i=1}^{n} e_i\rho_i(A) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i e_i \int_A g_i \ d\mu = \int_A \left(\sum_{i=1}^{n} g_ie_i\right) \ d\mu = \int_A g \ d\mu.$$

Inoltre g è integrabile perchè, per l'equivalenza delle norme in uno spazio vettoriale di dimensione finita, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{X}} \|g\| \ d\mu \le C \int_{\mathbb{X}} \|g\|_1 \ d\mu = C \int_E \sum_{i=1}^{n} |g_i| \ d\mu = C \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{X}} |g_i| \ d\mu < +\infty.$$

$\square$

Proposizione 6.2.16. *Siano $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa, E uno spazio di Banach di dimensione finita, $\nu : \mathcal{M} \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach assolutamente continua rispetto a μ. Detta $g : \mathbb{X} \to E$ una versione della densità di ν rispetto a μ, vale che*

$$\|\nu\| = \|g\mu\| = |g|\,\mu.$$

In particolare, se $\mu = \|\nu\|$, si deduce che $|g(x)| = 1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Notiamo che $g : \mathbb{X} \to E$ è ben definita e integrabile per quanto provato in 6.2.15; allora possiamo assumere che sia finita ovunque.

Step 1: Per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$\begin{aligned}
\|\nu\|(A) &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \|\nu(A_i)\| \ \middle|\ \{A_1; \ldots; A_n\} \subseteq \mathcal{M} \text{ è una partizione di } A\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left\|\int_{A_i} g \ d\mu\right\| \ \middle|\ \{A_1; \ldots; A_n\} \subseteq \mathcal{M} \text{ è una partizione di } A\right\} \\
&\le \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |g| \ d\mu \ \middle|\ \{A_1; \ldots; A_n\} \subseteq \mathcal{M} \text{ è una partizione di } A\right\} \\
&= \int_A |g| \ d\mu = |g|\,\mu(A).
\end{aligned}$$

Deduciamo che $\|\nu\| \leq |g|\,\mu$.

Step 2: Mostriamo che per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che $\|\nu\|(A) \geq |g|\,\mu(A)$. Sia $\{L_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ un sottospazio numerabile denso nella sfera unitaria di E' (duale topologico di E): l'esistenza di tale sottoinsieme segue dal fatto che E' è uno spazio metrico separabile, essendo E uno spazio di Banach di dimensione finita. Ricordiamo che per ogni $y \in E$ vale che

$$|y| = \sup_{h\in\mathbb{N}} L_h(y);$$

questo fatto è una conseguenza immediata del teorema di Hanh-Banach. Fissiamo $\varepsilon > 0$; per ogni $y \in E$ esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$L_h(y) \geq (1-\varepsilon)\,|y|\,.$$

Notiamo che è possibile definire una partizione $\{\mathbb{X}_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ in insiemi misurabili (a due a due disgiunti) tali che per ogni $h \in \mathbb{N}$ vale che

$$\mathbb{X}_h \subseteq \{x \in \mathbb{X} \mid L_h(g(x)) \geq |g(x)|\,(1-\varepsilon)\}.$$

Fissiamo $A \in \mathcal{M}$; notiamo che

$$A = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} A \cap \mathbb{X}_h$$

e l'unione è disgiunta. Osserviamo che dalla definizione di variazione totale di una misura (vedi 6.1.7) segue che per ogni $h \in \mathbb{N}$ vale che

$$\|\nu\|(A) \geq \sum_{k\leq h} \|\nu(A\cap\mathbb{X}_k)\| + \left\|\nu\left(\bigcup_{k>h} A\cap\mathbb{X}_k\right)\right\|.$$

Dunque, si ha che

$$\sum_{k\leq h} \|\nu(A\cap\mathbb{X}_k)\| \leq \|\nu\|(A);$$

passando all'estremo superiore in h, si trova che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\nu(A\cap\mathbb{X}_k)\| \leq \|\nu\|(A).$$

Ricordiamo che, essendo in uno spazio di Banach di dimensione finita, per ogni applicazione lineare e continua L e per ogni $A \in \mathcal{M}$ vale che

$$L\left(\int_A g\; d\mu\right) = \int_A L(g)\; d\mu.$$

Per ogni $h \in \mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}\|\nu(A\cap\mathbb{X}_h)\| &\geq L_h\left(\nu(A\cap\mathbb{X}_h)\right) = L_h\left(\int_{A\cap\mathbb{X}_h} g\; d\mu\right)\\ &= \int_{A\cap\mathbb{X}_h} L_h(g)\; d\mu \geq \int_{A\cap\mathbb{X}_h} (1-\varepsilon)\,|g|\; d\mu\\ &= (1-\varepsilon)\int_{A\cap\mathbb{X}_h} |g|\; d\mu.\end{aligned}$$

Segue che

$$\|\nu\|(A) \geq \sum_{h\in\mathbb{N}} \|\nu(A\cap\mathbb{X}_h)\| \geq \sum_{h\in\mathbb{N}} (1-\varepsilon)\int_{A\cap\mathbb{X}_h} |g|\ d\mu = (1-\varepsilon)\int_A |g|\ d\mu.$$

Essendo ε arbitrario, deduciamo che

$$\|\nu\|(A) \geq \int_A |g|\ d\mu = |g|\,\mu(A).$$

Step 3: Abbiamo già osservato che $\nu << \|\nu\|$ (vedi 7.3.4); detta $g = \frac{d\nu}{d\|\nu\|}$, vale che

$$\|\nu\| = \|g\,\|\nu\|\| = |g|\,\|\nu\|\,;$$

in particolare, si ha che $|g(x)| = 1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$. □

Esempio 6.2.17. In uno spazio di Banach di dimensione infinita non vale un analogo del teorema di Radon-Nikodym (vedi 6.2.13). Sia $\mathbb{X} = [0, 2\pi]$ dotato della misura di Lebesgue m_1; sia $\mathcal{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $[0, 2\pi]$; sia $E = c_0$ lo spazio delle successioni a valori complessi infinitesime. c_0 dotato della norma

$$\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\| := \sup_k |x_k|$$

è uno spazio di Banach; ovviamente c_0 ha dimensione infinita. Dato $A \in \mathcal{M}$ poniamo

$$\nu(A) := \left(\int_A 1\ dt; \int_A e^{it}\ dt; \ldots; \int_A e^{int}\ dt; \ldots\right).$$

Per il lemma di Riemann-Lebesgue, $\nu : \mathcal{M} \to c_0$ è ben definita. Inoltre, è immediato verificare che ν è una misura a valori in uno spazio di Banach. Notiamo che se $A \in \mathcal{M}$ è tale che $m_1(A) = 0$ allora $\nu(A) = 0$; quindi ν è assolutamente continua rispetto a m_1. Se valesse una versione del teorema di Radon-Nikodym, esisterebbe una funzione misurabile e integrabile a valori in c_0 tale che

$$\nu(A) = \int_A f\ dm_1.$$

Si vede facilmente che l'unica possibilità per f è che

$$f(t) = (1; e^{it}; \ldots e^{int}; \ldots).$$

Tuttavia, f non assume valori in c_0.

Duale di L^p, con $p \in [1, +\infty)$

Teorema 6.2.18. *Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale σ-finito, $p \in [1, +\infty)$, $q \in (1, +\infty]$ l'esponente coniugato di p e $L : \mathcal{L}^p(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare continuo. Esiste un unico elemento $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{X})$ tale che*

$$\|g\|_{L^q(\mathbb{X})} = \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}$$

e per ogni $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{X})$ vale che

$$L(u) = \int_{\mathbb{X}} ug\ d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbb{X}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una partizione misurabile di $\mathbb{X}$ tale che $\mu(\mathbb{X}_j) < +\infty$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Step 1: Supponiamo $p = 1$. Fissato $j \in \mathbb{N}$, per ogni $E \in \mathcal{M}$, poniamo

$$\nu_j(E) = T(\mathbb{1}_{E\cap\mathbb{X}_j}).$$

Essendo $L : \mathcal{L}^p(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ lineare e continuo (e $p < +\infty$), ν_j è una misura con segno su $\mathcal{M}$; inoltre è ovvio che ν_j è assolutamente continua rispetto a μ. Per il teorema di Radon-Nikodym esiste $g_j \in \mathcal{L}^1(\mathbb{X};\mu)$ tale che $\nu_j = g_j \cdot \mu$. Osserviamo che per ogni $E \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq \mathbb{X}_j$ vale che

$$\left|\int_E g_j \, d\mu\right| = |\nu_j(E)| = \left|L(\mathbb{1}_{E\cap\mathbb{X}_j})\right| = |L(\mathbb{1}_E)| \leq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} \|\mathbb{1}_E\|_{L^1(\mathbb{X})}.$$

Da ciò segue che

$$-\|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} \mu(E) \leq \int_E g_j \, d\mu \leq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} \mu(E)$$

per ogni $E \subseteq \mathbb{X}_j$ tale che $E \in \mathcal{M}$. Allora troviamo che per quasi ogni $x \in E_j$ vale che

$$|g_j(x)| \leq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'}.$$

In maniera del tutto analoga si mostra che per ogni $E \subseteq \mathbb{X}_j^c$ tale che $E \in \mathcal{M}$ vale che

$$\int_E g_j \, d\mu = 0,$$

da cui segue che $g_j(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}_j^c$.

A meno di cambiare rappresentante, possiamo supporre che $g_j(x) = 0$ per ogni $x \notin \mathbb{X}_j$ e che $|g_j(x)| \leq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'}$ per ogni $x \in \mathbb{X}_j$. Allora, se poniamo

$$g \coloneqq \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j,$$

osserviamo che la somma è ben definita e che

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \leq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'}.$$

Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < +\infty$. Per il teorema di Beppo Levi la successione

$$\left\{\sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{E\cap\mathbb{X}_j}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

converge in $L^1(\mathbb{X})$ a $\mathbb{1}_E$. Essendo $L : L^1(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ lineare e continua e utilizzando il teorema di convergenza dominata (infatti $|g| \cdot \mathbb{1}_E \in L^1(\mathbb{X})$), si ha che

$$\begin{aligned} L(\mathbb{1}_E) &= \lim_{n\to+\infty} L\left(\sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j\cap E}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \sum_{j=1}^n g_j \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j\cap E} \, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{X}} g\mathbb{1}_E \, d\mu. \end{aligned}$$

Definiamo il funzionale $\tilde{L} : L^1(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{X})$ vale che

$$\tilde{L}(f) := \int_{\mathbb{X}} fg \, d\mu.$$

Per la disuguaglianza di Hölder, $\tilde{L}$ è ben definito ed è continuo; inoltre, è ovviamente lineare. Abbiamo mostrato che L e $\tilde{L}$ coincidono sulle funzioni indicatrici di insiemi di misura finita; per linearità, allora, coincidono sulle funzioni semplici in $L^1(\mathbb{X})$. Poichè l'insieme delle funzioni semplici appartenenti a $L^1(\mathbb{X})$ è denso in $L^1(\mathbb{X})$ (vedi 3.2.12), L ed $\tilde{L}$ sono funzionali continui che coincidono su un sottospazio denso; pertanto, coincidono su $L^1(\mathbb{X})$.

Dobbiamo mostrare che $\|g\|_{L^\infty} \geq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'}$. Notiamo che dalla rappresentazione integrale di L e dalla disuguaglianza di Hölder segue che per ogni $u \in L^1(\mathbb{X})$ vale che

$$|L(u)| = \left| \int_{\mathbb{X}} gu \, d\mu \right| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \|u\|_{L^1(\mathbb{X})} .$$

Per definizione di norma operatoriale, vale che $\|g\|_{L^\infty} \geq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'}$.

Per quanto riguarda l'unicità della rappresentazione, supponiamo che esista $h \in L^\infty(\mathbb{X})$ tale che

$$\int_{\mathbb{X}} hu \, d\mu = L(u) = \int_{\mathbb{X}} gu \, d\mu$$

per ogni $u \in L^1(\mathbb{X})$. Si verifica facilmente che per ogni $j \in \mathbb{N}$ vale che $g(x) = h(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}_j$; allora g e h coincidono quasi ovunque in $\mathbb{X}$.

Step 2: Supponiamo che $p \in (1, +\infty)$. Fissiamo $j \in \mathbb{N}$; per ogni $u \in L^p(\mathbb{X})$, osserviamo che $u \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} \in L^p(\mathbb{X}_j)$; essendo $\mu(\mathbb{X}_j) < +\infty$, abbiamo che $u \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} \in L^1(\mathbb{X}_j)$. Osserviamo che la restrizione a $\mathbb{X}_j$ delle funzioni in $L^p(\mathbb{X})$ forma un sottospazio denso in $L^1(\mathbb{X}_j)$; allora, è possibile estendere L ad un funzionale lineare e continuo $L_j : L^1(\mathbb{X}_j) \to \mathbb{R}$. Sia $g_j \in L^\infty(\mathbb{X}_j)$ tale che

$$L_j(\mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} u) = \int_{\mathbb{X}_j} ug_j \, d\mu$$

per ogni $u \in L^p(\mathbb{X})$. Poniamo

$$g := \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j,$$

e mostriamo che $g \in L^q(\mathbb{X})$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$; osserviamo che

$$h_n := \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} |g_j|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}(g_j) \in L^p(\mathbb{X}).$$

Allora, vale che

$$\begin{aligned}
\|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \|h_n\|_{L^p(\mathbb{X})} \geq L(h_n) &= \sum_{j=0}^{n} L_j(\mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} |g_j|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}(g_j)) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \int_{\mathbb{X}_j} |g_j|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}(g_j) g_j \, d\mu = \sum_{j=0}^{n} \int_{\mathbb{X}_j} |g_j|^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} \sum_{j=0}^{n} |g_j|^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu = \|h_n\|_{L^p(\mathbb{X})}^p ,
\end{aligned}$$

da cui segue che
$$\|h_n\|_{L^p(\mathbb{X})}^{p-1} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}.$$
Essendo $p \in (1, +\infty)$ e $q = \frac{p}{p-1}$, osserviamo che
$$\begin{aligned}
\|h_n\|_{L^p(\mathbb{X})}^p &= \int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{j=0}^n |g_j| \right)^{\frac{p}{p-1}} d\mu = \int_{\mathbb{X}} \sum_{j=0}^n |g_j|^{\frac{p}{p-1}} d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} \sum_{j=0}^n |g_j|^q \ d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{j=0}^n |g_j| \right)^q d\mu \\
&= \left\| \sum_{j=0}^n |g_j| \right\|_{L^q(\mathbb{X})}^q .
\end{aligned}$$
Essendo $p \neq +\infty$, troviamo che
$$\left\| \sum_{j=0}^n |g_j| \right\|_{L^q(\mathbb{X})} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}.$$
Passando all'estremo superiore in n e utilizzando il teorema di Beppo Levi, si conclude che
$$\|g\|_{L^q(\mathbb{X})} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}.$$
Sia $u \in L^p(\mathbb{X})$. Osserviamo che la successione
$$\left\{ \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} u \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$
converge a u in $L^p(\mathbb{X})$ (perchè $p < +\infty$). Utilizzando la linearità e continuità di L e il teorema di convergenza dominata (infatti $|gu| \in L^1(\mathbb{X})$ per la disuguaglianza di Hölder), otteniamo che
$$\begin{aligned}
L(u) &= \lim_{n \to +\infty} L \left(\sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} u \right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^n L(\mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} u) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^n \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} g u \ d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{X}} \sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\mathbb{X}_j} g u \ d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} g u \ d\mu.
\end{aligned}$$
Per verificare l'unicità di g (a meno di insiemi di misura nulla) e il fatto che $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})} = \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}$ si può procedere come nel passo precedente. □

Corollario 6.2.19. *Siano $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio mensurale σ-finito, $p \in [1, +\infty)$, $q \in (1, +\infty]$ l'esponente coniugato di p. La mappa $J : L^q(\mathbb{X}) \to (L^p(\mathbb{X}))'$ tale che per ogni $g \in L^q(\mathbb{X})$ per ogni $u \in L^p(\mathbb{X})$ vale che*
$$J_g(u) = \int_{\mathbb{X}} g u \ d\mu$$
è ben definita ed è un'isometria lineare bigettiva.

Dimostrazione. Per ogni $g \in L^q(\mathbb{X})$ la mappa J_g è ben definita e continua per la disuguaglianza di Hölder. Inoltre è immediato verificare che J_g è un'applicazione lineare su $L^p(\mathbb{X})$. Quindi J è ben definita a valori in $(L^p(\mathbb{X}))'$. Si verifica banalmente che J è lineare. Dal teorema 6.2.18 segue che $\|g\|_{L^q(\mathbb{X})} = \|J_g\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}$. Allora J è un'isometria lineare; in particolare è iniettiva. La surgettività segue immediatamente dal teorema 6.2.18. $\square$

6.3 Appendice: cenni sull'integrale di Bochner

Siano dati uno spazio mensurale $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$, con $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura non negativa, e uno spazio di Banach E.

Definizione 6.3.1. Sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione misurabile (come nella definizione 2.1.1); diciamo che f è integrabile se vale

$$\int_{\mathbb{X}} \|f\| \; d\mu < +\infty.$$

Osservazione 6.3.2. Nel contesto della definizione 6.3.1, osserviamo che la funzione $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ è continua, pertanto è boreliana; allora la funzione $\|f\| : E \to [0, +\infty)$ è misurabile (vedi 2.1.11). Allora l'integrale

$$\int_{\mathbb{X}} \|f\| \; d\mu$$

è definito nel senso dell'integrazione secondo Lebesgue.

Vogliamo dare un senso alla scrittura

$$\int_{\mathbb{X}} f \; d\mu,$$

introducendo la nozione di integrale secondo Bochner.

Definizione 6.3.3. Sia $\varphi : \mathbb{X} \to E$ una funzione misurabile. Come nella definizione 2.1.16, si dice che φ è una funzione semplice se assume un numero finito di valori. In tal caso si scrive

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbb{1}_{E_i},$$

dove gli insiemi $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ sono a due a due disgiunti e $v_1, \ldots, v_n$ sono elementi non nulli in E.

Osservazione 6.3.4. Dalle definizioni 6.3.1 e 6.3.3, si ha che se

$$\varphi \coloneqq \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbb{1}_{E_i}$$

è una funzione semplice ($E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ sono a due a due disgiunti e $v_1, \ldots, v_n \in E \setminus \{0\}$) ed è integrabile, allora vale che $\mu(E_i) < +\infty$ per ogni $i \in \{1; \ldots; n\}$.

Definizione 6.3.5. Sia $\varphi : \mathbb{X} \to E$ una funzione semplice (vedi 6.3.3) tale che

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbb{1}_{E_i},$$

dove gli insiemi $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ sono a due a due disgiunti e $v_1, \ldots, v_n$ sono elementi non nulli in E. Supponiamo che φ sia integrabile nel senso della definizione 6.3.1. Si pone

$$\int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu := \sum_{i=1}^{n} v_i \mu(E_i) \in E.$$

Osservazione 6.3.6. Ragionando come in 2.2.2, si verifica facilmente che, se $\varphi : \mathbb{X} \to E$ è una funzione semplice integrabile, allora $\int_E f \; d\mu$ non dipende dalla rappresentazione scelta per φ.

Osservazione 6.3.7. Dalla definizione 6.3.5 segue immediatamente che se $\varphi, \psi : \mathbb{X} \to E$ sono funzioni semplici integrabili e α, β sono numeri reali, allora $\alpha\varphi + \beta\psi$ è semplice e integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{X}} (\alpha\varphi + \beta\psi) \; d\mu = \alpha \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu + \beta \int_{\mathbb{X}} \psi \; d\mu;$$

infatti basta ragionare come in 2.2.11. Inoltre, dalla disuguaglianza triangolare si deduce immediatamente che

$$\left\| \int_{\mathbb{X}} f \; d\mu \right\| \leq \int_{\mathbb{X}} \|f\| \; d\mu.$$

Definizione 6.3.8 (Integrabilità secondo Bochner)**.** Sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione integrabile (vedi 6.3.1); diciamo che f è integrabile secondo Bochner se esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ da $\mathbb{X}$ in E (vedi 6.3.3) con le seguenti proprietà:

- $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ in E per ogni $x \in \mathbb{X}$;
- vale che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \|\varphi_n - f\| \; d\mu = 0.$$

Osservazione 6.3.9. Nel contesto della definizione 6.3.8, utilizzando la disuguaglianza data da 6.3.7, si trova che la successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è formata da funzioni semplici integrabili. Inoltre, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, osserviamo che

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{X}} \varphi_n \; d\mu - \int_{\mathbb{X}} \varphi_m \; d\mu \right\| &= \left\| \int_{\mathbb{X}} (\varphi_n - \varphi_m) \; d\mu \right\| \\
&\leq \int_{\mathbb{X}} \|\varphi_n - \varphi_m\| \; d\mu \\
&\leq \int_{\mathbb{X}} \|f - \varphi_n\| \; d\mu + \int_{\mathbb{X}} \|f - \varphi_m\| \; d\mu.
\end{aligned}$$

Deduciamo che la successione $\left\{ \int_{\mathbb{X}} \varphi_n \; d\mu \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in E, pertanto ammette un limite in E.

Definizione 6.3.10 (Integrale di Bochner)**.** Siano $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione integrabile secondo Bochner (vedi 6.3.8) e $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici come nella definizione 6.3.8. Si definisce l'integrale secondo Bochner di f in $\mathbb{X}$ come

$$\int_{\mathbb{X}} f \; d\mu := \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \varphi_n \; d\mu \in E.$$

Osservazione 6.3.11. Sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione integrabile secondo Bochner e siano $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di funzioni semplici tra $\mathbb{X}$ ed E convergono puntualmente a f per ogni $x \in \mathbb{X}$; supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \|\varphi_n - f\| \ d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \|\psi_n - f\| \ d\mu = 0.$$

Vogliamo provare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \varphi_n \ d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \psi_n \ d\mu,$$

in modo che la definizione 6.3.10 sia ben posta. Abbiamo già osservato che i due limiti esistono in E (vedi 6.3.9). Vale che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left\| \int_{\mathbb{X}} (\varphi_n - \psi_n) \ d\mu \right\| &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \|\varphi_n - \psi_n\| \ d\mu \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \|\varphi_n - f\| \ d\mu + \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \|\psi_n - f\| \ d\mu = 0. \end{aligned}$$

Questo è sufficiente a concludere.

Osservazione 6.3.12. Sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione integrabile secondo Bochner (vedi 6.3.8). Vogliamo mostrare che la sua immagine è un sottoinsieme separabile di E. Sia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici che converge puntualmente a f per ogni $x \in \mathbb{X}$ come nella definizione 6.3.8. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'immagine di φ_n è formata da un insieme finito. Notiamo che

$$f(\mathbb{X}) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\mathbb{X})};$$

pertanto $f(\mathbb{X})$ è separabile perchè sottoinsieme (in uno spazio metrico) di un insieme separabile.

Definizione 6.3.13 (Funzioni fortemente misurabili)**.** Sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione misurabile e tale che $f(\mathbb{X})$ è un sottoinsieme separabile di E. Diciamo che f è una funzione fortemente misurabile.

Esempio 6.3.14. Se $\mathbb{X} = E$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty)$ è una misura finita ed E è uno spazio di Banach non separabile, l'identità $\mathrm{id} : E \to E$ è una funzione misurabile ma non fortemente misurabile.

Lemma 6.3.15. *Sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione fortemente misurabile. Esiste una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tra $\mathbb{X}$ ed E con le seguenti proprietà:*

- $\|\varphi_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *per ogni* $x \in \mathbb{X}$*;*
- *per ogni* $x \in \mathbb{X}$ *vale che*
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Dimostrazione. Sia $S \coloneqq f(\mathbb{X}) \cup \{0\}$; essendo separabile, sia $C' \subseteq S$ un sottoinsieme denso numerabile. Definiamo

$$C \coloneqq \{qc \mid q \in \mathbb{Q}, \ c \in C'\}.$$

Per ogni $y \in S$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $w \in C$ tale che $\|w\| \leq \|y\|$ e $\|w - y\| < \varepsilon$. Possiamo numerare gli elementi di C, ovvero $C = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, con $y_0 = 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ si pone

$$A_n(x) \coloneqq \{j \leq n \mid \|y_j\| \leq \|f(x)\|\}.$$

Osserviamo che $0 \in A_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo $y_0 = 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ definiamo

$$\varphi_n(x) \coloneqq y_j,$$

tale che y_j realizza il minimo

$$\min\{\|y_k - f(x)\| \mid k \in A_n(x)\}.$$

Se tale minimo è realizzato da in y_i e $y_{i'}$, si pone $\varphi_n(x) = y_i$, assumendo che $i \leq i'$.

Verifichiamo che φ_n è una funzione semplice. Innanzitutto osserviamo che, fissato $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha che

$$A_n(x) \subseteq \{0; \dots; n\}.$$

Pertanto la funzione φ_n assume un numero finito di valori. Fissiamo $J \subseteq \{0; \dots; n\}$ e consideriamo l'insieme

$$B_J \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid A_n(x) = J\}.$$

Notiamo che

$$B_J = \bigcap_{j \in J} \{\|y_j\| \leq \|f(x)\|\} \cap \bigcap_{j \in J^c} \{\|y_j\| > \|f(x)\|\};$$

pertanto, B_J è un insieme misurabile. Se fissiamo $j \in \{0; \dots; n\}$, notiamo che vale

$$\begin{aligned}\varphi_n^{-1}(\{y_j\}) &= \{x \in \mathbb{X} \mid \varphi_n(x) = y_j\} \\ &= \bigcup_{J : y_j \in J} \{x \in B_J \mid \forall k \in J \ \ \|f(x) - y_j\| \leq \|f(x) - y_k\|\} \\ &\qquad \cap \{x \in B_J \mid \forall k < j, k \in J \ \ \|f(x) - y_j\| > \|f(x) - y_k\|\}.\end{aligned}$$

Essendo $f : \mathbb{X} \to E$ e $\|f\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ funzioni misurabili, si ha che $\varphi_n^{-1}(\{y_j\})$ è un insieme misurabile.

Siano $x \in \mathbb{X}$ ed $\varepsilon > 0$. Per costruzione, esiste $y_j \in C$ tale che $\|y_j\| \leq \|f(x)\|$ e inoltre

$$\|f(x) - \varphi_n(x)\| \leq \|f(x) - y_j\| \leq \varepsilon,$$

se $n \geq j$. Questo è sufficiente a concludere. $\square$

Teorema 6.3.16. *Sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione integrabile e fortemente misurabile; allora f è integrabile secondo Bochner.*

Dimostrazione. Per il lemma 6.3.15 esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che converge puntualmente ad f per ogni $x \in \mathbb{X}$ e inoltre $\|\varphi_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Per il teorema di convergenza dominata (con dominazione $2\|f\|$) vale che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{X}} \|\varphi_n - f\| \ d\mu = 0.$$

$\square$

Un approccio alternativo all'integrale di Bochner

Proposizione 6.3.17. *Siano* $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio mensurale completo e* $f : \mathbb{X} \to E$ *una funzione misurabile. Supponiamo che esista una successione di funzioni semplici* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *che converge a* f *puntualmente per quasi ogni* $x \in \mathbb{X}$*. Valgono i seguenti fatti:*

- *per ogni applicazione lineare e continua* $l : E \to \mathbb{R}$ *vale che* $l \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *è misurabile;*

- *esiste un insieme* $Z \in \mathcal{M}$ *trascurabile e tale che* $f(X \setminus Z)$ *è separabile.*

Dimostrazione. Per il primo enunciato, è immediato notare che per ogni $l \in E^*$ vale che $\{l \circ \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici che converge quasi ovunque a $l \circ f$; per la completezza dello spazio, possiamo concludere che $l \circ f$ è una funzione misurabile.

Per il secondo enunciato, detto Z l'insieme (misurabile, per la completezza dello spazio) in cui $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a f, vale che

$$f(\mathbb{X} \setminus Z) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathbb{X} \setminus Z)},$$

che è un insieme separabile perchè φ_n assume un numero finito di valori per ogni $n \in \mathbb{N}$ (ricordiamo che $f(\mathbb{X} \setminus Z)$ è separabile perchè in uno spazio metrico ogni sottoinsieme di un separabile è separabile). $\square$

Osservazione 6.3.18. Ricordiamo che E^* dotato della norma operatoriale è uno spazio di Banach; inoltre, per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$\|x\|_E = \sup\{|l(x)| \mid l \in E^*,\ \|l\|_{E^*} \le 1\}.$$

Ricordiamo anche che se E_0 è un sottoinsieme chiuso separabile in E, esiste una successione $\{l_k\}_{k\in E^*}$ tale che per ogni $x \in E_0$ vale che

$$\|x\|_E = \sup_{k\in\mathbb{N}} |l_k(x)|.$$

Supponiamo che $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ sia uno spazio mensurale completo; sia $f : \mathbb{X} \to E$ una funzione tale che esiste un sottoinsieme $Z \in \mathcal{M}$ trascurabile tale che $f(\mathbb{X} \setminus Z)$ è separabile e per ogni $l \in E^*$ vale che $f \circ l$ è misurabile. Per quanto osservato, deduciamo che esiste una successione $\{l_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ tale che per ogni $x \in \mathbb{X} \setminus Z$ vale che

$$\|f(x)\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} l_k \circ f(x).$$

Da questo fatto e dalla completezza dello spazio segue che per ogni $v \in E$ la funzione $\|f - v\|$ è misurabile. Notiamo che esiste una successione $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$f(\mathbb{X} \setminus Z) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(y_k; \varepsilon).$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\tilde{A}_k := f^{-1}(\mathcal{B}(y_k; \varepsilon)) \setminus Z.$$

Essendo la funzione $\|f - y_k\|$ misurabile, deduciamo che $\tilde{A}_k$ è misurabile. Notiamo che $\{\tilde{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $\mathbb{X} \setminus Z$; a patto di considerare

$$A_k := \tilde{A}_k \setminus \bigcup_{j<k} \tilde{A}_j,$$

otteniamo che $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una partizione di $\mathbb{X} \setminus \mathbb{Z}$ misurabile. Poniamo

$$\varphi(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_k}(x) y_k;$$

vale che φ si può estendere ad una funzione misurabile (infatti $(\mathbb{X}; \mathcal{M}; \mu$ è uno spazio mensurale completo) tale che

$$\sup_{\mathbb{X}\setminus Z} \|\varphi(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Se potessimo troncare la serie mantenendo l'approssimazione, otterremmo una successione di funzioni semplici che converge a f uniformemente su $\mathbb{X} \setminus Z$ e potremmo introdurre una nozione di integrale. In ogni caso, non aggiungiamo ulteriori dettagli.

Capitolo 7

Misure e topologia

In questo capitolo assumiamo che sia dato un insieme $\mathbb{X}$.

7.1 Misure boreliane

7.1.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 7.1.1 (Misura esterna regolare)**.** Sia $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ una misura esterna. Sia $\mathcal{M}$ la classe degli insiemi misurabili definita dal teorema di Carathéodory (vedi 1.2.7); diremo che μ è regolare se per ogni $S \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ esiste $A \in \mathcal{M}$ tale che $S \subseteq A$ e $\mu(A) = \mu(S)$. A è detto coperchio misurabile di S.

Osservazione 7.1.2. Sia μ una misura esterna regolare su $\mathbb{X}$. Sia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di insiemi in $\mathcal{P}(\mathbb{X})$; sia

$$S \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n;$$

allora vale che

$$\mu(S) = \lim_{n\to+\infty} \mu(S_n).$$

Sia $\mathcal{M}$ la classe degli insiemi misurabili prodotta dal teorema 1.2.7; per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $A_n \in \mathcal{M}$ tale che $S_n \subseteq A_n$ e $\mu(A_n) = \mu(S_n)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$F_n \coloneqq \bigcap_{j\geq n} A_j \in \mathcal{M}.$$

Vale ovviamente che $S_n \subseteq F_n \subseteq A_n$. La successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e denotiamo

$$F \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Ovviamente vale che $\mu(F_n) = \mu(S_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per la continuità di μ in $\mathcal{M}$ si ha che

$$\mu(F) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(S_n).$$

Per monotonia, vale che $\mu(S) \leq \mu(F)$; del resto, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $\mu(S_n) \leq \mu(S)$; questo è sufficiente a concludere.

Definizione 7.1.3 (Misura esterna boreliana)**.** Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio topologico, $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ una misura esterna e $\mathcal{M}$ la classe degli insiemi misurabili prodotta dal teorema di Carathéodory 1.2.7. Diremo che μ è boreliana se $\mathcal{B}(\mathbb{X}) \subseteq \mathcal{M}$; diremo che è boreliana regolare se per ogni $S \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ esiste $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ tale che $S \subseteq B$ e $\mu(B) = \mu(S)$.

Osservazione 7.1.4. Nel contesto della definizione 7.1.3, se $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ è una misura esterna boreliana, allora per ogni $S \subseteq \mathbb{X}$ vale che $\mu_{\lfloor S} : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ è una misura esterna boreliana (è immediato verificare che gli aperti godono della proprietà del buon sezionamento rispetto a $\mu_{\lfloor S}$). Inoltre, se μ è boreliana regolare e S è un insieme boreliano, allora $\mu_{\lfloor S}$ è una misura boreliana regolare.

Esempio 7.1.5. Dati $\mathcal{S}$ un qualsiasi sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ tale che $\emptyset \in \mathcal{S}$ e $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una qualsiasi funzione d'insieme tale che $\mu(\emptyset) = 0$, abbiamo definito in 1.2.3

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k) \;\middle|\; E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k,\ \{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S} \right\}$$

per ogni $E \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Abbiamo provato in 1.2.4 che $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ è una misura esterna. Detta $\mathcal{M}$ la σ-algebra costruita nel teorema di Carathéodory (vedi 1.2.7), per costruzione μ^* è una misura esterna regolare. Infatti, dato $A \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$, se $\mu^*(A) = +\infty$, allora $\mu^*(\mathbb{X}) = +\infty$ e $\mathbb{X} \in \mathcal{M}$; se $\mu^*(A) < +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una collezione $\{S_{k;n}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tale che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(S_{k;n}) \leq \mu^*(A) + 2^{-n}.$$

Poniamo

$$S \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_{k;n}.$$

Essendo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$, si deduce immediatamente che $S \in \mathcal{M}$; ovviamente $A \subseteq S$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned} \mu^*(A) \leq \mu^*(S) &\leq \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_{k;n}\right) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(S_{k;n}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(S_{k;n}) \\ &\leq \mu^*(A) + 2^{-n}. \end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore in n, si trova che $\mu^*(A) = \mu^*(S)$.

Se $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ è uno spazio topologico e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{X})$, per quanto provato, μ^* è una misura esterna boreliana regolare. Se μ è una premisura su $\mathcal{S}$, vale anche che μ^* coincide con μ su $\mathcal{S}$ per il teorema di estensione di Carathéodory-Hahn (vedi 1.2.20).

Proposizione 7.1.6. *Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio topologico e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ una misura esterna boreliana su $\mathbb{X}$. Valgono i seguenti fatti:*

- *per ogni $r > 0$ la funzione $f : \mathbb{X} \to [0,+\infty]$ tale che*

$$f(x) \coloneqq \mu(\mathcal{B}(x;r)))$$

è sequenzialmente semicontinua inferiormente;

- *se μ è finita sugli insiemi limitati, la funzione $F : \mathbb{X} \to [0, +\infty)$ tale che*
$$F(x) = \mu(\overline{\mathcal{B}(x; r)})$$
è sequenzialmente semicontinua inferiormente e per ogni $x \in \mathbb{X}$ per quasi ogni $r > 0$ vale che
$$\mu\left(\{y \in \mathbb{X} \mid d(x; y) = r\}\right) = 0.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Mostriamo il primo enunciato. Siano $\overline{x} \in \mathbb{X}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{X}$ che tende a $\overline{x}$; siccome consideriamo palle aperte, per ogni $y \in \mathbb{X}$ vale che
$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(x_n;r)}(y) \geq \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\overline{x};r)}(y).$$
Allora, per il lemma di Fatou (vedi 2.2.9) vale che
$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) &= \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(x_n;r)} \, d\mu \\ &\geq \int_{\mathbb{X}} \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(x_n;r)} \, d\mu \\ &\geq \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\overline{x};r)} \, d\mu = f(\overline{x}).\end{aligned}$$

Step 2: Mostriamo il secondo enunciato. Siano $\overline{x} \in \mathbb{X}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{X}$ che tende a $\overline{x}$; a meno di eliminare i primi termini della successione, possiamo supporre che $\overline{\mathcal{B}(x_n; r)} \subseteq \mathcal{B}(\overline{x}; 2r)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Denotiamo con
$$A_n \coloneqq \mathcal{B}(\overline{x}; 2r) \setminus \overline{\mathcal{B}(x_n; r)}.$$
Denotiamo
$$A_\infty \coloneqq \mathcal{B}(\overline{x}; 2r) \setminus \overline{\mathcal{B}(\overline{x}; r)}.$$
Essendo $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti e A_∞ un aperto, ragionando come nel passo precedente, si mostra che
$$\liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A_\infty).$$
Essendo μ una misura finita sugli insiemi limitati, possiamo scrivere che
$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n) &= \liminf_{n\to+\infty} \mu(\mathcal{B}(\overline{x}; 2r)) - \mu(\overline{\mathcal{B}(x_n; r)}) \\ &\geq \mu(\mathcal{B}(\overline{x}; 2r)) - \mu(\overline{\mathcal{B}(\overline{x}; r)}) = \mu(A_\infty),\end{aligned}$$
da cui segue che
$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(\overline{\mathcal{B}(x_n; r)}) \leq \overline{\mathcal{B}(\overline{x}; r)},$$
ovvero che F è sequenzialmente semicontinua superiormente.

Step 3: Supponiamo ancora che μ sia finita sugli insiemi limitati. Dati $x \in \mathbb{X}$ e $r > 0$, poniamo
$$S_r(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{X} \mid d(x; y) = r\}.$$
Fissiamo $x \in \mathbb{X}$ e $R > 0$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con
$$T_{n;x;R} \coloneqq \{r \in (0, R) \mid \mu(S_r(x)) \geq 2^{-n}\}.$$
Poichè vale che
$$+\infty > \mu(B(x; R)) \geq \sum_{r\in T_{n;x;R}} \mu(S_r(x)),$$
(intendendo la somma ben definita anche se $T_{n;x;R}$ è più che numerabile) si deve avere che $T_{n;x;R}$ è un insieme finito. Questo è sufficiente a concludere. □

7.1.2 Teoremi di approssimazione

Vogliamo mostrare che in uno spazio topologico (con qualche proprietà aggiuntiva) dotato di una misura boreliana è possibile approssimare con precisione arbitraria (in termini di misura) certi insiemi dall'interno e dall'esterno con aperti e chiusi.

Definizione 7.1.7. Si dice che uno spazio topologico $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ è numerabilmente chiuso se per ogni $O \in \mathcal{T}$ esiste una successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di chiusi tale che

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Definizione 7.1.8. Diremo che uno spazio topologico è $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ è LCHN2 se è uno spazio topologico localmente compatto, di Hausdorff e in cui vale il secondo assioma di numerabilità (cioè possiede una base numerabile di aperti).

Esempio 7.1.9. Sia $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico; allora è numerabilmente chiuso. Infatti, se O è un aperto diverso da $\mathbb{X}$, possiamo scrivere

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in O \mid \operatorname{dist}(x; O^c) \geq 2^{-n}\right\},$$

che è unione numerabile di chiusi, perchè la distanza da un sottoinsieme è una funzione continua.

Esempio 7.1.10. Sia $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio LCHN2. Si può mostrare facilmente che $\mathbb{X}$ ammette un'esaustione in compatti. Inoltre, per ogni aperto $O \in \mathcal{T}$, esiste una esaustione in compatti.

Approssimazione interna

Teorema 7.1.11. *Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio numerabilmente chiuso, $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ una misura esterna boreliana su $\mathbb{X}$ (vedi 7.1.3). Se $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ e $\mu(B) < +\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq B$ tale che $\mu(B \setminus C) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. **Step 1**: Sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ fissato tale che $\mu(B) < +\infty$; poniamo $\nu := \mu_{\lfloor B}$: è una misura esterna boreliana finita. Poniamo $F_B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ la collezione degli insiemi $D \subseteq X$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq D$ tale che $\nu(D \setminus C) < \varepsilon$. Se mostriamo che F_B contiene una σ-algebra che contiene $\mathcal{T}$, allora F_B contiene $B(\mathbb{X})$, allora $B \in F_B$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq B$ tale che

$$\mu(B \setminus C) = \nu(B \setminus C) < \varepsilon.$$

Step 2: Verifichiamo che F_B è chiusa per unione numerabile. Sia $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq F_B$; per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste un chiuso $C_i \subseteq S_i$ tale che $\nu(S_i \setminus C_i) < \varepsilon 2^{-i-1}$. Per monotonia e subadditività, vale che

$$\nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\right) \leq \nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus C_i\right) < \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(S_i \setminus C_i) < \varepsilon.$$

Del resto, vale che

$$\nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\right) = \lim_{j\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcup_{i=0}^{j} C_i\right)$$

(notiamo che non possiamo applicare immediatamente la proprietà di continuità di una misura finita per successioni decrescenti, perchè ν è una misura esterna e non è detto che gli insiemi $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcup_{i=0}^{j} C_i$ siano misurabili). Se poniamo $S := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ e denotiamo $\tilde{\nu} := \nu_{\lfloor S}$, allora $\tilde{\nu}$ è una misura esterna finita tale che i boreliani sono $\tilde{\nu}$-misurabili (infatti è facile vedere che gli insiemi ν-misurabili sono anche $\tilde{\nu}$-misurabili). Allora vale che

$$\nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\right) = \tilde{\nu}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i^c\right) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{\nu}\left(\bigcap_{i=0}^{n} C_i^c\right) = \lim_{j\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcup_{i=0}^{j} C_i\right)$$

(adesso possiamo applicare la proprietà di continuità per successioni decrescenti di una misura finita: gli insiemi $\bigcap_{i=0}^{n} C_i^c$ sono $\tilde{\nu}$-misurabili). Allora esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che

$$\nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcup_{i=0}^{j} C_i\right) < \varepsilon.$$

Ricordiamo che le unioni finite di $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono insiemi chiusi.

Step 3: Mostriamo che F_B è chiusa per intersezione numerabile. Sia $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq F_B$; per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste un chiuso $C_i \subseteq S_i$ tale che $\nu(S_i \setminus C_i) < \varepsilon 2^{-i-1}$. Procedendo come nel passo precedente, troviamo che

$$\nu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i\right) \le \nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i \setminus C_i\right) < \varepsilon.$$

Step 4: Per costruzione, i chiusi sono contenuti nella famiglia F_B; essendo lo spazio numerabilmente chiuso e F_B chiusa per unioni numerabili, vale che $\mathcal{T} \subseteq F_B$. Poniamo

$$G_B := \{F \in F_B \mid F^c \in F_B\}.$$

Osserviamo che G_B contiene i chiusi ed è ovviamente stabile per complementazione. Mostriamo che è una σ-algebra. Sia $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq G_B$. Osserviamo che

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i = \left(\bigcap G_i^c\right)^c.$$

Inoltre $G_i^c \in F_B$; allora

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i^c \in F_B,$$

da cui si deduce che

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i \in G_B.$$

Osserviamo che $\mathcal{T} \subseteq G_B \subseteq F_B$; allora $\mathcal{B}(\mathbb{X}) \subseteq G_B \subseteq F_B$; in particolare, $B \in F_B$. □

Teorema 7.1.12. *Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio numerabilmente chiuso, $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ una misura esterna boreliana regolare (vedi 7.1.3) su $\mathbb{X}$ e $\mathcal{M}$ la classe degli insiemi misurabili prodotta dal teorema di Carathéodory (vedi 1.2.7). Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < +\infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia B un boreliano tale che $E \subseteq B$ e $\mu(E) = \mu(B)$. Sia B' un boreliano tale che $B \setminus E \subseteq B'$ e $\mu(B') = \mu(B \setminus E) = 0$. Dato $\varepsilon > 0$, per il teorema 7.1.11 esiste un chiuso $C \subseteq B \setminus B'$ tale che $\mu((B \setminus B') \setminus C) < \varepsilon$. Osserviamo che $C \subseteq E$ e

$$\mu(E \setminus C) = \mu((B \setminus B') \setminus C) + \mu(B' \cap E) < \varepsilon.$$

□

Approssimazione esterna

Teorema 7.1.13. *Siano* $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ *uno spazio topologico numerabilmente chiuso e sia* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ *una misura boreliana. Supponiamo che esista una successione* $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di aperti tali che*

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

e $\mu(V_n) < +\infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora per ogni boreliano* B *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un aperto* W *tale che* $B \subseteq W$ *e* $\mu(W \setminus B) < \varepsilon$.

Dimostrazione. Fissiamo un boreliano B e $\varepsilon > 0$. Osserviamo che $B^c \cap V_n$ è un boreliano di misura finita per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un chiuso $C_n \subseteq V_n \cap B^c$ tale che

$$\mu((V_n \cap B^c) \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Osserviamo che $W_n \coloneqq V_n \setminus C_n$ è un aperto; poniamo infine

$$W \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

Si mostra facilmente che $B \subseteq W$; inoltre vale che

$$\mu(W \setminus B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(W_n \setminus B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu((V_n \cap B) \setminus C_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

□

Teorema 7.1.14. *Siano* $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ *uno spazio topologico numerabilmente chiuso e* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ *una misura boreliana regolare. Supponiamo che esista una successione di aperti* $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tale che*

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

e $\mu(V_n) < +\infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora per ogni insieme misurabile* E *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un aperto* W *tale che* $E \subseteq W$ *e* $\mu(W \setminus E) < \varepsilon$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 7.1.13, utilizzando il teorema 7.1.12. □

7.1.3 Criterio di Carathéodory

Teorema 7.1.15 (Criterio di Carathéodory)**.** *Siano* $(\mathbb{X}; d)$ *uno spazio metrico e* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ *una misura esterna. Supponiamo che* μ *sia additiva sui distanti, cioè che per ogni coppia di insiemi non vuoti* $A, B \subseteq \mathbb{X}$ *tali che* $\operatorname{dist}(A; B) > 0$ *vale che*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Allora μ *è una misura boreliana.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che i boreliani sono misurabili; è sufficiente provare che gli aperti sono misurabili. Sia Ω un aperto: dobbiamo mostrare che Ω gode della proprietà del buon sezionamento, cioè che

$$\mu(\Omega \cap S) + \mu(\Omega^c \cap S) \leq \mu(S)$$

per ogni $S \subseteq \mathbb{X}$. Definiamo il chiuso $F := \Omega^c$; possiamo assumere che $\Omega^c \neq \emptyset$, altrimenti $\Omega = \mathbb{X}$ e la conclusione è banale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo ben definire

$$\Omega_n := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x; F) > 2^{-n}\}.$$

Possiamo anche supporre che $\mu(S) < +\infty$, altrimenti la conclusione è banale. Per continuità della funzione "distanza da un sottoinsieme", gli insiemi Ω_n sono aperti e inoltre vale che

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n.$$

Proviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(S \cap \Omega_n) = \mu(S \cap \Omega).$$

Definiamo le corone

$$B_k := \{x \in \mathbb{X} \mid 2^{-k-1} < \operatorname{dist}(x; F) \leq 2^{-k}\}.$$

Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\Omega = \Omega_n \cup \bigcup_{k \geq n} B_k.$$

Per la numerabile subadditività di μ vale che

$$\mu(\Omega \cap S) \leq \mu(\Omega_n \cap S) + \sum_{k \geq n} \mu(B_k \cap S) \leq \mu(S \cap \Omega) + \sum_{k \geq n} \mu(B_k \cap S).$$

Se proviamo che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(S \cap B_k) < +\infty,$$

deduciamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k \geq n} \mu(S \cap B_k) = 0.$$

In tal caso, concludiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(\Omega_n \cap S) = \mu(\Omega \cap S).$$

Osserviamo che per ogni $i \in \mathbb{N}$ le corone B_i e B_{i+2} sono a distanza positiva; utilizzando l'ipotesi di additività sui distanti, è immediato mostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale che

$$\sum_{k \leq m} \mu(B_{2k+1} \cap S) = \mu\left(\bigcup_{k \leq m} (B_{2k+1} \cap S)\right) \leq \mu(S) < +\infty;$$

passando all'estremo superiore in m, si trova che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_{2k+1} \cap S) \leq \mu(S) < +\infty.$$

Ragionando in maniera del tutto analoga, si mostra che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_{2k} \cap S) \leq \mu(S) < +\infty,$$

da cui segue immediatamente che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k \cap S) < +\infty.$$

Utilizzando l'ipotesi di additività sui distanti, si trova che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\mu(S \cap \Omega_n) + \mu(S \cap F) = \mu(S \cap (\Omega_n \cup F)) \leq \mu(S).$$

Passando all'estremo superiore in n si trova che

$$\mu(S \cap \Omega) + \mu(S \cap F) \leq \mu(S).$$

□

Applicazione alla misura di Lebesgue

Proposizione 7.1.16. *Sia $m_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ la misura di Lebesgue (vedi 1.3.3); m_n è una misura esterna boreliana regolare.*

Dimostrazione. Abbiamo già provato che m_n è una misura esterna (vedi 1.3.3). Per mostrare che è boreliana è sufficiente verificare che è additiva sui distanti; in tal caso, potremmo concludere applicando il criterio di Carathéodory (vedi 7.1.15). Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi non vuoti e tali che $\operatorname{dist}(A; B) > 0$. Dobbiamo mostrare che $m_n(A) + m_n(B) = m_n(A \cup B)$. Ricordando la notazione introdotta in 1.3.1, denotiamo con $\mathcal{S}$ la collezione dei rettangoli in $\mathbb{R}^n$ e con $v_n : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ la funzione che associa ad ogni rettangolo il suo volume. Supponiamo che A, B siano rettangoli disgiunti. In tal caso, è facile verificare che

$$m_n(A) + m_n(B) = m_n(A \cup B).$$

Ragionando induttivamente, la proprietà si estende ad un numero finito di rettangoli disgiunti.

Siano $A, B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ due insiemi qualsiasi aventi distanza positiva. Sia $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di rettangoli che copre $A \cup B$. Essendo $\operatorname{dist}(A; B) > 0$, si verifica che è per ogni $k \in \mathbb{N}$ è possibile decomporre il rettangolo R_k in una quantità finita di rettangoli disgiunti $\{R_{k,s}\}_{s\in I_k}$ con la proprietà che se $R_{k,s}$ interseca uno tra A e B, allora $R_{k,s}$ non interseca l'altro. Questo induce una partizione degli indici in tre sottoinsiemi finiti:

- $s \in A_k$ se e solo se $R_{k,s} \cap A \neq \emptyset$;
- $s \in B_k$ se e solo se $R_{k,s} \cap B \neq \emptyset$;
- $s \in C_k$ se e solo se $R_{k,s} \cap (A \cup B) = \emptyset$.

Notiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned} v_n(R_k) = m_n(R_k) &\geq m_n\left(\bigcup_{s\in A_k} R_{k,s} \cup \bigcup_{s\in B_k} R_{k,s}\right) \\ &= \sum_{s\in A_k} m_n(R_{k,s}) + \sum_{s\in B_k} m_n(R_{k,s}) \\ &= \sum_{s\in A_k} v_n(R_{k,s}) + \sum_{s\in B_k} v_n(R_{k,s}). \end{aligned}$$

Allora troviamo che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_n(R_k) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{s\in A_k} v_n(R_{k,s}) + \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{s\in B_k} v_n(R_{k,s}) \geq m_n(A) + m_n(B),$$

infatti $\{R_{k,s}\}_{k\in\mathbb{N},s\in A_k}$ è un ricoprimento di rettangoli di A e $\{R_{k,s}\}_{k\in\mathbb{N},s\in B_k}$ è un ricoprimento di rettangoli di B. Passando all'estremo inferiore sui ricoprimenti di rettangoli di $A \cup B$ si trova che

$$m_n(A \cup B) \geq m_n(A) + m_n(B);$$

l'altra disuguaglianza è sempre verificata, essendo m_n subadditiva.

In conclusione, notiamo che il fatto che m_n sia boreliana regolare segue da quanto provato in 7.1.5. □

Teorema 7.1.17. *Sia E un insieme in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $m_n(E \setminus C) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Introduciamo le corone circolari

$$C_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid k < |x| < k+1\}.$$

Notiamo che gli insiemi C_k sono aperti; inoltre è facile mostrare che

$$m_n\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = 0.$$

Infatti $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup C_k$ è unione di sfere concentriche S_k di raggio k. Ovviamente $m_n(\{0\}) = 0$; per la proprietà 1.3.5, è sufficiente provare che

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

ha misura nulla (vedi 7.1.6).

Fissiamo un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$, eventualmente di misura infinita, e $\varepsilon > 0$. Ricordando che m_n è una misura boreliana regolare (vedi 7.1.16), per il teorema 7.1.12 per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un chiuso $B_k \subseteq E \cap C_k$ tale che

$$m_n((E \cap C_k) \setminus B_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Definiamo

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k;$$

è immediato notare che $B \subseteq E$ e $m_n(E \setminus B) \leq \varepsilon$. Per la costruzione effettuata, notiamo che B è chiuso (è facile verificarlo per successioni; in effetti, B è unione numerabile di chiusi disgiunti ben distanti tra loro). □

Corollario 7.1.18. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso C ed un aperto A tali che $C \subseteq E \subseteq A$ e $m_n(A \setminus C) \leq \varepsilon$.*

Dimostrazione. Abbiamo provato che m_n è una misura boreliana regolare (vedi 7.1.16). Si nota immediatamente che $\mathbb{R}^n$ verifica tutte le ipotesi di teoremi 7.1.17 e 7.1.14. Allora la tesi segue immediatamente dall'applicazione dei due teoremi appena ricordati. □

7.2 Misure di Radon

7.2.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 7.2.1 (Misura di Radon)**.** Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $\mu : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una misura boreliana. Si dice che μ è una misura di Radon se valgono le seguenti proprietà:

- per ogni compatto K vale che $\mu(K) < +\infty$;
- per ogni insieme E misurabile vale che
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid k \subseteq E,\ K \text{ è compatto}\};$$
- per ogni $S \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ vale che
$$\mu(S) = \inf\{\mu(V) \mid S \subseteq V,\ V \text{ è aperto}\}.$$

Osservazione 7.2.2. Nel contesto della definizione 7.2.1, se μ è una misura di Radon, allora è boreliana regolare (come si evince immediatamente dalla terza proprietà elencata). Inoltre, se $\mathbb{X}$ è uno spazio topologico che ammette un'esaustione in compatti (per esempio, $\mathbb{X}$ è LCHN2) e μ è una misura di Radon, allora μ è σ-finita e $\mathbb{X}$ è unione numerabile di aperti aventi misura finita.

Proposizione 7.2.3. *Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ una misura esterna boreliana. Supponiamo che:*

- *per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{X}$ vale $\mu(K) < +\infty$;*
- *per ogni aperto V vale che*
$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq V,\ K \textit{ è compatto}\};$$
- *per ogni $S \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ vale che*
$$\mu(S) = \inf\{\mu(V) \mid S \subseteq V,\ V \textit{ è aperto}\}.$$

Allora per ogni insieme misurabile E tale che $\mu(E) < +\infty$ vale che
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid k \subseteq E,\ K \textit{ è compatto}\}.$$

Inoltre, se μ è σ-finita, μ è una misura di Radon.

Dimostrazione. **Step 1**: Sia $E \subseteq \mathbb{X}$ un insieme misurabile di misura finita. Fissiamo $\varepsilon > 0$; esiste un aperto V tale che $E \subseteq V$ e $\mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon$. Essendo tutte le misure finite, vale che $\mu(V \setminus E) \leq \varepsilon$. Per ipotesi esiste una compatto $K \subseteq V$ tale che $\mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$, ovvero $\mu(V \setminus K) \leq \varepsilon$. Dalle ipotesi segue anche che esiste un aperto U tale che $K \setminus E \subseteq U$ e $\mu(U) \leq \mu(K \setminus E) + \varepsilon$.

Notiamo che l'insieme $K \setminus U$ è compatto (infatti un chiuso in un compatto è sempre compatto). Inoltre vale che $K \setminus U \subseteq E$. Infine osserviamo che vale che

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E \cap K) + \mu(E \setminus K)\\ &\leq \mu((E \cap K) \setminus U) + \mu(E \cap K \cap U) + \mu(V \setminus K)\\ &\leq \mu(K \setminus U) + \mu(U) + \varepsilon\\ &\leq \mu(K \setminus U) + \mu(K \setminus E) + 2\varepsilon\\ &\leq \mu(K \setminus U) + \mu(V \setminus E) + 2\varepsilon\\ &\leq \mu(K \setminus U) + 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Allora deduciamo che

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ è compatto}\}.$$

Step 2: Sia $E \subseteq \mathbb{X}$ un insieme misurabile qualsiasi. Per l'ipotesi di σ-finitezza, esiste una successione crescente $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi misurabili aventi misura finita tale che

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Si verifica facilmente che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E_n,\ K \text{ è compatto}\}\\ &\leq \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ è compatto}\}\\ &\leq \mu(E).\end{aligned}$$

Questo è sufficiente a concludere. □

Teorema 7.2.4. *Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio LCHN2 e μ una misura boreliana regolare su $\mathbb{X}$. Supponiamo che $\mu(K) < +\infty$ per ogni insieme compatto $K \subseteq \mathbb{X}$. Allora μ è una misura di Radon.*

Dimostrazione. **Step 1**: Dobbiamo provare che per ogni $S \subseteq \mathbb{X}$ vale che

$$\mu(S) = \inf\{\mu(\Omega) \mid S \subseteq \Omega,\ \Omega \text{ è aperto}\}.$$

Sia $S \subseteq \mathbb{X}$ tale che $\mu(S) < +\infty$; per il teorema 7.1.13 (le ipotesi su $\mathbb{X}$ consentono di applicarlo), dato $\varepsilon > 0$, esiste un aperto W tale che $B \subseteq W$ e $\mu(W \setminus B) < \varepsilon$. Allora abbiamo che

$$\begin{aligned}\inf\{\mu(\Omega) \mid S \subseteq \Omega,\ \Omega \text{ è aperto}\} &\leq \mu(W) = \mu(W \setminus B) + \mu(B)\\ &\leq \varepsilon + \mu(B) = \varepsilon + \mu(S)\\ &\leq \varepsilon + \inf\{\mu(\Omega) \mid S \subseteq \Omega,\ \Omega \text{ è aperto}\}.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che

$$\mu(S) = \inf\{\mu(\Omega) \mid S \subseteq \Omega,\ \Omega \text{ è aperto}\}.$$

Se $\mu(S) = +\infty$, allora la conclusione è ovvia.

Step 2: Dobbiamo mostrare che per ogni insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{X}$ vale che

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ è compatto}\}.$$

Dalle ipotesi si deduce che μ è σ-finita: infatti $\mathbb{X}$ ammette un'esaustione in compatti $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e i compatti hanno misura finita. Allora è sufficiente provare la tesi per ogni insieme misurabile E tale che $\mu(E) < +\infty$; l'estensione agli insiemi misurabili di misura infinita può essere ottenuta come nella proposizione 7.2.3.

Dunque, supponiamo che E sia misurabile e $\mu(E) < +\infty$ Fissiamo $\varepsilon > 0$; per il teorema 7.1.12, esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo il compatto $C_n \coloneqq C \cap K_n$: ovviamente si ha che

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n;$$

allora segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n) = \mu(C).$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned}\sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ è compatto}\} &\le \mu(E) = \mu(E \setminus C) + \mu(C)\\ &\le \varepsilon + \mu(C) = \varepsilon + \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n)\\ &\le \varepsilon + \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ è compatto}\}.\end{aligned}$$

Essendo ε arbitrario concludiamo che

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ è compatto}\}.$$

□

Esempio 7.2.5. Se $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ è uno spazio LCHN2 e $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ è una misura finita sui compatti, abbiamo mostrato che è una misura di Radon (vedi 7.2.4). In particolare, se μ è l'estensione di Carathéodory-Hahn (vedi 1.2.20) di una premisura definita sui boreliani e finita sui compatti, allora μ è una misura di Radon.

Corollario 7.2.6. *Siano* $(\mathbb{X}; d)$ *uno spazio metrico localmente compatto e separabile e* μ *una misura boreliana regolare su* $\mathbb{X}$ *tale che* $\mu(K) < +\infty$ *per ogni compatto* K*. Allora* μ *è una misura di Radon.*

Dimostrazione. Basta osservare che $\mathbb{X}$ è uno spazio topologico LCHN2 e applicare il teorema 7.2.4. □

Osservazione 7.2.7. La misura di Lebesgue è una misura di Radon. Infatti $\mathbb{R}^n$ è uno spazio LCHN2, m_n è una misura boreliana regolare (vedi 7.1.16) ed è finita sugli insiemi limitati. Allora basta applicare il teorema 7.2.4.

Densità in L^p

Ricordiamo il seguente risultato.

Teorema 7.2.8. *Siano* $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ *uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff,* K *un compatto e* V *un aperto tali che* $K \subseteq V$*. Esiste una funzione continua* $\gamma : V \to [0, 1]$ *a supporto compatto tale che* $\gamma(x) = 1$ *per ogni* $x \in K$*.*

Teorema 7.2.9. *Siano* $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ *uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff,* μ *una misura di Radon su* $\mathbb{X}$ *e* $p \in [1, +\infty)$. *Per ogni* $f \in L^p(\mathbb{X})$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una funzione continua a supporto compatto* $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{X})} < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^p(\mathbb{X})$; considerando la decomposizione $f = f^+ - f^-$, possiamo limitarci ad assumere $f \geq 0$. Per il teorema di approssimazione con funzioni semplici (vedi 2.1.18), esiste una famiglia numerabile $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di insiemi misurabili tale che per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x).$$

Ovviamente, per ogni $n \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \leq f(x).$$

Inoltre, per ogni $n \geq 1$ vale che

$$\frac{1}{n^p} \mu(A_n) \leq \int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} \right)^p \, d\mu \leq \int_{\mathbb{X}} f^p \, d\mu < +\infty,$$

da cui segue che $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \geq 1$. Essendo $f^p \in L^1(\mathbb{X})$, per il teorema di convergenza dominata, vale che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{X}} \left(f - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mu(A_k) \right)^p \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} \right)^p \, d\mu = 0.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$; esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{k > N} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} \right)^p \, d\mu \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p.$$

Essendo μ una misura di Radon, per ogni $k \leq N$ esistono un compatto C_k e un aperto Ω_k tali che $C_K \subseteq A_k \subseteq \Omega_k$ e

$$\mu(A_k \setminus C_k) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4N} \right)^p, \quad \mu(\Omega_k \setminus A_k) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4N} \right)^p.$$

Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio localmente compatto di Hausdorff, per il teorema 7.2.8, per ogni $k \leq N$ esiste una funzione continua $\gamma_k : \Omega_k \to [0, 1]$ avente supporto compatto in Ω_k e tale che $\gamma_k(x) = 1$ per ogni $x \in C_k$. Inoltre, possiamo estendere le funzioni γ_k a 0 su Ω_k^c e trovare ancora funzioni continue. Definiamo la funzione

$$g \coloneqq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \gamma_k.$$

Osserviamo che g è ancora una funzione continua a supporto compatto in $\mathbb{X}$. Concludiamo con la stima seguente:

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_{L^p(\mathbb{X})} &= \left\| \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \gamma_k \right\|_{L^p(\mathbb{X})} \\
&\leq \left\| \sum_{k>N} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} \right\|_{L^p(\mathbb{X})} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \left\| \mathbb{1}_{A_k} - \gamma_k \right\|_{L^p(\mathbb{X})} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{X}} |\mathbb{1}_{A_k} - \gamma_k|^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\Omega_k \setminus C_k} |\mathbb{1}_{A_k} - \gamma_k|^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{N} \mu(\Omega_k \setminus C_k)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

7.2.2 Teorema di Lusin

Teorema 7.2.10 (Lusin). *Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio topologico, μ una misura boreliana regolare su $\mathbb{X}$, $A \subseteq \mathbb{X}$ un insieme misurabile e tale che $\mu(A) < +\infty$, $\mathbb{Y}$ uno spazio metrico separabile e $f : A \to \mathbb{Y}$ una funzione misurabile. Fissiamo $\varepsilon > 0$; valgono i seguenti fatti:*

- *se $\mathbb{X}$ è numerabilmente chiuso, esiste un chiuso $C \subseteq A$ tale che $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$ e $f_{|C} : C \to \mathbb{Y}$ è continua;*
- *se $\mathbb{X}$ è T2 e μ è una misura di Radon, esiste un compatto $K \subseteq A$ tale che $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ e $f_{|K} : K \to \mathbb{Y}$ è continua.*

Dimostrazione. **Step 1**: Essendo $\mathbb{Y}$ uno spazio metrico separabile, per ogni $i \geq 1$ esiste una famiglia numerabile di palle $\{\mathcal{B}_{i;l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ di raggio $\frac{1}{2i}$ che ricopre $\mathbb{Y}$. Per ogni $i \geq 1$ poniamo $Y_{i;0} \coloneqq \mathcal{B}_{i;0}$; per ogni $i, k \geq 1$ poniamo

$$Y_{i;k} \coloneqq \mathcal{B}_{i;k} \setminus \bigcup_{l<k} \mathcal{B}_{i;l}.$$

Per ogni $i \geq 1$ la famiglia $\{Y_{i;k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è formata da boreliani a due a due disgiunti e ricopre $\mathbb{Y}$. Per ogni $i \geq 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $A_{i;k} \coloneqq f^{-1}(Y_{i;k})$. Osserviamo che per ogni $i \geq 1$ la famiglia $\{A_{i;k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è formata da insiemi misurabili a due a due disgiunti e ricopre A. Ovviamente vale che $\mu(A_{i;k}) < +\infty$ per ogni $i \geq 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; valgono le seguenti alternative:

- se $\mathbb{X}$ è numerabilmente chiuso, per il teorema 7.1.12 per ogni $i \geq 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un chiuso $C_{i;k} \subseteq A_{i;k}$ tale che

$$\mu(A_{i;k} \setminus C_{i;k}) < 2^{-i-k-1}\varepsilon;$$

- se μ è una misura di Radon, per la definizione 7.2.1, per ogni $i \geq 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un compatto $C_{i;k} \subseteq A_{i;k}$ tale che
$$\mu(A_{i;k} \setminus C_{i;k}) < 2^{-i-k-1}\varepsilon.$$

In ogni caso, per ogni $i \geq 1$ vale che
$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_{i;k}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_{i;k} \setminus C_{i;k}) < 2^{-i}\varepsilon.$$

Allora, per ogni $i \geq 1$ esiste $k_i \in \mathbb{N}$ tale che, detto
$$D_i := \bigcup_{l\leq k_i} C_{i;l},$$
vale che $\mu(A \setminus D_i) < 2^{-i}\varepsilon$. Osserviamo che nel primo caso $\{D_i\}_{i\geq 1}$ è una successione di chiusi; nel secondo caso, invece, $\{D_i\}_{i\geq 1}$ è una successione di compatti. Poniamo
$$C := \bigcap_{i\geq 1} D_i;$$
in entrambi i casi C è un chiuso; se $\mathbb{X}$ è uno spazio T2, allora C è anche un compatto. Vale che
$$\mu(A \setminus C) = \mu\left(A \setminus \bigcap_{i\geq 1} D_i\right) = \mu\left(A \cap \bigcup_{i\geq 1} D_i^c\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(A \setminus D_i) < \varepsilon.$$

Step 2: Dobbiamo provare che $f_{|C} : C \to \mathbb{Y}$ è una funzione continua. Ricordiamo che per ogni $i \geq 1$ la famiglia $\{C_{i;k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è formata da chiusi a due a due disgiunti. Per ogni $i \geq 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ scegliamo un punto $y_{i;k} \in Y_{i;k}$. Fissato $i \geq 1$, definiamo la funzione $g_i : D_i \to \mathbb{Y}$ tale che per ogni $x \in C_{i;k}$ vale che $g_i(x) = y_{i;k}$. Osserviamo che la funzione g_i è ben definita ed è continua. Per costruzione, per ogni $i \geq 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che
$$\operatorname{diam}(f(A_{i;k})) \leq \operatorname{diam}(Y_{i;k}) \leq \frac{1}{i};$$
segue che
$$d(y_{i;k}; f(x)) \leq \frac{1}{i}$$
per ogni $x \in A_{i;k}$. Allora, se $x \in D_i$, esiste $k_x \in \{0; \dots; k_i\}$ tale che $x \in C_{i;k_x} \subseteq A_{i;k_x}$. Allora vale che
$$d(y_{i;k_x}; f(x)) = d(g_i(x); f(x)) \leq \operatorname{diam}(Y_{i;k_x}) \leq \frac{1}{i}.$$

Abbiamo ottenuto che
$$\sup_{x\in D_i}\{d(g_i(x); f(x))\} \leq \frac{1}{i}.$$

Ovviamente la restrizione di g_i a C è ancora una funzione continua; pertanto, abbiamo che $\{g_i\}_{i\geq 1}$ è una successione di funzioni continue che converge uniformemente in C a f. Questo è sufficiente a concludere che $f_{|D}$ è una funzione continua. □

7.3 Rappresentazione di funzionali localmente limitati

In questa sezione, supponiamo che siano dati uno spazio topologico $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ e uno spazio di Hilbert di dimensione finita $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione finita. Denotiamo con con $C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H})$ l'insieme delle funzioni continue tra $\mathbb{X}$ e $\mathbb{H}$ aventi supporto compatto in $\mathbb{X}$.

7.3.1 Variazione totale di un funzionale

Definizione 7.3.1 (Funzionale localmente limitato)**.** Sia $L : C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale. Diremo che L è localmente limitato se gode delle seguenti proprietà:

- è additivo;
- per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{X}$ vale che
$$\sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}),\ |f(x)| \leq 1\ \forall x \in K\} < +\infty.$$

Definizione 7.3.2 (Variazione totale di un funzionale)**.** Siano $L : C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale e $V \subseteq \mathbb{X}$ un aperto non vuoto. Si pone
$$\tilde{\mu}_L(V) \coloneqq \sup\{L(f) \mid f \in C_c(V; \mathbb{H}),\ |f(x)| \leq 1\ \forall x \in V\};$$
definiamo $\tilde{\mu}_L(\emptyset) \coloneqq 0$. Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{X}$ qualsiasi, definiamo la variazione totale di L in S come
$$\mu_L(S) \coloneqq \inf\{\tilde{\mu}_L(V) \mid S \subseteq V,\ V \text{ è aperto}\}.$$

Osservazione 7.3.3. Nel contesto della definizione 7.3.2, essendo L un funzionale localmente limitato, per ogni aperto $V \subseteq \mathbb{X}$ contenuto in un compatto vale che $\tilde{\mu}_L(V) < +\infty$ e per ogni insieme $S \subseteq \mathbb{X}$ contenuto in un compatto vale che $\mu_L(S) < +\infty$.

Proposizione 7.3.4. *Nel contesto della definizione 7.3.2, se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{X}$, allora $\mu_L(A) \leq \mu_L(B)$; inoltre, per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{X}$ vale che $\mu_L(\Omega) = \tilde{\mu}_L(\Omega)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione 7.3.4, segue immediatamente che se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{X}$, allora $\mu_L(A) \leq \mu_L(B)$.

Sia Ω un aperto. Ovviamente vale che $\mu_L(\Omega) \leq \tilde{\mu}_L(\Omega)$. Notiamo che se Ω' è un aperto contenente Ω, vale che $C_c(\Omega; \mathbb{H}) \subseteq C_c(\Omega'; \mathbb{H})$; allora $\tilde{\mu}_L(\Omega) \leq \tilde{\mu}_L(\Omega')$. Passando all'estremo inferiore sugli aperti Ω' contenenti Ω, si deduce che $\tilde{\mu}_L(\Omega) \leq \mu_L(\Omega)$. □

Ricordiamo i seguenti fatti.

Teorema 7.3.5. *Se $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ è uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff, $K \subseteq \mathbb{X}$ è un compatto e $U_1, \dots, U_n$ sono aperti che ricoprono K, esistono delle funzioni continue a supporto compatto $\gamma_j : U_j \to [0, 1]$ tali che per ogni $x \in K$ vale*
$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x) = 1.$$
Diremo che $\{\gamma_1; \dots; \gamma_n\}$ è una partizione dell'unità su K subordinata al ricoprimento $\{U_1; \dots; U_n\}$.

Teorema 7.3.6. *Supponiamo che $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ sia uno spazio topologico di Hausdorff. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

- *$\mathbb{X}$ è localmente compatto;*
- *per ogni $x \in \mathbb{X}$ per ogni U intorno di $\mathbb{X}$ esiste un aperto V tale che $\overline{V}$ è compatto e $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$;*
- *per ogni compatto K per ogni aperto U tale che $K \subseteq U$ esiste un aperto V tale che $\overline{V}$ è compatto e $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Proposizione 7.3.7. *Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio localmente compatto di Hausdorff, $L : C_c(\mathbb{X};\mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale localmente limitato e $\mu_L, \tilde{\mu}_L$ come nella definizione 7.3.2. Valgono i seguenti fatti:*

- *se U, V sono aperti disgiunti, allora*
$$\tilde{\mu}_L(U) + \tilde{\mu}_L(U) \leq \tilde{\mu}_L(U \cup V);$$
- *se U, V sono aperti qualsiasi allora*
$$\tilde{\mu}_L(U \cup V) \leq \tilde{\mu}_L(U) + \tilde{\mu}_L(U);$$
- *per ogni aperto Ω vale che*
$$\tilde{\mu}_L(\Omega) = \sup\{\tilde{\mu}_L(A) \mid A \text{ è aperto}, \ A \Subset \Omega\}.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Siano U, V aperti disgiunti. Siano $f \in C_c(U;\mathbb{H})$ e $g \in C^c(V;\mathbb{H})$ tali che $|f(x)| \leq 1$ e $|g(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Ovviamente $f + g \in C_c(U \cup V;\mathbb{H})$; essendo $U \cap V = \emptyset$, si ha che $|f(x) + g(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Per additività di L vale che
$$L(f) + L(g) = L(f + g) \leq \tilde{\mu}(U \cup V).$$
Passando all'estremo superiore su f e g, si trova che
$$\tilde{\mu}_L(U) + \tilde{\mu}_L(V) \leq \tilde{\mu}_L(U \cup V).$$

Step 2: Siano U, V aperti qualsiasi. Sia $\varphi \in C_c(U \cup V;\mathbb{H})$ tale che $|\varphi(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Denotiamo con K il supporto di φ; per ipotesi K è compatto e $\{U; V\}$ è un ricoprimento aperto di K. Per il teorema 7.3.5, esiste una partizione dell'unità $\{\gamma_U; \gamma_V\}$ di K subordinata a $\{U; V\}$. Osserviamo che $\varphi\gamma_U \in C_c(U;\mathbb{H})$ e $|\varphi(x)\gamma_U(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$; analogamente $\varphi\gamma_V \in C_c(V;\mathbb{H})$ e $|\varphi(x)\gamma_V(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Per additività di L vale che
$$L(\varphi) = L(\varphi\gamma_U) + L(\varphi\gamma_V) \leq \tilde{\mu}_L(U) + \tilde{\mu}_L(V).$$
Passando all'estremo superiore su φ, si trova che
$$\tilde{\mu}_L(U \cup V) \leq \tilde{\mu}_L(U) + \tilde{\mu}_L(V).$$

Step 3: Siano Ω un aperto in $\mathbb{X}$ tale che $\tilde{\mu}_L(\Omega) > 0$ (altrimenti è banale) e $0 \leq M < \tilde{\mu}_L(\Omega)$. Per definizione di $\tilde{\mu}_L$ (vedi 7.3.2), esiste $f \in C_c(\Omega;\mathbb{H})$ tale che $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ e $L(f) \in (M, \tilde{\mu}_L(\Omega)]$. Essendo $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio localmente compatto di Hausdorff e il supporto di f un compatto (che denotiamo con K), per il teorema 7.3.6 esiste un aperto A tale che $K \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq \Omega$ e $\overline{A}$ è compatto. Allora vale che

$$M \leq L(f) \leq \tilde{\mu}_L(A) \leq \tilde{\mu}_L(\Omega).$$

Questo è sufficiente a concludere che

$$\tilde{\mu}_L(\Omega) = \sup\{\tilde{\mu}_L(A) \mid A \text{ è aperto}, \ A \Subset \Omega\}.$$

□

Teorema 7.3.8 (De Giorgi-Letta)**.** *Siano* $(\mathbb{X}; d)$ *uno spazio metrico,* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ *la topologia indotta dalla distanza* d*,* $\tilde{\mu} : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ *una funzione con le seguenti proprietà:*

- $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$*;*
- *se* A_1, A_2 *sono aperti disgiunti allora*
$$\tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2) \leq \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2);$$
- *se* A_1, A_2 *sono aperti qualsiasi allora*
$$\tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) \leq \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2);$$
- *per ogni aperto* A *vale che*
$$\tilde{\mu}(A) = \sup\{\tilde{\mu}(\Omega) \mid \Omega \in \mathcal{T}, \ \Omega \Subset A\}.$$

Se poniamo per ogni $S \subseteq \mathbb{X}$

$$\mu(S) := \inf\{\tilde{\mu}(A) \mid S \subseteq A, \ A \in \mathcal{T}\},$$

allora μ *è una misura esterna boreliana regolare che estende* $\tilde{\mu}$*.*

Dimostrazione. **Step 1**: Per verificare che $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ per ogni aperto A si può procedere come in 7.3.4.

Step 2: Mostriamo che $\tilde{\mu}$ è numerabilmente subadditiva. Siano $A \in \mathcal{T}$ e $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di A. Sia Ω un aperto relativamente compatto in A. Allora esiste una famiglia finita $\mathcal{F} \subseteq \{A_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ tale che

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup \mathcal{F}.$$

Utilizzando la finita subadditività di $\tilde{\mu}$ e la monotonia di $\tilde{\mu}$ (che segue banalmente dalla quarta proprietà di $\tilde{\mu}$) deduciamo che

$$\tilde{\mu}(\Omega) \leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{A_j \in \mathcal{F}} A_j\right) \leq \sum_{A_j \in \mathcal{F}} \tilde{\mu}(A_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_j).$$

Passando all'estremo superiore su Ω e applicando la quarta proprietà di $\tilde{\mu}$, troviamo che

$$\tilde{\mu}(A) = \sup\{\tilde{\mu}(\Omega) \mid \Omega \in \mathcal{T}, \ \Omega \Subset A\} \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_j).$$

Step 3: Verifichiamo che μ è numerabilmente subadditiva, cioè che è una misura esterna. Siano $S \subseteq \mathbb{X}$ e $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di S formato da insiemi qualsiasi. Dobbiamo mostrare che

$$\mu(S) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(S_j).$$

Possiamo anche supporre che

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(S_j) < +\infty,$$

altrimenti la conclusione è ovvia. Fissiamo $\varepsilon > 0$; per costruzione, per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste un aperto Ω_j tale che $S_j \subseteq \Omega_j$ e inoltre

$$\tilde{\mu}(\Omega_j) \leq \mu(S_j) + \varepsilon 2^{-j-1}.$$

Utilizzando la definizione di μ, il fatto che $\tilde{\mu}$ e μ coincidono sugli aperti e la numerabile subadditività di $\tilde{\mu}$, otteniamo che

$$\mu(S) \leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(\Omega_j) \leq \varepsilon + \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(S_j).$$

Essendo ε arbitrario, si conclude che

$$\mu(S) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(S_j).$$

Step 4: Mostriamo che μ è boreliana tramite il criterio di Carathéodory; allora è sufficiente provare che μ è additiva sui distanti. Siano $F, S \subseteq \mathbb{X}$ tali che $\operatorname{dist}(F; S) > 0$. Per continuità della funzione "distanza da un sottoinsieme", esistono due aperti disgiunti Ω_F, Ω_S tali che $F \subseteq \Omega_F$ e $S \subseteq \Omega_S$. Abbiamo già osservato che $\tilde{\mu}$ è monotona. Sia Ω un aperto che contiene $F \cup S$; essendo $\tilde{\mu}$ additiva sugli aperti disgiunti, vale che

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(\Omega) &\geq \tilde{\mu}(\Omega \cap (\Omega_S \cup \Omega_S)) \\
&= \tilde{\mu}(\Omega \cap \Omega_S) + \tilde{\mu}(\Omega \cap \Omega_F) \\
&\geq \mu(F) + \mu(S).
\end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore su Ω, si trova che $\mu(F \cup S) \geq \mu(F) + \mu(S)$. Essendo μ subadditiva, concludiamo che

$$\mu(F \cup S) = \mu(F) + \mu(S).$$

Step 5: Per provare che μ è regolare, osserviamo che per ogni $S \subseteq \mathbb{X}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un aperto V_n che contiene S ed è tale che

$$\tilde{\mu}(V_n) \leq \mu(S) + 2^{-n}.$$

Se poniamo

$$V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n,$$

è ovvio che V sia un boreliano che contiene S; inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\mu(S) \leq \mu(V) \leq \mu(V_n) = \tilde{\mu}(V_n) \leq \mu(S) + 2^{-n};$$

segue immediatamente che $\mu(S) = \mu(V)$. $\square$

Teorema 7.3.9. *Siano $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico localmente compatto, $L : C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale localmente limitato e μ_L la variazione totale associata a L. Allora μ è una misura esterna boreliana regolare.*

Dimostrazione. Come mostrato in 7.3.4, la variazione totale μ_L rispetta le ipotesi del teorema di De Giorgi-Letta (vedi 7.3.8). □

Teorema 7.3.10. *Siano $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico localmente compatto e separabile, $L : C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale localmente limitato e μ_L la variazione totale associata a L. Allora μ_L è una misura di Radon.*

Dimostrazione. Per il teorema 7.3.9 μ_L è una misura boreliana regolare. Inoltre, è finita sui compatti; quindi μ è una misura di Radon (vedi 7.2.4). □

Si può dimostrare il seguente enunciato.

Teorema 7.3.11. *Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio topologico LCHN2, $L : C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale localmente limitato e μ_L la variazione totale associata a L. Allora μ_L è una misura di Radon.*

7.3.2 Teorema di rappresentazione di Riesz

Definizione 7.3.12. Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Si dice che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{X})$ se $f \in L^1(K)$ per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{X}$.

Lemma 7.3.13. *Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio localmente compatto di Hausdorff, μ è una misura di Radon e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{X})$. Supponiamo che per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{X})$ vale che*

$$\int_{\mathbb{X}} f\varphi \, d\mu = 0.$$

Allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Sia $M \coloneqq f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\})$; notiamo che M è misurabile. Supponiamo per assurdo che $\mu(M) > 0$; essendo μ una misura di Radon, esiste un compatto $K \subseteq M$ tale che $0 < \mu(K) < +\infty$. Notiamo che le funzioni $f, \operatorname{sgn}(f) \in L^1(K)$. Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio localmente compatto di Hausdorff, esiste un aperto V tale che $K \subseteq V \subseteq \overline{V}$ e $\overline{V}$ è compatto (vedi 7.3.6). Notiamo che $\mu(V) \leq \mu(\overline{V}) < +\infty$. Per il teorema 7.2.9 esiste una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenuta in $C_c(V)$ che converge alla funzione $\mathbb{1}_K \operatorname{sgn}(f)$ in $L^1(V)$. A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che la convergenza sia per quasi ogni $x \in V$; inoltre, a meno di troncare φ_n tra i valori 1 e -1, possiamo supporre che $|\varphi_n(x)| \leq 1$ per quasi ogni $x \in V$. Per il teorema di convergenza dominata, vale che

$$\int_K |f| \, d\mu = \int_V f \operatorname{sgn}(f) \mathbb{1}_K \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_V f\varphi_n \, d\mu = 0.$$

Tuttavia, questo è incompatibile con il fatto che $\mu(K) > 0$ e che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in K$. □

Teorema 7.3.14 (Rappresentazione di Riesz)**.** *Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio topologico LCHN2, $L : C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare localmente limitato e μ_L la variazione totale associata a L. Esiste una funzione $\tau : \mathbb{X} \to \mathbb{H}$ boreliana con le seguenti proprietà:*

- *per ogni* $f \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H})$ *vale che*

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} < f, \tau > \ d\mu_L;$$

- $|\tau(x)| = 1$ *per quasi ogni* $x \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. **Step 1**: Definiamo

$$C_c^+(\mathbb{X}) \coloneqq \{\varphi \in C_c(\mathbb{X}) \mid \varphi(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{X}\}.$$

Per ogni $\varphi \in C_c^+(\mathbb{X})$ definiamo

$$T(\varphi) \coloneqq \sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}), \ |f(x)| \leq \varphi(x) \ \forall x \in \mathbb{X}\}.$$

Vogliamo provare che T è additivo. Siano $\varphi, \psi \in C_c^+(\mathbb{X})$ e $f, g \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H})$ tali che $|f(x)| \leq \varphi(x)$ e $|g(x)| \leq \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale che

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \varphi(x) + \psi(x).$$

Essendo L lineare, vale che

$$L(f) + L(g) = L(f + g) \leq T(\varphi + \psi).$$

Passando all'estremo superiore su f e g, si trova che

$$T(\varphi) + T(\psi) \leq T(\varphi + \psi).$$

Sia $f \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H})$ tale che $|f(x)| \leq \varphi(x) + \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Introduciamo l'aperto

$$\Omega \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid \varphi(x) + \psi(x) > 0\}.$$

Possiamo ben definire le funzioni

$$f_1 \coloneqq \mathbb{1}_\Omega \frac{\varphi}{\varphi + \psi} f, \quad f_2 \coloneqq \mathbb{1}_\Omega \frac{\psi}{\varphi + \psi} f.$$

Vogliamo mostrare che sono continue; essendo $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio N2, possiamo verificare la continuità sequenziale. Siano $x \in \mathbb{X}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione che tende a x in $\mathbb{X}$; dobbiamo verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} f_1(x_n) = f_1(x).$$

L'unico caso non banale è quello in cui $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ e $x \in \partial\Omega$. Per le assunzioni su f, osserviamo che $|f_1(x)| \leq \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$; allora vale che

$$\lim_{n \to +\infty} |f_1(x_n)| \leq \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = 0 = f_1(x).$$

Dunque f_1 è continua; analogamente si verifica che f_2 è continua. Inoltre, è ovvio che siano supportate in insiemi compatti e che $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Essendo L lineare, abbiamo che

$$L(f) = L(f_1) + L(f_2) \leq T(\varphi) + T(\psi).$$

Passando all'estremo superiore su f, troviamo che

$$T(\varphi + \psi) \leq T(\varphi) + T(\psi).$$

Inoltre, dalla linearità di L segue immediatamente che per ogni $c \geq 0$ vale che

$$T(c\varphi) = cT(\varphi).$$

Step 2: Vogliamo provare che per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{X})^+$ vale che

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{X}} \varphi \, d\mu_L.$$

Fissiamo $\varphi \in C_c^+(\mathbb{X})$ e $\varepsilon > 0$. Sia

$$\lambda := \max_{\mathbb{X}} \varphi;$$

possiamo supporre $\lambda > 0$, altrimenti la conclusione è ovvia. Vogliamo costruire una discretizzazione dello spazio. Siano

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < \lambda < t_N$$

tali che $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$ e $\mu(\varphi^{-1}(t_j)) = 0$ per ogni $j \in \{1; \ldots; N\}$. La scelta di questi punti è possibile perchè i punti $t > 0$ tali che $\mu_L(\varphi^{-1}(t)) > 0$ sono in quantità al più numerabile. Infatti, se consideriamo la funzione $t \to \mu_L(\varphi^{-1}((0, t)))$ è monotona non decrescente e limitata (infatti il supporto di φ ha misura finita perchè è compatto e μ è una misura di Radon); allora ha una quantità al più numerabile di punti di discontinuità e $\mu_L(\varphi^{-1}(t)) > 0$ se e solo se t è un punto di discontinuità per la suddetta funzione.

Sia K il supporto di φ (è compatto). Per ogni $j \in \{1; \ldots; N\}$ definiamo l'aperto

$$U_j := \varphi^{-1}((t_{j-1}, t_j)).$$

Per quanto provato in mostrato in 7.3.4 e per le definizioni di μ_L e T vale che

$$\begin{aligned}\mu_L(U_j) &= \tilde{\mu}_L(U_j) \\ &= \sup\{L(f) \mid f \in C_c(U_j; \mathbb{H}),\ |f(x)| \leq 1\ \forall x \in U_j\} \\ &= \sup\{T(\psi) \mid \psi \in C_c^+(U_j),\ \psi(x) \leq 1\ \forall x \in U_j\}.\end{aligned}$$

Allora per ogni $j \in \{1; \ldots; N\}$ esiste $\tilde{h}_j \in C_c(U_j; [0, 1])$ tale che

$$T(\tilde{h}_j) \geq \mu_L(U_j) - \frac{\varepsilon}{N}.$$

μ_L è una misura di Radon; dunque, per ogni $j \in \{1; \ldots; N\}$ esiste un compatto $K_j \subseteq U_j$ tale che

$$\mu_L(U_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio localmente compatto di Hausdorff, per il teorema 7.3.6, esiste un aperto Ω_j a chiusura compatta tale che $K_j \subseteq \Omega_j \subseteq \overline{\Omega_j} \subseteq U_j$. Per il teorema 7.2.8, esiste una funzione $\overline{h}_j \in C_c(U_j; [0, 1])$ tale che $\overline{h}_j(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{\Omega_j}$. Se poniamo

$$h_j := \max\{\overline{h}_j; \tilde{h}_j\},$$

abbiamo che $h_j \in C_c(U_j; [0,1])$ e inoltre $\overline{\Omega_j} \subseteq \{x \in U_j \mid h_j(x) = 1\}$. Essendo $h_j(x) \geq \tilde{h}_j(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$, dalla definizione di T deduciamo che

$$T(h_j) \geq T(\tilde{h}_j) \geq \mu_L(U_j) - \frac{\varepsilon}{N}.$$

Definiamo l'aperto $A_1 \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid \varphi(x) > 0\}$; siano $Z_0 \coloneqq \partial A_1$ e $Z_1 \coloneqq \varphi^{-1}(\{t_1; \ldots; t_N\})$. Per la scelta di $\{t_1; \ldots; t_N\}$, abbiamo che $\mu_L(Z_1) = 0$. Inoltre vale che

$$A_1 = Z_1 \cup \bigcup_{i=1}^{N} U_i,$$

$$K \coloneqq \operatorname{supp}(\varphi) = \overline{A_1} = A_1 \cup \partial A_1 = Z_0 \cup Z_1 \cup \bigcup_{i\ \in \mathbb{N}} U_i.$$

Essendo $\overline{A_1}$ compatto, μ_L una misura di Radon e φ una funzione continua, esiste un aperto Ω_0 a chiusura compatta tale che $Z_0 \subseteq \Omega_0$, $\mu(\Omega_0 \setminus Z_0) < \varepsilon$ e $\varphi(\overline{\Omega_0}) \subseteq [0, \varepsilon]$. Siano Ω un aperto tale che $K \subseteq \Omega$ e $\eta \in C_c(\Omega; [0,1])$ tale che $\eta(x) = 1$ per ogni $x \in K$ (vedi 7.2.8). Sia $\{\gamma_0; \gamma_1\}$ una partizione dell'unità di K subordinata al ricoprimento $\{\Omega_0; A_1\}$. Definiamo

$$\theta \coloneqq \eta\gamma_1\varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} h_j\right) = \gamma_1\varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} h_j\right).$$

Osserviamo che se

$$\eta(x)\gamma_1(x) \left(1 - \sum_{j=1}^{N} h_j(x)\right) \neq 0,$$

allora vale che

$$x \in \operatorname{supp}(\gamma_1) \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \overline{\Omega_j}.$$

Inoltre, abbiamo che $\operatorname{supp}(\gamma_1) \subseteq A_1$ e $\operatorname{supp}(\gamma_1) \cap Z_0 = \emptyset$. Segue che

$$\operatorname{supp}\left(\eta\gamma_1 \left(1 - \sum_{j=1}^{N} h_j\right)\right) \subseteq \operatorname{supp}(\gamma_1) \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j \subseteq (\Omega \setminus Z_0) \setminus \bigcup_{j=1}^{N} K_j.$$

Allora vale che

$$
\begin{aligned}
T(\theta) &\leq \lambda T\left(\eta\gamma_1\left(1-\sum_{j=1}^{N} h_j\right)\right)\\
&\leq \lambda\mu_L\left(\Omega\setminus Z_0\setminus\bigcup_{j=1}^{N} K_j\right)\\
&\leq \lambda\left(\mu_L(\Omega\setminus K)+\mu_L\left(K\setminus Z_0\setminus\bigcup_{j=1}^{N} K_j\right)\right)\\
&\leq \lambda\left(\varepsilon+\mu_L\left(Z_1\cup\left(\bigcup_{j=1}^{N} U_j\setminus\bigcup_{j=1}^{N} K_j\right)\right)\right)\\
&\leq \lambda\left(\varepsilon+\mu_L(Z_1)+\sum_{j=1}^{N}\mu_L(U_j\setminus Z_j)\right)\\
&\leq \lambda\left(\varepsilon+\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon}{N}\right)=2\lambda\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Pertanto, abbiamo che

$$
\begin{aligned}
T(\varphi) &= T\left(\varphi-\varphi\sum_{j=1}^{N} h_j\right)+T\left(\varphi\sum_{j=1}^{N} h_j\right)\\
&= T\left(\varphi\gamma_0\left(1-\sum_{j=1}^{N} h_j\right)\right)+T\left(\gamma_1\eta\left(1-\sum_{j=1}^{N} h_j\right)\right)+T\left(\varphi\sum_{j=1}^{N} h_j\right)\\
&\leq T(\varphi\gamma_0)+2\varepsilon\lambda+\sum_{j=1}^{N} T(\varphi h_j)\\
&\leq \varepsilon T(\gamma_0)+2\lambda\varepsilon+\sum_{j=1}^{N} T(t_j h_j)\\
&\leq \varepsilon\mu_L(\Omega_0)+2\lambda\varepsilon+\sum_{j=1}^{N} t_j\mu_L(U_j)\\
&\leq \varepsilon(\mu_L(K)+\varepsilon)+2\lambda\varepsilon+\sum_{j=1}^{N} t_j\mu_L(U_j)\\
&\leq C\varepsilon+\sum_{j=1}^{N} t_j\mu_L(U_j),
\end{aligned}
$$

dove C è una costante indipendente da ε. Se poniamo

$$
U \coloneqq \bigcup_{j=1}^{N} U_j,
$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} T(\varphi) - \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L &= T(\varphi) - \int_U \varphi \; d\mu_L \\ &\leq \sum_{j=1}^N t_j \mu_L(U_j) - \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \varphi \; d\mu_L + C\varepsilon \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} (t_j - \varphi(x)) \; d\mu_L + C\varepsilon \\ &\leq C\varepsilon + \varepsilon \mu_L(K); \end{aligned}$$

essendo ε arbitrario, si trova che

$$T(\varphi) - \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L \leq 0.$$

Ricordanco che per ogni $j \in \{1; \dots; N\}$ vale che

$$T(\varphi h_j) \geq t_{j-1} T(h_j) \geq t_{j-1} \left(\mu_L(U_j) - \frac{\varepsilon}{N} \right),$$

possiamo verificare l'altra disuguaglianza:

$$\begin{aligned} T(\varphi) - \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L &\geq T\left(\varphi \sum_{j=1}^N h_j \right) \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L \\ &\geq \sum_{j=1}^N T(\varphi h_j) - \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L \\ &\geq \sum_{j=1}^N t_{j-1} \left(\mu_L(U_j) - \frac{\varepsilon}{N} \right) - \sum_{j=1}^N t_j \mu_L(U_j) \\ &= -\sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) \mu_L(U_j) - \lambda\varepsilon \geq C'\varepsilon, \end{aligned}$$

dove C' è una costante indipendente da ε. Essendo ε arbitrario, si deduce che

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L.$$

Step 3: Fissiamo un vettore unitario $e \in \mathbb{H}$; per ogni $\psi \in C_c(\mathbb{X})$ vale che

$$|L(\psi e)| \leq T(|\psi|) = \int_{\mathbb{X}} |\psi| \; d\mu_L.$$

Fissiamo un aperto V a chiusura compatta in $\mathbb{X}$; essendo μ_L una misura di Radon, abbiamo che $\mu_L(V) < +\infty$. Sia $\psi \in C_c(V)$; per la disuguaglianza di Hölder, vale che

$$|L(\psi e)| \leq \int_V |\psi| \; d\mu_L \leq \sqrt{\mu_L(V)} \, \|\psi\|_{L^2(V)}.$$

Per densità di $C_c(V)$ in $L^2(V)$ (vedi 7.2.9), possiamo definire un funzionale lineare continuo $L_2 : \mathcal{L}^2(V) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $\psi \in C_c(V)$ vale $L_2(\psi) = L(e\psi)$ e per ogni $\psi \in L^2(V)$ vale che

$$|L_2(\psi)| \leq \sqrt{\mu_L(V)}\, \|\psi\|_{L^2(V)}.$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz negli spazi di Hilbert (che si dimostra in maniera totalmente indipendente da questo teorema), esiste una funzione boreliana $g_e^V \in L^2(V)$ tale che per ogni $\psi \in L^2(V)$ vale che

$$L_2(\psi) = \int_V g_e^V \psi \; d\mu_L.$$

Per ogni $M > 0$, sia

$$E_M \coloneqq \{x \in V \mid g_e^V(x) \geq M\}.$$

Fissato $M > 0$, esiste una successione di funzioni $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(V)$ che converge a $\mathbb{1}_{E_M}$ in $L^2(V)$. Essendo $\mu_L(V) < +\infty$, la convergenza è anche in $L^1(V)$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mu(E_M) &\leq \frac{1}{M}\int_V g_e^V \mathbb{1}_{E_M} \; d\mu_L = \frac{L_2(\mathbb{1}_{E_m})}{M} \\
&= \frac{1}{M}\lim_{k\to+\infty} L_2(\psi_k) = \frac{1}{M}\lim_{k\to+\infty} L(\psi_k e) \\
&\leq \frac{1}{M}\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{X}} |\psi_k| \; d\mu_L \\
&= \frac{\mu_L(E_M)}{M}.
\end{aligned}$$

Allora, se $M \geq 1$, si deve avere che $\mu_L(E_M) = 0$. Analogamente si prova che per quasi ogni $x \in V$ vale che $g_e^V(x) \geq -1$. Allora, concludiamo che

$$\left\|g_e^V\right\|_{L^\infty(V)} \leq 1.$$

Se W è un altro aperto a chiusura compatta tale che $V \subseteq W$ e $\psi \in C_c(V) \subseteq C_c(W)$, vale che

$$L(\psi e) = \int_{\mathbb{X}} g_e^V \psi \; d\mu_L = \int_{\mathbb{X}} g_e^W \psi \; d\mu_L;$$

dal lemma 7.3.13 deduciamo che $g_e^V(x) = g_e^W(x)$ per quasi ogni $x \in V$. In altri termini, possiamo definire un'unica funzione $\tau_e : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ boreliana, tale che $\|\tau_e\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \leq 1$ e tale che per ogni aperto V a chiusura compatta vale che $\tau_e(x) = g_e^V(x)$ per ogni $x \in V$ (ricordiamo che $\mathbb{X}$ ammette un'esaustione in compatti, dunque esiste una successione crescente di aperti a chiusura compatta che coprono $\mathbb{X}$). Inoltre, per ogni $\psi \in C_c(\mathbb{X})$ vale che

$$L(\psi e) = \int_{\mathbb{X}} \psi \tau_e \; d\mu_L.$$

Fissiamo una base ortonormale $\{e_1; \ldots; e_n\}$ di $\mathbb{H}$; definiamo la funzione boreliana

$$\tau \coloneqq \sum_{j=1}^n \tau_{e_j} e_j : \mathbb{X} \to \mathbb{H}.$$

Notiamo che τ è essenzialmente limitata perchè $\left\|\tau_{e_j}\right\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \leq 1$ per ogni $j \in \{1; \ldots; n\}$. Data una funzione $f \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H})$, per ogni $j \in \{1; \ldots; n\}$ poniamo $f_j :=< f, e_j >\in C_c(\mathbb{X})$. Ricordando che

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j,$$

vale che

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{j=1}^{n} L(f_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{X}} f_j \tau_{e_j} \; d\mu_L \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{X}} < f, e_j > \tau_{e_j} \; d\mu_L = \int_{\mathbb{X}} < f, \tau > \; d\mu_L. \end{aligned}$$

Step 4: Abbiamo mostrato che τ è boreliano, essenzialmente limitato e per ogni $f \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H})$ vale che

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} < f, \tau > \; d\mu_L.$$

Rimane da provare che $|\tau(x)| = 1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ (rispetto alla misura μ_L).

Sia $\mathbb{S}$ la sfera unitaria in $\mathbb{H}$; denotiamo con

$$\mathcal{D} := \{v_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{S}$$

un sottoinsieme denso numerabile. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathcal{G}_k := \{x \in \mathbb{X} \mid \; < \tau(x), v_k >> 1\}.$$

Definiamo anche

$$\mathcal{G} := \{x \in \mathbb{X} \mid \; |\tau(x)| > 1\}.$$

Dalla continuità del prodotto scalare segue immediatamente che

$$\mathcal{G} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_k.$$

Se $\mu_L(\mathcal{G}) > 0$, allora esiste $K \in \mathbb{N}$ tale che $\mu_L(\mathcal{G}_K) > 0$.

Sia $\varphi \in C_c^+(\mathbb{X})$; ricordando che

$$T(\varphi) = \sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{X}; \mathbb{H}),\ |f(x)| \leq \varphi(x)\ \forall x \in \mathbb{X}\} = \int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L,$$

e che abbiamo provato l'uguaglianza

$$L(\varphi v_K) = \int_{\mathbb{X}} < \varphi v_K, \tau > \; d\mu = \int_{\mathbb{X}} \varphi < \tau, v_K > \; d\mu_L,$$

deduciamo che

$$\int_{\mathbb{X}} \varphi \; d\mu_L = T(\varphi) \geq L(\varphi v_K) = \int_{\mathbb{X}} \varphi < \tau, v_K > \; d\mu.$$

Questo dice che $< \tau(x), v_K >\leq 1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ (rispetto a μ_L), contro l'ipotesi che $\mu_L(\mathcal{G}_K) > 0$.

Infine, dobbiamo provare che l'insieme $\{x \in \mathbb{X} \mid |\tau(x)| < 1\}$ è μ_L-trascurabile; è sufficiente provare che per ogni aperto $V \subseteq \mathbb{X}$ tale che $\mu_L(V) < +\infty$, vale che

$$\mu(V \cap \{x \in \mathbb{X} \mid \ |\tau(x)| < 1)\} = 0.$$

Infatti μ_L è una misura di Radon (vedi 7.3.10) e $\mathbb{X}$ ammette un'esaustione in compatti. Fissato un aperto V di misura μ_L finita e $\varepsilon \in (0,1)$, sia $B_\varepsilon \coloneqq \{x \in V \mid \ |\tau(x)| < 1-\varepsilon\}$. Se $\mu(B_\varepsilon) > 0$, essendo μ una misura di Radon, esisterebbe un compatto $K_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon$ tale che $\mu(K_\varepsilon) > 0$. Allora, per ogni $f \in C_c(V;\mathbb{H})$ tale che $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in V$ avremmo che

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_V < f, \tau > \ d\mu_L \\ &\leq \int_{V \setminus K_\varepsilon} |< f, \tau >| \ d\mu_L + \int_{K_\varepsilon} (1-\varepsilon) \ d\mu_L \\ &\leq \mu_L(V \setminus K_\varepsilon) + (1-\varepsilon)\mu_L(K_\varepsilon) \\ &= \mu_L(V) - \varepsilon\mu_L(K_\varepsilon). \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore sulle funzioni $f \in C_c(V;\mathbb{H})$ tali che $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in V$, troviamo che

$$\mu_L(V) \leq \mu_L(V) - \varepsilon\mu_L(K_\varepsilon),$$

che è assurdo (vedi la definizione 7.3.2). Allora $\mu_L(B_\varepsilon) = 0$, da cui segue che

$$\mu_L(V \cap \{x \in \mathbb{X} \mid \ |\tau(x)| < 1\}) = 0.$$

□

Osservazione 7.3.15. Nel contesto del teorema 7.3.14, vale che

$$\left\| \tau \mu_{L \lfloor \mathcal{B}(\mathbb{X})} \right\| = |\tau| \, \mu_{L \lfloor \mathcal{B}(\mathbb{X})} = \mu_{L \lfloor \mathcal{B}(\mathbb{X})},$$

dove la seconda uguaglianza è stata dimostrata in 6.2.16.

Corollario 7.3.16. *Nel contesto del teorema 7.3.14, il campo vettoriale limitato τ è univocamente determinato.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista campo vettoriale σ limitato tale che per ogni $f \in C_c(\mathbb{X};\mathbb{H})$ vale che

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} < f, \tau > \ d\mu_L = \int_{\mathbb{X}} < f, \sigma > \ d\mu_L.$$

Abbiamo che per ogni $f \in C_c(\mathbb{X};\mathbb{H})$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} < f, \tau - \sigma > \ d\mu_L = 0,$$

da cui segue che τ e σ coincidono quasi ovunque in $\mathbb{X}$ (vedi lemma 7.3.13). □

Duale di C_0

Osservazione 7.3.17. Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ uno spazio topologico e $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione finita. Ricordiamo che la chiusura dello spazio $C_c(\mathbb{X};\mathbb{H})$ rispetto alla norma del sup coincide con lo spazio

$$C_0(\mathbb{X};\mathbb{H}) := \left\{ u \in C(\mathbb{X};\mathbb{H}) \;\middle|\; \forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \text{ compatto t. c. } \sup_{\mathbb{X}\setminus K_\varepsilon} |u| < \varepsilon \right\}.$$

Definizione 7.3.18. Denotiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H})$ lo spazio delle misure boreliane su $\mathbb{X}$ a valori in $\mathbb{H}$.

Osservazione 7.3.19. Notiamo che $\mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H})$ è uno spazio vettoriale reale. Inoltre è immediato verificare che la variazione totale di $\mathbb{X}$ (ovvero la funzione $\|\cdot\|(\mathbb{X}) : \mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H}) \to [0,+\infty)$) è una norma su $\mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H})$. Allora $(\mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H}); \|\cdot\|)$ è uno spazio normato. Si può verificare che è anche uno spazio di Banach: in effetti, questo segue dal teorema 7.3.22 che descrive $\mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H})$ come duale di $C_0(\mathbb{X};\mathbb{H})$ (ricordiamo che ogni spazio duale di uno spazio normato è uno spazio di Banach).

Definizione 7.3.20. Siano $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ è uno spazio topologico e $\mathbb{H}$ è uno spazio di Hilbert di dimensione finita. Siano $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to \mathbb{H}$ una misura a valori in uno spazio di Hilbert di dimensione finita e $f \in C_0(\mathbb{X};\mathbb{H})$. Poniamo

$$\nu = \sum_{j=1}^{n} \nu_j e_j,\ \ f = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j,$$

con $\nu_j :=< \nu, e_j >$ e $f_j :=< f, e_j >$. Poniamo

$$J_\nu(f) := \int_{\mathbb{X}} < f, d\nu >= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{X}} f_j \ d\nu_j.$$

Osservazione 7.3.21. Nel contesto della definizione 7.3.20 osserviamo che $f_j \in L^\infty(\mathbb{X};\nu_j)$ e che ν_j è una misura finita; dunque la scrittura che definisce $J_\nu(f)$ è ben posta (vedi 5.2.10).

Si può verificare che $J_\nu(f)$ non dipende dalla scelta della base di $\mathbb{H}$. Ricordiamo che $\mu << \|\mu\|$ (vedi 7.3.4); per il teorema di Radon-Nikodym (vedi 6.2.15) esiste $\tau : \mathbb{X} \to \mathbb{H}$ integrabile tale che $\nu = \tau \|\nu\|$. Poniamo $\tau_j =< \tau, e_j >$. Ovviamente vale che $\nu_j = \tau_j \|\nu\|$; utilizzando la formula di integrazione rispetto ad una misura definita da una densità (vedi 6.2.9) allora si ha che

$$\int_{\mathbb{X}} < f, d\nu >= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{X}} f_j d\tau_j \|\nu\| = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{X}} f_j \tau_j \ d\|\nu\| = \int_{\mathbb{X}} < f, \tau > d\|\nu\|,$$

che è una scrittura indipendente dalla base.

Teorema 7.3.22. *Supponiamo che $(\mathbb{X};\mathcal{T})$ sia uno spazio topologico LCHN2. La mappa $J : \mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H}) \to C_0(\mathbb{X};\mathbb{H})'$ tale che per ogni $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{X};\mathbb{H})$ per ogni $f \in C_c(\mathbb{X};\mathbb{H})$ vale che*

$$J_\mu(f) := \int_{\mathbb{X}} < f, d\mu >$$

è ben definita ed è un'isometria lineare e bigettiva. Per la precisione, vale che

$$\|J_\mu\|_{(C_0(\mathbb{X};\mathbb{H}))'} = \|\mu\|(\mathbb{X}).$$

Dimostrazione. **Step 1**: Mostriamo che J è ben definita. Data una misura boreliana $\nu : \mathbb{X} \to \mathbb{H}$ ed una funzione $f \in C_0(\mathbb{X};\mathbb{H})$, sia $\tau = \frac{d\nu}{d\|\nu\|}$. Ricordiamo che $|\tau(x)| = 1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ rispetto a $\|\nu\|$ (vedi 6.2.16); allora si ha che

$$\begin{aligned}
|J_\nu(f)| &= \left| \int_{\mathbb{X}} < f,\ d\nu > \right| = \left| \int_{\mathbb{X}} < f, \tau > \ d\|\nu\| \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{X}} |< f, \tau >| \ d\|\nu\| \leq \int_{\mathbb{X}} |f|\,|\tau| \ d\|\nu\| \\
&= \int_{\mathbb{X}} |f| \ d\|\nu\| \leq \|f\|_{C_0(\mathbb{X};\mathbb{H})} \|\nu\|(\mathbb{X}).
\end{aligned}$$

Quindi l'applicazione J_ν è continua e vale

$$\|J_\nu\|_{(C_0(\mathbb{X};\mathbb{H}))'} \leq \|\nu\|(\mathbb{X}).$$

Allora l'applicazione J è ben definita.

Step 2: J è ovviamente lineare. Mostriamo che è un'isometria surgettiva; allora l'iniettività segue immediatamente dalla linearità e dalla surgettività.

Sia $L : C_0(\mathbb{X};\mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo; L si restringe ad un funzionale lineare e continuo su $C_c(\mathbb{X};\mathbb{H})$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 7.3.14), detta μ_L la variazione totale di L, esiste $\tau : \mathbb{X} \to \mathbb{H}$ boreliana e tale che $|\tau(x)| = 1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$ (rispetto a μ_L) tale che per ogni $f \in C_c(\mathbb{X};\mathbb{H})$ vale

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} < f, \tau > \ d\mu_L = \int_{\mathbb{X}} < f, \tau\mu_{L\lfloor\mathcal{B}(\mathbb{X})} >= J_{\tau\mu_{L\lfloor\mathcal{B}(\mathbb{X})}}(f).$$

Se poniamo $\nu := \tau\mu_{L\lfloor\mathcal{B}(\mathbb{X})}$, allora si ha che

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} < f, \nu >= J_\nu(f).$$

Per continuità vale che L e J_ν coincidono sulla chiusura di $C_c(\mathbb{X};\mathbb{H})$ rispetto alla norma del sup; in altri termini, $J_\nu(f) = L(f)$ per ogni $f \in C_0(\mathbb{X};\mathbb{H})$.

Ovviamente ν è una misura boreliana su $\mathbb{X}$ a valori in $\mathbb{H}$; per quanto mostrato in 6.2.16 si ha

$$\|\nu\| = |\tau|\,\mu_{L\lfloor\mathcal{B}(\mathbb{X})} = \mu_{L\lfloor\mathcal{B}(\mathbb{X})}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
\|\nu\|(\mathbb{X}) &= \mu_L(\mathbb{X}) \\
&= \sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{X};\mathbb{H}),\ |f(x)| \leq 1\ \forall x \in \mathbb{X}\} \\
&= \|L\|_{(C_0(\mathbb{X};\mathbb{H}))'} \\
&= \|J_\nu\|_{(C_0(\mathbb{X};\mathbb{H}))'}.
\end{aligned}$$

□

Capitolo 8

Proprietà fini delle funzioni di variabile reale

8.1 Teoremi di ricoprimento

Sia $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico. Denoteremo con

$$\mathcal{B}(x; r) := \{y \in \mathbb{X} \mid d(x; y) < r\},$$

$$\mathbb{B}(x; r) := \{y \in \mathbb{X} \mid d(x; y) \leq r\}$$

rispettivamente la palla aperta e la palla chiusa di centro x e raggio r. Dato $\lambda > 0$, si pone

$$\lambda\mathcal{B}(x; r) = \mathcal{B}(x; \lambda r), \quad \lambda\mathbb{B}(x; r) = \mathbb{B}(x; \lambda r).$$

Dato un insieme $\mathcal{B}$, diciamo che $c(\mathcal{B}) \in \mathbb{X}$ è un centro di $\mathcal{B}$ e $\rho(\mathcal{B})$ è un raggio di $\mathcal{B}$ se vale

$$\mathcal{B} = \{y \in \mathbb{X} \mid d(c(B); y) < \rho(B)\}.$$

In generale il centro e il raggio di un insieme non sono unici; inoltre vale che

$$\mathcal{B}(c(\mathcal{B}); \rho(\mathcal{B})) \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathbb{B}(c(\mathcal{B}); \rho(\mathcal{B})).$$

Teorema 8.1.1. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di palle (aperte o chiuse) in $\mathbb{X}$ tale che*

$$\sup_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \rho(\mathcal{B}) < +\infty;$$

esiste un insieme $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ di palle a due a due disgiunte tali che

$$\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \mathcal{B} \subseteq \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{G}} 5\mathcal{B}.$$

Dimostrazione. Sia $\Xi \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F})$ la classe delle sottofamiglie di $\mathcal{F}$ tali che $\mathcal{R} \in \Xi$ se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- $\mathcal{R}$ è disgiunta;
- se esiste $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ tale che $\mathcal{B} \cap (\bigcup \mathcal{R}) \neq \emptyset$, allora esiste $\mathcal{B}' \in \mathcal{R}$ tale che $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$ e $\rho(\mathcal{B}') \geq \frac{1}{2}\rho(\mathcal{B})$.

Osserviamo che $\Xi \neq \emptyset$ perchè per ipotesi esiste $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{F}$ tale che

$$\rho(\mathcal{B}_0) \geq \frac{1}{2} \sup_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} \rho(\mathcal{B})$$

e $\mathcal{R} := \{\mathcal{B}_0\} \in \Xi$. Possiamo ordinare parzialmente Ξ per inclusione; inoltre, se $\mathcal{C}$ è una catena, allora è superiormente limitata dall'unione $\bigcup\mathcal{C}$ (è banale verificare che l'unione suddetta è ancora in Ξ). Per il lemma di Zorn, esiste un elemento massimale $\mathcal{G}$ rispetto all'ordinamento introdotto in $\mathcal{F}$. Vogliamo mostrare che per ogni $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ vale che $\mathcal{B} \cap \bigcup\mathcal{G} \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo che esista $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{F}$ tale che $B \cap \bigcup\mathcal{G} = \emptyset$. Allora vale che

$$\mathcal{N}_0 := \left\{\mathcal{B}' \in \mathcal{F} \;\middle|\; \mathcal{B}' \cap \bigcup\mathcal{G} = \emptyset\right\} \neq \emptyset;$$

pertanto, esiste $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{N}_0$ tale che

$$\rho(\mathcal{B}_1) \geq \frac{1}{2} \sup_{\mathcal{B}\in\mathcal{N}_0} \rho(\mathcal{B}).$$

Poniamo $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \cup \{\mathcal{B}_1\}$; è immediato verificare che $\mathcal{G}' \in \Xi$. Ovviamente, questo è assurdo perchè è contrario alla massimalità di $\mathcal{G}$. Concludiamo mostrando che $\mathcal{G}$ soddisfa la tesi. La famiglia è disgiunta per costruzione; inoltre se $x \in \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, esiste $\mathcal{B}' \in \mathcal{G}$ tale che $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$ e $\rho(\mathcal{B}') \geq \frac{1}{2}\rho(\mathcal{B})$. Sia $p \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$; osserviamo che

$$d(x; c(\mathcal{B}')) \leq d(x; p) + d(p; c(\mathcal{B}')) \leq 2\rho(B) + \rho(\mathcal{B}') \leq 5\rho(\mathcal{B}').$$

Precisiamo che la disuguaglianza è stretta se le palle sono aperte. □

Definizione 8.1.2 (Spazio doubling)**.** Sia $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico dotato di una misura esterna μ boreliana regolare e non nulla. Si dice che $(\mathbb{X}; \mu; d)$ è uno spazio doubling se esiste $C > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{X}$ per ogni $r > 0$ vale che

$$\mu(\mathcal{B}(x; 2r)) \leq C\mu(\mathcal{B}(x; r)) < +\infty.$$

Proposizione 8.1.3. *Sia* $(\mathbb{X}; \mu; d)$ *uno spazio metrico completo e doubling (vedi 8.1.2); allora* $(\mathbb{X}; d)$ *è localmente compatto e separabile.*

Dimostrazione. **Step 1**: Assumiamo che per ogni $x \in \mathbb{X}$ per ogni $r > 0$ si abbia che $\overline{\mathcal{B}(x; r)}$ è un insieme totalmente limitato. Essendo $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico completo, otteniamo che $\overline{\mathcal{B}(x; r)}$ è un intorno compatto di x, ovvero che $(\mathbb{X}; d)$ è localmente compatto. Inoltre, dalla totale limitatezza di $\overline{\mathcal{B}(x; r)}$ segue che $\mathcal{B}(x; r)$ è separabile. Essendo $\mathbb{X}$ unione numerabile di palle aperte, deduciamo che $(\mathbb{X}; d)$ è uno spazio metrico separabile. Dobbiamo provare che $\overline{\mathcal{B}(x; r)}$ è totalmente limitato. Ricordiamo che questo è equivalente a provare la totale limitatezza di $\mathcal{B}(x; r)$.

Step 2: Sia $\mathcal{B}(x; r)$ una palla aperta in $\mathbb{X}$; fissiamo $\varepsilon \in (0, 2r)$ e consideriamo la famiglia di palle

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{B}(y; \varepsilon) \mid y \in \mathcal{B}(x; r)\}.$$

Tale famiglia rispetta ovviamente le ipotesi del teorema di ricoprimento (vedi 8.1.1); allora esiste una sottofamiglia di palle disgiunte

$$\mathcal{G} := \{\mathcal{B}(y_i; \varepsilon) \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$$

tale che
$$\mathcal{B}(x;r) \subseteq \bigcup \mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}(y_i;5\varepsilon).$$
Allora, è sufficiente provare che la famiglia $\mathcal{G}$ è finita. Ricordiamo che in uno spazio metrico doubling (vedi 8.1.2) tutte le palle aperte hanno misura finita e strettamente positiva. Fissiamo $i \in I$; notiamo che $\mathcal{B}(x;r) \subseteq \mathcal{B}(y_i;2r)$. Essendo $(\mathbb{X};d)$ uno spazio metrico doubling (vedi 8.1.2), esiste una costante $C(\varepsilon;r) > 0$ (indipendente da x, y_i) tale che
$$\mu(\mathcal{B}(x;r)) \leq \mu(\mathcal{B}(y_i;2r)) \leq C(\varepsilon;r)\mu(\mathcal{B}(y_i;\varepsilon))$$
da cui segue che
$$\mu(\mathcal{B}(y_i;\varepsilon)) \geq \frac{\mu(\mathcal{B}(x;r))}{C(\varepsilon;r)}.$$
Supponiamo per assurdo che esista $I' \subseteq I$ numerabile. Essendo $\mathcal{G}$ una famiglia disgiunta, vale che
$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{B}(x;r+\varepsilon)) &\geq \mu\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}(y_i;\varepsilon)\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i\in I'} \mathcal{B}(y_i;\varepsilon)\right) \\ &= \sum_{i\in I'} \mu(\mathcal{B}(y_i;\varepsilon)) \geq \frac{1}{C(\varepsilon;r)} \sum_{i\in I'} \mu(\mathcal{B}(x;r)).\end{aligned}$$
Essendo I' infinito, si ottiene banalmente l'assurdo. □

Teorema 8.1.4 (Vitali)**.** *Siano $(\mathbb{X};\mu;d)$ uno spazio metrico doubling (vedi 8.1.2) e $A \subseteq \mathbb{X}$ un insieme (non si richiede che sia misurabile) tale che $\mu(A) < +\infty$. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di palle chiuse di raggio positivo tali che per ogni $a \in A$, detto*
$$\mathcal{F}_a \coloneqq \{\mathcal{B} \mid a \in \mathcal{B} \in \mathcal{F}\},$$
vale che $\mathcal{F}_a \neq \emptyset$ e
$$\inf_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}_a} \rho(\mathcal{B}) = 0.$$
Allora esiste una famiglia disgiunta e numerabile $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ tale che
$$\mu\left(A \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) = 0.$$

Dimostrazione. Essendo μ una misura esterna boreliana regolare, esiste un boreliano T tale che $A \subseteq T$ e $\mu(A) = \mu(T)$. Per il teorema di approssimazione 7.1.13, esiste un aperto Ω tale che $A \subseteq T \subseteq \Omega$ e $\mu(\Omega) < \mu(T) + 1 = \mu(A) + 1$. Essendo Ω un aperto, è immediato osservare che esiste una sottofamiglia $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ con le proprietà:

- $A \subseteq \bigcup \mathcal{F}' \subseteq \Omega$;
- $\sup_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}'} \rho(\mathcal{B}) < 1$;
- per ogni $a \in A$, detto
$$\mathcal{F}'_a \coloneqq \{\mathcal{B} \mid a \in \mathcal{B} \in \mathcal{F}'\},$$
vale $\mathcal{F}'_a \neq \emptyset$ e
$$\inf_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}'_a} \rho(\mathcal{B}) = 0.$$

Per il teorema di ricoprimento (vedi 8.1.1), esiste una sottofamiglia disgiunta $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$ tale che

$$\bigcup \mathcal{F}' \subseteq \bigcup_{\mathcal{B}\in\mathcal{G}} 5\mathcal{B};$$

dall'inclusione insiemistica segue che

$$\mu\left(\bigcup \mathcal{G}\right) \leq \mu(\Omega) < +\infty.$$

Osserviamo che in uno spazio metrico doubling tutte le palle chiuse di raggio positivo hanno misura positiva (infatti, se ci fosse una palla di raggio positivo avente misura nulla, si otterrebbe facilmente che tutto lo spazio ha misura nulla, contro la definizione 8.1.2). Vogliamo provare che la famiglia $\mathcal{G}$ è al più numerabile. Sia $n \in \mathbb{N}$; poniamo

$$\mathcal{A}_n \coloneqq \{\mathcal{B} \in \mathcal{G} \mid \mu(\mathcal{B}) \geq 2^{-n}\}.$$

Se $\mathcal{A}_n$ fosse infinito, a meno di selezionare una ulteriore sottofamiglia, possiamo supporre che sia numerabile; ricordando che le palle sono disgiunte, otterremmo

$$+\infty = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-n} \leq \sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{A}_n} \mu(\mathcal{B}) \leq \mu(\Omega) < +\infty;$$

questo è assurdo. Concludiamo che $\mathcal{G}$ è al più numerabile. Per fissare la notazione, diciamo che

$$\mathcal{G} = \{\mathbb{B}(x_j; r_j) \mid j \in \mathbb{N}\}.$$

Fissiamo $N \in \mathbb{N}$; sia

$$a \in A \setminus \bigcup_{j\leq N} \mathbb{B}(x_j; r_j).$$

Osserviamo che esiste $r_0 > 0$ tale che

$$\mathbb{B}(a; r_0) \cap \bigcup_{j\leq N} \mathbb{B}(x_j; r_j) = \emptyset.$$

Per costruzione di $\mathcal{F}'$ esiste una palla $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{F}'$ tale che $a \in \mathcal{B}_0$, $\rho(\mathcal{B}_0) < \frac{r_0}{2}$; allora abbiamo che $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{B}(a; r_0)$. Segue che

$$\mathcal{B}_0 \cap \bigcup_{j\leq N} \mathbb{B}(x_j; r_j) = \emptyset.$$

Dal teorema di ricoprimento (vedi 8.1.1) si deduce che esiste $\mathcal{B} \in \mathcal{G}$ tale che $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0 \neq \emptyset$ e $\rho(\mathcal{B}) \geq \frac{\rho(\mathcal{B}_0)}{2}$. Ovviamente, $\mathcal{B} \neq \mathbb{B}(x_j; r_j)$ per ogni $j \leq N$. Sia $p \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0$; vale che

$$d(a; c(\mathcal{B})) \leq d(a; p) + d(p; c(\mathcal{B})) \leq 5\rho(\mathcal{B}).$$

Allora otteniamo che

$$A \setminus \bigcup_{j\leq N} \mathbb{B}(x_j; r_j) \subseteq \bigcup_{l>N} \mathbb{B}(x_l; 5r_l).$$

Ricordiamo che

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(\mathbb{B}(x_j; r_j)) \leq \mu(\Omega) < +\infty.$$

Utilizzando l'ipotesi di spazio doubling, otteniamo che

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{j\le N} \mathbb{B}(x_j;r_j)\right) \le \sum_{l>N} \mathbb{B}(x_l;5r_l) \le C^3 \sum_{l>N} \mathbb{B}(x_l;r_l)$$

che è infinitesimo perchè è la coda di una serie convergente. Dall'inclusione insiemistica (non serve che A sia misurabile) segue che

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{B}(x_j;r_j)\right) \le \inf_{N\in\mathbb{N}} \mu\left(A \setminus \bigcup_{j\le N} \mathbb{B}(x_j;r_j)\right) = 0.$$

□

8.2 Alcune proprietà delle funzioni di variabile reale

8.2.1 Funzioni monotone

Sulla derivabilità quasi ovunque

Proposizione 8.2.1. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona (crescente o decrescente). Allora f è boreliana.*

Dimostrazione. Notiamo che per ogni intervallo $J \subseteq \mathbb{R}$ vale che $f^{-1}(J)$ è un intervallo contenuto in I; questo è sufficiente a provare che per ogni boreliano $B \subseteq \mathbb{R}$ vale che $f^{-1}(B)$ è un boreliano in I. □

Definizione 8.2.2 (Numeri derivati)**.** Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi. Si dice che $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ è un numero derivato di f in x se esiste una successione $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ infinitesima tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \lambda;$$

si denota con $Df(x)$ l'insieme dei numeri derivato di f in x.

Osservazione 8.2.3. Nelle notazioni della definizione 8.2.2, vale che $Df(x) \neq \emptyset$: basta osservare che, se x è interno a I, allora

$$\limsup_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \limsup_{h\to0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\liminf_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \liminf_{h\to0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

sono elementi in $Df(x)$; del resto, se x è un punto estremale di I, allora soltanto due dei suddetti numeri sono in $Df(x)$.

Lemma 8.2.4. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo compatto, $E \subseteq I$ un insieme qualsiasi non vuoto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e $\eta \ge 0$.*

- *Se $Df(x) \cap [0,\eta] \neq \emptyset$ per ogni $x \in E$, allora $m_1(f(E)) \le \eta m_1(E)$;*
- *se $Df(x) \cap [\eta,+\infty] \neq \emptyset$ per ogni $x \in E$, allora $m_1(f(E)) \ge \eta m_1(E)$.*

Dimostrazione. **Step 1**: Mostriamo il primo enunciato. Siano $\eta_1 > \eta$, $\varepsilon > 0$, Ω un aperto tale che $E \subseteq \Omega$ e

$$m_1(\Omega) \leq m_1(E) + \varepsilon;$$

un aperto Ω con queste proprietà esiste perchè m_1 è una misura di Radon (vedi 7.2.7). Sia $x \in E$; per definizione, esiste una successione infinitesima e mai nulla $\{h_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$|f(x + h_{x,n}) - f(x)| < \eta_1 |h_{x,n}|.$$

Definiamo gli insiemi

$$J_{x,n} := \{x + th_{x,n} \mid t \in [0,1]\},$$
$$S_{x,n} := \{f(x) + t(f(x + h_{x,n}) - f(x)) \mid t \in [0,1]\}.$$

Segue che

$$m_1(S_{x,n}) = |f(x + h_{x,n}) - f(x)| \leq \eta_1 |h_{x,n}| = \eta_1 m_1(J_{x,n}).$$

Introduciamo la famiglia

$$\mathcal{F} := \{S_{x,n} \mid x \in E,\ n \in \mathbb{N},\ |h_{x,n}| < 1,\ J_{x,n} \subseteq \Omega\}.$$

Osserviamo che per ogni $x \in E$ vale che

$$\inf_{S_{x,n}\in\mathcal{F}} \operatorname{diam}(S_{x,n}) = 0;$$

infatti la successione $\{h_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima (mai nulla) e Ω aperto. Ricordando che $m_1(f(E))$ è finito perchè I è compatto e f è monotona, per il teorema di Vitali (vedi 8.1.4), esiste una sottofamiglia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ disgiunta e al più numerabile tale che

$$m_1\left(f(E) \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) = 0.$$

Per fissare la notazione, poniamo

$$\mathcal{G} = \left\{S_{x_j,n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}};$$

essendo $\mathcal{G}$ una famiglia disgiunta, per monotonia di f si deduce che anche $\left\{J_{x_j,n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una famiglia disgiunta. Essendo tutte le misure finite, otteniamo che

$$\begin{aligned}
m_1(f(E)) &\leq m_1\left(\bigcup \mathcal{G}\right) + m_1\left(f(E) \setminus \bigcup \mathcal{G}\right)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} m_1(S_{x_j,n_j}) \leq \eta_1 \sum_{j\in\mathbb{N}} m_1(J_{x_j,n_j})\\
&= \eta_1 m_1\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_{x_j,n_j}\right) \leq \eta_1 m_1(\Omega) \leq \eta_1(m_1(E) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ e $\eta_1 \to \eta^+$, si ottiene la disuguaglianza cercata.

Step 2: Per il secondo enunciato, si procede in maniera del tutto analoga, prendendo $\eta_2 \in (0, \eta)$, notando che

$$m_1(S_{x,n}) \geq \eta_1 m_1(J_{x,n})$$

e definendo

$$\mathcal{F} := \{S_{x,n} \mid x \in E,\ n \in \mathbb{N},\ |h_{x,n}| < 1,\ J_{x,n} \subseteq \Omega\}.$$

$\square$

Teorema 8.2.5 (Derivazione di Lebesgue)**.** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ monotona; allora f è derivabile quasi ovunque in I.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo assumere che I sia compatto e che f sia non decrescente. Dati $p, q \in Q \cap [0, +\infty)$, con $p < q$, poniamo

$$E_{p,q} := \left\{ x \in I \;\middle|\; \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq q > p \geq \liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}.$$

Dal lemma 8.2.4 si deduce che

$$m_1(f(E_{p,q})) \leq p m_1(E_{p,q}) < +\infty,$$

$$+\infty > m_1(f(E_{p,q})) \geq q m_1(E_{p,q}).$$

Da ciò segue che

$$p m_1(E_{p,q}) \geq q m_1(E_{p,q});$$

allora

$$(p - q) m_1(E_{p,q}) \geq 0.$$

Essendo $p - q < 0$, si trova che

$$m_1(E_{p,q}) = 0.$$

Si conclude osservando che l'insieme $\mathcal{N}$ dei punti di non derivabilità di f coincide con l'unione degli insiemi $E_{p,q}$ al variare di $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$ e $p < q$. □

Funzioni $\mathcal{BV}$

Definizione 8.2.6 ($\mathcal{BV}$)**.** Siano $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso, $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico, $f : I \to \mathbb{X}$ una funzione. Diciamo che f è una funzione a variazione limitata se esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni partizione $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ di I si ha che

$$\sum_{i=1}^{n} d(f(t_i); f(t_{i-1})) \leq M.$$

La costante ottimale è chiamata variazione di f nell'intervallo I ed è denotata con

$$V_a^b f = V_{[a,b]} f.$$

La classe delle funzioni a variazione limitata forma l'insieme $\mathcal{BV}$ (bounded variation).

Esempio 8.2.7. Se f è una curva in $\mathbb{R}^n$, la variazione lungo l'intervallo $[a, b]$ è la sua lunghezza.

Lemma 8.2.8. *Siano $a < b < c$ numeri reali e $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi. Allora vale che*

$$V_a^c f = V_a^b f + V_b^c f.$$

Dimostrazione. Data una partizione $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ di $[a, b]$ e una partizione $b = s_0 < \cdots < s_m = c$ di $[b, c]$, produciamo una partizione di $[a, c]$ giustapponendo le due partizioni. Dalla definizione di variazione totale su $[a, c]$ otteniamo che

$$\sum_{j=1}^{n} d(f(t_j); f(t_{j-1})) + \sum_{i=1}^{m} d(f(s_j); f(s_{j-1})) \leq V_a^c f.$$

Passando al sup su tutte le partizioni di $[a, b]$ e $[a, c]$, otteniamo che

$$V_a^b f + V_b^c f \leq V_a^c f.$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza opposta. Sia $a = t_0 < \cdots < t_n = c$ una partizione di $[a, c]$; sia $i \in \{1; \ldots ; n\}$ tale che $b \in [t_{i-1}, t_i)$; dalla disuguaglianza triangolare e dalla definizione di variazione totale su $[a, b]$ e $[b, c]$ otteniamo che

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} d(f(t_{j-1}); f(t_j)) &\leq \sum_{j=1}^{i-1} d(f(t_{j-1}); f(t_j)) + d(f(t_{i-1}); f(b)) \\ &\quad + d(f(b); f(t_i)) + \sum_{j=i+1}^{n} d(f(t_{j-1}); f(t_j)) \\ &\leq V_a^b f + V_b^c f.\end{aligned}$$

Passando al sup sulle partizioni di $[a, c]$ si ottiene che

$$V_a^c f \leq V_a^b f + V_b^c f.$$

□

Proposizione 8.2.9. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione in $\mathcal{BV}$. Esistono due funzioni $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone non decrescenti tali che $f = g_1 - g_2$.*

Dimostrazione. Per ogni $t \in [a, b]$ definiamo

$$g_1(t) \coloneqq V_a^t f.$$

Essendo $f \in \mathcal{BV}$, la funzione g_1 è ben definita; per il lemma 8.2.8, abbiamo che g_1 è monotona non decrescente. Infatti, dati $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, vale che

$$V_a^{t_2} f = V_a^{t_1} f + V_{t_1}^{t_2} f \geq V_a^{t_1} f.$$

Poniamo

$$g_2(t) \coloneqq g_1(t) - f(t);$$

dobbiamo provare che g_2 è monotona non decrescente. Dati $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, per il lemma 8.2.8, vale che

$$g_2(t_2) - g_2(t_1) = V_{t_1}^{t_2} f - (f(t_2) - f(t_1)) \geq 0$$

per la definizione di variazione di f su $[t_1, t_2]$ (infatti $\{t_1; t_2\}$ è una specifica partizione di $[t_1, t_2]$). □

Corollario 8.2.10. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione in $\mathcal{BV}$. Allora è boreliana, è derivabile quasi ovunque e f' è una funzione misurabile.*

Dimostrazione. Il fatto che f sia boreliana segue da 8.2.9 e da 8.2.1; la derivabilità quasi ovunque segue da 8.2.9 e 8.2.5. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme dei punti di non derivabilità e poniamo $\mathcal{D} \coloneqq [a, b] \setminus \mathcal{N}$. Poniamo

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, b], \\ 0 & \text{se } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$g_n(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x+e^{-n}) - g(x)}{e^{-n}} & \text{se } x \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Essendo g una funzione misurabile e la misura di Lebesgue completa, si deduce che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabile che converge puntualmente a f' in $\mathcal{D}$ e a 0 in $\mathcal{N}$; allora f' è una funzione misurabile (per la precisione, la sua estensione a 0 fuori da $\mathcal{D}$ è misurabile). □

Proprietà integrale delle funzioni monotone

Proposizione 8.2.11. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente. Allora vale che*

$$\int_a^b f'(t)\ dt \le f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Notiamo che per l'ipotesi di monotonia, $f'(t) \ge 0$ per quasi ogni $t \in [a, b]$. Definiamo la funzione

$$g(x) := \begin{cases} f(b) & \text{se } x \ge b, \\ f(x) & \text{se } x \in [a,b], \\ f(a) & \text{se } x \le a. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$g_n(x) := \frac{g(x+e^{-n}) - g(x)}{e^{-n}}.$$

Abbiamo provato (vedi 8.2.10) che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende puntualmente a f' per quasi ogni $x \in [a, b]$. Applicando il lemma di Fatou otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)\ dt &= \int_a^b \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\ dt \le \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)\ dt \\ &= \liminf_{n\to+\infty} e^n \int_a^b [g(t+e^{-n}) - g(t)]\ dt \\ &= \liminf_{n\to+\infty} e^n \left(\int_{a+e^{-n}}^{b+e^{-n}} g(t)\ dt - \int_a^b g(t)\ dt \right) \\ &= \liminf_{n\to+\infty} e^n \left(\int_b^{b+e^{-n}} g(t)\ dt - \int_a^{a+e^{-n}} g(t)\ dt \right) \\ &= \liminf_{n\to+\infty} e^n \left(e^{-n} f(b) - \int_a^{a+e^{-n}} f(t)\ dt \right) \\ &= f(b) - \limsup_{n\to+\infty} e^n \int_a^{a+e^{-n}} f(t)\ dt \\ &\le f(b) - f(a), \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che f è monotona. □

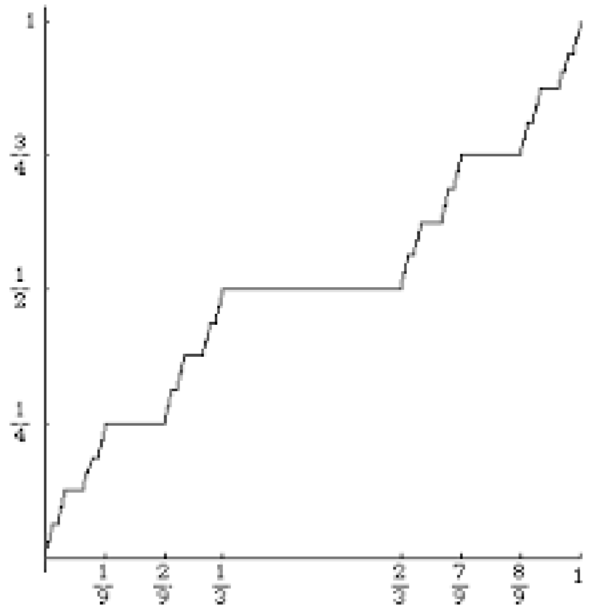

Figura 8.1: Scala di Cantor

Esempio 8.2.12. Esiste una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotona non decrescente tale che

$$\int_0^1 f'(t)\ dt < f(1) - f(0).$$

Descriviamo l'esempio della funzione di Cantor. Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{X} := \{f : [0,1] \to [0,1] \mid f \in C^0([0,1]),\ f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$$

e sia d la distanza del sup in $\mathbb{X}$; $(\mathbb{X}; d)$ è uno spazio metrico completo. Sia $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ la mappa tale che

$$[Tf](x) = \begin{cases} \frac{f(3x)}{2} & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{1}{2} + \frac{f(3x-2)}{2} & \text{se } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che T è ben definita ed è una mappa $\frac{1}{2}$-lipschitziana. Allora la mappa T ammette un unico punto fisso ψ tale che per ogni $f \in \mathbb{X}$ la successione $\{T^n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a ψ. Se scegliamo $f(x) = x$, osserviamo che $[Tf](x) = \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \Omega_1^1 := \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$; inoltre $[T^n f](x) = \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \Omega_1^1$ per ogni $n \geq 1$. Analogamente, $[T^n f](x)$ è costante in degli intervalli disgiunti Ω_j^k di misura $\frac{1}{3^k}$, per $k \in \{1; \ldots; n\}$ per ogni $j \in \{1; \ldots; 2^{k-1}\}$; se $m \geq n$ $T^m f$ mantiene lo stesso valore costante nei suddetti intervalli.

Siccome ψ è il limite uniforme delle iterazioni (vedi 8.1), deduciamo che è costante nell'insieme

$$\mathcal{D} := \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} \Omega_j^k.$$

Possiamo facilmente calcolare che

$$m_1(\mathcal{D}) = \sum_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} m_1(\Omega_j^k) = \sum_{k\geq 1} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1.$$

Allora ψ è costante quasi ovunque in $\mathcal{D}$; essendo $\mathcal{D}$ unione di intervalli, per quasi ogni $x \in \mathcal{D}$ vale che $\psi'(x) = 0$. Abbiamo che

$$\int_0^1 \psi'(t)\ dt = 0 < 1 = \psi(1) - \psi(0).$$

Del resto, la funzione ψ è monotona non decrescente e continua, perchè è limite uniforme di funzioni con queste proprietà.

8.2.2 Funzioni assolutamente continue

L'esempio della funzione di Cantor (vedi 8.2.12) mostra che la classe delle funzioni monotone non coincide con quella delle funzioni per cui vale il teorema fondamentale del calcolo integrale. Vogliamo individuare le funzioni che si possono caratterizzare in questo modo.

Definizione 8.2.13 (Assoluta continuità)**.** Siano $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico e $f : [a, b] \to \mathbb{X}$ una funzione. Si dice che f è assolutamente continua (scriveremo che è $\mathcal{AC}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta$$

vale che

$$\sum_{j=1}^{n} d(f(b_j); f(a_j)) < \varepsilon.$$

Osservazione 8.2.14. Nel contesto della definizione 8.2.13, una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{X}$ in $\mathcal{AC}$ è uniformemente continua ed è in $\mathcal{BV}$. L'uniforme continuità è ovvia; mostriamo che $f \in \mathcal{BV}$. Sia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partizione di $[a, b]$. Fissiamo $\varepsilon = 1$ e consideriamo il δ corrispondente a ε nella definizione di assoluta continuità. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N intervalli di lunghezza al più δ, introducendo i punti

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{N-1} < s_N = b.$$

Osserviamo che, aggiungendo punti alla partizione, la variazione di f lungo la nuova partizione è maggiore di quella lungo la precedente. Quindi, dovendo studiare un estremo superiore, a meno di raffinarla, possiamo supporre che la partizione data contenga i punti s_i introdotti in precedenza. Associando le somme in ciascun sottointervallo, osserviamo che

$$\sum_{j=1}^{n} d(f(t_j); f(t_{j-1})) \leq \sum_{j=1}^{N} \varepsilon = N\varepsilon = N,$$

che è una limitazione indipendente dalla partizione. Pertanto f è una funzione in $\mathcal{BV}$.

Esempio 8.2.15. La differenziabilità quasi ovunque delle funzioni $\mathcal{AC}$ vale in dimensione finita (l'abbiamo dimostrata in dimensione 1). Infatti, se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $(\mathbb{X}; d)$ è uno spazio metrico di dimensione infinita e $f : I \to \mathbb{X}$ è una funzione $\mathcal{AC}$, è possibile che f non sia differenziabile in alcun punto. Sia $f : (0, 1) \to L^1((0, 1))$ tale che

$$f(t) \coloneqq \mathbb{1}_{(0,t)}.$$

Notiamo che f è un'isometria; in particolare, f è una funzione assolutamente continua; tuttavia non è differenziabile in alcun punto. Infatti, dato $t \in (0,1)$ e $h > 0$ abbastanza piccolo tale che $t+h \in (0,1)$, vale che

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{1}{h}\mathbb{1}_{[t,t+h)}.$$

Prendendo il limite per h che tende a 0^+, notiamo che $\frac{1}{h}\mathbb{1}_{[t,t+h)}$ non ha limite in $L^1((0,1))$.

Teorema 8.2.16 (Fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Sono fatti equivalenti:*

- *f è $\mathcal{AC}$;*
- *esiste $h \in L^1((a,b))$ tale che per ogni $\alpha, \beta \in [a,b]$ con $\alpha < \beta$ vale che*

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta h(t)\ dt.$$

In tal caso $h(x) = f'(x)$ per quasi ogni $x \in [a,b]$.

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che f sia $\mathcal{AC}$; per 8.2.14 e 8.2.9, esistono due funzioni $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone non decrescenti tali che $f = g_1 - g_2$. Per la proposizione 8.2.11, vale che

$$0 \le \int_a^b g_1'(t)\ dt \le g_1(b) - g_1(a) < +\infty.$$

Dunque $g_1' \in L^1((a,b))$; analogamente si prova che $g_2' \in L^1((a,b))$. Per differenza, $f' \in L^1((a,b))$. Vogliamo provare che per ogni $\alpha, \beta \in [a,b]$, con $\alpha < \beta$, vale che

$$\int_\alpha^\beta f'(t)\ dt = f(\beta) - f(\alpha).$$

Senza perdita di generalità, possiamo supporre $a = \alpha$ e $b = \beta$. Definiamo

$$g(x) := \begin{cases} f(a) & \text{se } x \le a; \\ f(x) & \text{se } x \in [a,b]; \\ f(b) & \text{se } x \ge b. \end{cases}$$

Osserviamo che anche g è una funzione $\mathcal{AC}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$g_n(x) := \frac{g(x+e^{-n}) - g(x)}{e^{-n}}.$$

Abbiamo già mostrato che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f' per quasi ogni $x \in [a,b]$ (vedi 8.2.10). Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\delta > 0$ corrispondente a ε nella definizione di assoluta continuità (vedi 8.2.13). Per il teorema di Egorov (vedi 3.3.2), esiste un compatto $K \subseteq [a,b]$ tale che $m([a,b] \setminus K) \le \delta$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f' in $[a,b] \setminus K$. Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_{[a,b]} g_n(t)\ dt = \int_{[a,b]\setminus K} g_n(t)\ dt + \int_K g_n(t)\ dt.$$

Per convergenza uniforme vale che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_K g_n(t)\ dt = \int_K f'(t)\ dt.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g_n(t)\ dt &= \lim_{n\to+\infty} e^n \int_a^b [g(t+e^{-n}) - g(t)]\ dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^n \left(\int_{a+e^{-n}}^{b+e^{-n}} g(t)\ dt - \int_a^b g(t)\ dt\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^n \int_b^{b+e^{-n}} g(t)\ dt - e^n \int_a^{a+e^{-n}} g(t)\ dt \\
&= g(b) - g(a) \\
&= f(b) - f(a),
\end{aligned}$$

dove il passaggio al limite segue dal teorema della media integrale (infatti g è continua).

Infine, studiamo l'ultimo addendo. Essendo $[a,b]\setminus K$ un aperto, esiste una famiglia al più numerabile $\{J_l\}_{l\in I}$ di intervalli aperti e disgiunti tali che

$$[a,b]\setminus K = \bigcup_{l\in I} J_l.$$

Per ogni $l\in I$ poniamo $\alpha_l := \inf J_l$ e $\beta_l := \sup J_l$. Fissiamo $n\in\mathbb{N}$; essendo g una funzione limitata e $[a,b]\setminus K$ un insieme di misura finita, applicando ripetutamente il teorema di convergenza dominata otteniamo che

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[a,b]\setminus K} g_n(t)\ dt\right| &= \left|\sum_{l\in I}\int_{J_l} g_n(t)\ dt\right| \\
&= \left|\sum_{l\in I} e^n \int_{\alpha_l}^{\beta_l} [g(t+e^{-n}) - g(t)]\ dt\right| \\
&= \left|\sum_{l\in I} e^n \left(\int_{\beta_l}^{\beta_l+e^{-n}} g(t)\ dt - \int_{\alpha_l}^{\alpha_l+e^{-n}} g(t)\ dt\right)\right| \\
&= \left|\sum_{l\in I} e^n \left(\int_0^{e^{-n}} g(y+\beta_l)\ dy - \int_a^{e^{-n}} g(y+\alpha_l)\ dy\right)\right| \\
&= \left|\sum_{l\in I} e^n \left(\int_0^{e^{-n}} [g(y+\beta_l) - g(y+\alpha_l)]\ dy\right)\right| \\
&\le e^n \int_0^{e^{-n}} \sum_{l\in I} |g(y+\beta_l) - g(y+\alpha_l)|\ dy \\
&\le e^n \int_0^{e^{-n}} \varepsilon\ dy \\
&= \varepsilon;
\end{aligned}$$

l'ultimo passaggio segue dal fatto che g è $\mathcal{AC}$ e abbiamo scelto i punti α_l, β_l in modo tale che

$$\sum_{l\in I} |\beta_l - \alpha_l| = m_1([a,b]\setminus K) \le \delta.$$

Osserviamo che la proprietà di assoluta continuità può facilmente essere riformulata con le somme numerabili. Dalla definizione di assoluta continuità, è ovvio che possiamo supporre che $\delta < \varepsilon$. Abbiamo provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta > 0$ e un compatto $K \subseteq [a,b]$ tale che $m_1([a,b] \setminus K) \leq \delta \leq \varepsilon$ e inoltre

$$\begin{aligned}\left|[f(b) - f(a)] - \int_a^b f'(t)\ dt\right| &\leq \left|[f(b) - f(a)] - \int_K f'(t)\ dt\right| \\ &\quad + \left|\int_a^b f'(t)\ dt - \int_K f'(t)\ dt\right| \\ &\leq \varepsilon + \int_{[a,b\setminus K]} |f'(t)|\ dt.\end{aligned}$$

Ricordando che $f' \in L^1((a,b))$ e passando al limite per ε che tende a 0^+, otteniamo che

$$\left|[f(b) - f(a)] - \int_a^b f'(t)\ dt\right| \leq 0.$$

Step 2: Supponiamo che esista $h \in L^1((a,b))$ tale che per ogni $\alpha < \beta$ in $[a,b]$ vale che

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta h(t)\ dt;$$

dobbiamo provare che f è $\mathcal{AC}$. Sia $\varepsilon > 0$; per l'assoluta continuità dell'integrale (vedi 6.2.6), esiste $\delta > 0$ tale che per ogni insieme misurabile $E \subseteq [a,b]$ tale che $m_1(E) < \delta$, vale che

$$\int_E |h(t)|\ dt \leq \varepsilon.$$

Allora la conclusione è immediata. □

Capitolo 9

Misure di Hausdorff

9.1 Costruzione di Carathéodory

In questa sezione supponiamo che sia assegnato uno spazio metrico $(\mathbb{X}; d)$.

9.1.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 9.1.1 (Funzione gauge)**.** Siano $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ tale che $\emptyset \in \mathcal{S}$ e $\zeta : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una funzione tale che $\zeta(\emptyset) = 0$. Si dice che ζ è una funzione gauge.

Definizione 9.1.2 (δ-ricoprimento)**.** Fissiamo $\delta > 0$. Diremo che $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un delta ricoprimento di un insieme $E \subseteq \mathbb{X}$ se

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_j$$

e inoltre $\operatorname{diam}(E_j) \leq \delta$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Definizione 9.1.3. Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ tale che $\emptyset \in \mathcal{S}$; sia $\zeta : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una funzione gauge. Sia $\delta > 0$; per ogni $T \subseteq \mathbb{X}$ poniamo

$$\zeta_\delta(T) := \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \zeta(E_j) \;\middle|\; \{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } T \right\},$$

con la convenzione che $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. Per ogni $T \subseteq \mathbb{X}$ si pone

$$\mathcal{T}_\zeta(T) := \sup_{\delta>0} \zeta_\delta(T).$$

Osservazione 9.1.4. Nel contesto della definizione 9.1.3, ζ_δ è una misura esterna per ogni $\delta > 0$. Basta notare che, detto

$$\mathcal{S}_\delta := \{E \in \mathcal{S} \mid \operatorname{diam}(E) \leq \delta\},$$

ζ_δ è l'estensione di una qualsiasi funzione d'insieme definita come in 1.2.3; allora ζ_δ è una misura esterna per il teorema di Carathéodory (vedi 1.2.7). Precisiamo anche che se $0 < \delta_1 < \delta_2$ allora $\zeta_{\delta_1} \geq \zeta_{\delta_2}$; pertanto, per ogni $T \subseteq \mathbb{X}$ vale che

$$\mathcal{T}_\zeta(T) = \sup_{\delta>0} \zeta_\delta(T) = \lim_{\delta\to 0^+} \zeta_\delta(T).$$

Inoltre $\mathcal{T}_\zeta$ è una misura esterna, essendo estremo superiore di misure esterne.

Proposizione 9.1.5. *Nel contesto della definizione 9.1.3, la misura $\mathcal{T}_\zeta$ è boreliana.*

Dimostrazione. Per il criterio di Carathéodory (vedi 7.1.15), è sufficiente provare che T_ζ è additiva sui distanti. Siano $A, B \subseteq \mathbb{X}$ insiemi disgiunti e tali che $\lambda_0 := \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Siano $\delta \in (0, \lambda_0)$ e $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ un δ-ricoprimento di $A \cup B$. Per la scelta di δ, possiamo decomporre $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ nell'unione di due sottofamiglie disgiunte, ovvero

$$\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G},$$

tali che

$$\Big(\bigcup \mathcal{F}\Big) \cap B = \emptyset, \quad \Big(\bigcup \mathcal{G}\Big) \cap A = \emptyset.$$

In particolare, $\mathcal{F}$ è un δ-ricoprimento di A e $\mathcal{G}$ è un δ-ricoprimento di B. Osserviamo che

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \zeta(E_j) = \sum_{E_j\in\mathcal{F}} \zeta(E_j) + \sum_{E_j\in\mathcal{G}} \zeta(E_j) \geq \zeta_\delta(A) + \zeta_\delta(B).$$

Passando all'estremo inferiore al variare dei δ-ricoprimenti di $A \cup B$, si trova che

$$\zeta_\delta(A) + \zeta_\delta(B) \leq \zeta_\delta(A \cup B).$$

Del resto, ζ_δ è subadditiva; dunque

$$\zeta_\delta(A) + \zeta_\delta(B) = \zeta_\delta(A \cup B).$$

Passando al limite per δ che tende a 0^+, si ottiene che

$$\mathcal{T}_\zeta(A) + \mathcal{T}_\zeta(B) = \mathcal{T}_\zeta(A \cup B).$$

□

Proposizione 9.1.6. *Nel contesto della definizione 9.1.3, se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{X})$, allora $\mathcal{T}_\zeta$ è una misura boreliana regolare.*

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \mathbb{X}$ tale che $\mathcal{T}_\zeta(E) < +\infty$ (altrimenti la conclusione è ovvia, prendendo $\mathbb{X}$ come coperchio boreliano di E). Notiamo che per ogni $\delta > 0$ esiste un insieme $A_\delta \in \mathcal{S}_{\sigma\delta} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{X})$ tale che $\zeta_\delta(E) = \zeta_\delta(A_\delta)$ e $E \subseteq A_\delta$ (vedi 1.2.25). Poniamo

$$A := \bigcap_{\delta>0} A_\delta \in \mathcal{S}_{\sigma\delta} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

In particolare $E \subseteq A$, allora $\mathcal{T}_\zeta(E) \leq \mathcal{T}_\zeta(A)$. Tuttavia, vale anche che

$$\mathcal{T}_\zeta(A) = \sup_{\delta>0} \zeta_\delta(A) \leq \sup_{\delta>0} \zeta_\delta(A_\delta) \leq \sup_{\delta>0} \zeta_\delta(E) = T_\zeta(E).$$

□

9.1.2 Costruzione della misura di Hausdorff

Definizione 9.1.7. Sia $\alpha \geq 0$ fissato. Se $\alpha > 0$, introduciamo la funzione gauge $\zeta^\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty]$ tale che

$$\zeta^\alpha(S) := c_\alpha(\mathrm{diam} S)^\alpha,$$

dove $c_\alpha > 0$ è una costante (che fisseremo in seguito). Se $\alpha = 0$, si pone $\zeta^0 : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \to \{0; 1\}$ tale che

$$\zeta^0(S) := \begin{cases} 1 & \text{se } S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } S = \emptyset. \end{cases}$$

Per ogni $\delta > 0$, denotiamo la misura approssimante ζ^α_δ come $\mathcal{H}^\alpha_\delta$. Si denota la misura esterna $\mathcal{T}_{\zeta^\alpha}$ come $\mathcal{H}^\alpha$: è chiamata misura di Hausdorff α-dimensionale.

Osservazione 9.1.8. Sia $E \subseteq \mathbb{X}$; se $\alpha > 0$, allora

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \sup_{\delta > 0} \left\{ \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} c_\alpha (\mathrm{diam} E_j)^\alpha \;\middle|\; \{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X}) \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di E} \right\} \right\}.$$

Se $\delta = 0$, allora $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti. Notiamo che per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{X}$ esiste un aperto B tale che $E \subseteq B$ e $\mathrm{diam}(E) = \mathrm{diam}(B)$. Allora, definendo la funzione ζ^α soltanto sugli aperti, le misure esterne ζ^α_δ e T_{ζ^α} date dalla costruzione di Carathéodory coincidono rispettivamente con $\mathcal{H}^\alpha_\delta$ e $\mathcal{H}^\alpha$. Questo è sufficiente a concludere che la misura $\mathcal{H}^\alpha$ è boreliana regolare (vedi 9.1.6).

Lemma 9.1.9. *Siano $E \subseteq \mathbb{X}$ e $0 < \alpha < \beta < +\infty$.*

- *Se $\mathcal{H}^\alpha(E) < +\infty$, allora $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$;*
- *se $\mathcal{H}^\beta(E) > 0$, allora $\mathcal{H}^\alpha(E) = +\infty$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\delta > 0$; sia $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un δ-ricoprimento di E. Allora vale

$$c_\beta \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathrm{diam} E_j)^\beta \leq \frac{c_\beta}{c_\alpha} \delta^{\beta - \alpha} \sum_{j \in \mathbb{N}} c_\alpha (\mathrm{diam} E_j)^\alpha.$$

Passando all'estremo inferiore sui δ-ricoprimenti di E, otteniamo che

$$\mathcal{H}^\beta_\delta(E) \leq \frac{c_\beta}{c_\alpha} \delta^{\beta - \alpha} \mathcal{H}^\alpha_\delta(E).$$

Passando al limite per δ che tende a 0^+, otteniamo le due tesi nelle ipotesi diverse. $\square$

Definizione 9.1.10 (Dimensione di Hausdorff)**.** Sia $E \subseteq \mathbb{X}$. Si pone

$$\dim_{\mathcal{H}} E := \inf\{\alpha > 0 \mid \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}$$

la dimensione di Hausdorff di E, con la convenzione che $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Osservazione 9.1.11. Per il lemma 9.1.9, la dimensione di Hausdorff di un insieme è ben definita; inoltre se $0 < \mathcal{H}^\alpha < +\infty$, allora $\alpha = \dim_{\mathcal{H}} E$. Tuttavia, può esistere un insieme $E \subseteq \mathbb{X}$ tale che $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ e $\dim_{\mathcal{H}}(E) = \alpha$.

9.1.3 Misura di Hausdorff e mappe hölderiane

Teorema 9.1.12. *Siano* $(\mathbb{X}; d)$ *e* $(\mathbb{Y}; \rho)$ *due spazi metrici. Siano* $A \subseteq \mathbb{X}$ *e* $f : A \to \mathbb{Y}$ *una mappa* β*-hölderiana, cioè esiste una costante* $L > 0$ *tale che per ogni* $x, y \in \mathbb{X}$ *vale che*

$$\rho(f(x); f(y)) \leq Ld(x; y)^\beta.$$

Allora per ogni $\alpha > 0$ *vale*

$$\mathcal{H}^\alpha(f(A)) \leq \frac{c_\alpha}{c_{\alpha\beta}} L^\alpha \mathcal{H}^{\alpha\beta}(A);$$

in particolare vale che

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \frac{1}{\beta} \dim_{\mathcal{H}}(A).$$

Dimostrazione. Siano $\delta > 0$ e $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un δ-ricoprimento di A. Allora vale che

$$\mathrm{diam} f(E_j) \leq L(\mathrm{diam} E_j)^\beta \leq L\delta^\beta.$$

Dunque $\{f(E_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un $L\delta^\beta$-ricoprimento di $f(A)$. Segue che

$$\mathcal{H}^\alpha_{L\delta^\beta}(f(A)) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} c_\alpha (\mathrm{diam} f(E_j))^\alpha \leq \frac{c_\alpha}{c_{\alpha\beta}} L^\alpha \sum_{j\in\mathbb{N}} c_{\alpha\beta} (\mathrm{diam} E_j)^{\alpha\beta}.$$

Passando all'estremo inferiore sui δ-ricoprimenti di A si trova che

$$\mathcal{H}^\alpha_{L\delta^\beta}(f(A)) \leq \frac{c_\alpha}{c_{\alpha\beta}} L^\alpha \mathcal{H}^{\alpha\beta}_\delta(A);$$

prendendo il limite per δ che tende a 0^+, si ottiene la tesi. □

Corollario 9.1.13. *Nel contesto del teorema 9.1.12, supponiamo che* $f : A \to \mathbb{Y}$ *sia lipschitziana, ovvero* $\beta = 1$*. Allora valgono i seguenti fatti:*

- $\mathcal{H}^\alpha(f(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A)$ *e* $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A)$*;*
- *se* f *è una mappa* 1*-lipschitziana (ad esempio una proiezione se* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*), vale che*
$$\mathcal{H}^\alpha(f(A)) \leq \mathcal{H}^\alpha(A).$$
- *se* f *è un'isometria, ovvero* $\rho(f(x), f(y)) = d(x; y)$ *per ogni* $x, y \in A$*, allora*
$$\mathcal{H}^\alpha(f(A)) = \mathcal{H}^\alpha(A);$$
- *se* $\lambda \neq 0$*,* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è tale che* $f(x) = \lambda x$*, allora*
$$\mathcal{H}^\alpha(f(A)) = |\lambda|^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A).$$

Dimostrazione. I primi due enunciati sono una ovvia conseguenza del teorema 9.1.12. Per il terzo e per il quarto enunciato, basta applicare il primo punto alle mappe $f : A \to f(A)$ e $f^{-1} : f(A) \to A$ (infatti f è iniettiva). □

Esempio 9.1.14. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme qualsiasi e $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione iniettiva e lipschitziana; supponiamo anche che $f^{-1} : f(A) \to A$ sia una funzione lipschitziana. Applicando il corollario 9.1.13 si deduce che

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \dim_{\mathcal{H}}(f(A)).$$

Notiamo che questo è il caso in cui A è un aperto di $\mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ è la parametrizzazione locale di una varietà immersa in $\mathbb{R}^n$.

9.2 Misura di Hausdorff nello spazio euclideo

9.2.1 $\mathcal{H}^n$ versus m_n

Definizione 9.2.1. Sia $n \geq 1$. Poniamo $\omega_n := m_n(\mathcal{B}(0,1))$.

Osservazione 9.2.2. Per quanto mostrato in 1.3.5, per ogni $r > 0$ vale che

$$m_n(\mathcal{B}(0;r)) = r^n m_n(\mathcal{B}(0,1)) = r^n \omega_n.$$

Definizione 9.2.3. Nel contesto della definizione 9.1.7, se $\mathcal{H}^n$ è la misura di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$, si pone $c_n := \frac{\omega_n}{2^n}$.

Teorema 9.2.4 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski)**.** *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi misurabili. Allora vale la disuguaglianza*

$$m_n(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq m_n(A)^{\frac{1}{n}} + m_n(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione. Verifichiamo la disuguaglianza soltanto nel caso in cui A, B siano rettangoli. Ricordiamo che la misura di Lebesgue è invariante per traslazione; inoltre la frontiera di un rettangolo in $\mathbb{R}^n$ ha misura di Lebesgue n-dimensionale nulla. In altri termini, possiamo supporre che

$$A = [0, \alpha_1] \times \cdots \times [0, \alpha_n],$$

$$B = [0, \beta_1] \times \cdots \times [0, \beta_n].$$

Osserviamo che

$$A + B = [0, \alpha_1 + \beta_1] \times \cdots \times [0, \alpha_n + \beta_n].$$

Allora, dobbiamo provare che

$$\left(\prod_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n \beta_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Notiamo che questa disuguaglianza è verificata. □

Teorema 9.2.5 (Disuguaglianza isodiametrica)**.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme qualsiasi. Vale che*

$$m_n(E) \leq \frac{\omega_n}{2^n} (\operatorname{diam}(E))^n.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che E sia compatto. Poniamo

$$S := \frac{E + (-E)}{2} = \left\{ \frac{\zeta - \eta}{2} \;\middle|\; \zeta, \eta \in E \right\}.$$

Osserviamo che $0 \in S$. Per ogni $\zeta, \eta \in E$ vale che

$$\left| \frac{\zeta - \eta}{2} \right| \leq \frac{\operatorname{diam} E}{2}.$$

In particolare, otteniamo che

$$S \subseteq \mathcal{B}\left(0; \frac{\operatorname{diam}(E)}{2}\right).$$

Dall'inclusione segue la disuguaglianza

$$m_n(S) \leq m_n\left(\mathcal{B}\left(0; \frac{\mathrm{diam}(E)}{2}\right)\right) = \frac{\omega_n}{2^n}(\mathrm{diam}(E)^n).$$

Per la disuguaglianza di Brunn-Minkowski si ha che

$$m_n(S) = \left[m_n\left(\frac{E}{2} + \frac{-E}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n \geq \left[2m_n\left(\frac{E}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = 2^n\frac{m_n(E)}{2^n} = m_n(E).$$

Step 2: Se E è illimitato la disuguaglianza è ovvia; se E è limitato, basta passare alla chiusura $\overline{E}$ e usare il fatto che $\mathrm{diam}(E) = \mathrm{diam}\overline{(E)}$. □

Teorema 9.2.6. *In $\mathbb{R}^n$, la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^n$ è assolutamente continua (come misura esterna) rispetto alla misura di Lebesgue m_n.*

Dimostrazione. **Step 1**: Sia $I \coloneqq I_1 \times \cdots \times I_n$ un n-intervallo di lati di lunghezze $l_i \coloneqq m_1(I_i)$ finite e positive. Definiamo

$$l_{min} \coloneqq \min_{i\in\{1;\ldots;n\}} l_i.$$

Supporre che per ogni $i \in \{1;\ldots;n\}$ valga

$$1 \leq \frac{l_i}{l_{min}} \leq 2.$$

Osserviamo che

$$\mathrm{diam}(I) = \left(\sum_{i=1}^n l_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{n}l_{min}.$$

Ricordando che $c_n = \frac{\omega_n}{2^n}$, segue che

$$m_n(I) = \prod_{i=1}^n l_i \geq (l_{min})^n \geq \frac{(\mathrm{diam}I)^n}{2^n n^{\frac{n}{2}}} = \frac{c_n(\mathrm{diam}I)^n}{\omega_n n^{\frac{n}{2}}}.$$

Step 2: Sia $R \coloneqq R_1 \times \cdots \times R_n$ un n-intervallo di lati di lunghezze $r_i \coloneqq m_1(R_i)$ finite e positive. Definiamo

$$r_{min} \coloneqq \min_{i\in\{1;\ldots;n\}} r_i.$$

Poniamo

$$p_i \coloneqq \left\lfloor \frac{r_i}{r_{min}} \right\rfloor.$$

Osserviamo che

$$p_i \leq \frac{r_i}{r_{min}} < p_i + 1 \leq 2p_i;$$

da cui segue che

$$1 \leq \frac{r_i}{p_i} \cdot \frac{1}{r_{min}} \leq 2.$$

Possiamo dividere R_i in p_i sottointervalli uguali di lunghezza $\frac{r_i}{p_i}$; in questo modo decomponiamo R in un numero finito di n-intervalli disgiunti di lunghezza dei lati $\left\{\frac{r_1}{p_1};\ldots;\frac{r_n}{p_n}\right\}$. Ognuno di questi sottointervalli rispetta la condizione punto precedente.

Step 3: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $m_n(A) = 0$. Per la definizione di misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ come misura esterna (vedi 1.3.3), esiste una famiglia al più numerabile di n-intervalli $\{I_i\}_{i\in J}$ che ricopre A ed è tale che

$$\sum_{i\in J} m_n(I_i) \leq \varepsilon.$$

A meno di raffinare gli intervalli, si può supporre che sia a due a due disgiunti e che ciascuno abbia lati di lunghezze finite e positive.

Fissiamo $\delta > 0$; a meno di raffinare ulteriormente gli n-intervalli, possiamo supporre che $\{I_i\}_{i\in J}$ sia un δ-ricoprimento di A. Per quanto mostrato nel secondo step, a meno di dividere ulteriormente ogni n-intervallo, possiamo supporre che per ogni $i \in J$ valga

$$m_n(I_i) \geq \frac{c_n(\mathrm{diam} I_i)^n}{\omega_n n^{\frac{n}{2}}}.$$

Allora abbiamo che

$$\varepsilon \geq \sum_{i\in J} m_n(I_i) \geq \frac{1}{\omega_n n^{\frac{n}{2}}} \sum_{i\in J} c_n(\mathrm{diam} I_i)^n.$$

Per definizione di misura approssimante (vedi 9.1.7), vale che

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \varepsilon\omega_n n^{\frac{n}{2}}.$$

Passando al limite per δ che tende a 0^+, otteniamo che

$$\mathcal{H}^n(A) \leq \varepsilon\omega_n n^{\frac{n}{2}}.$$

Passando al limite per ε che tende a 0^+, troviamo che

$$\mathcal{H}^n(A) = 0.$$

□

Teorema 9.2.7. *In $\mathbb{R}^n$, vale che $\mathcal{H}^n = m_n$ come misure esterne.*

Dimostrazione. **Step 1**: Proviamo che $m_n \leq \mathcal{H}^n$. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ e $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un δ-ricoprimento di A. Per la disuguaglianza isodiametrica (vedi 9.2.5), vale che

$$m_n(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m_n(E_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\omega_n}{2^n}(\mathrm{diam} E_j)^n.$$

Ricordando che $c_n = \frac{\omega_n}{2^n}$ e passando all'estremo inferiore sui δ-ricoprimenti di A, si trova che per ogni $\delta > 0$ vale

$$m_n(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \mathcal{H}^n(A).$$

Step 2: Dobbiamo mostrare che $m_n \geq \mathcal{H}^n$. Ricordiamo che m_n è una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$ (vedi 7.2.7) e che $\mathbb{R}^n$ dotato della distanza euclidea e della misura di Lebesgue è uno spazio metrico doubling (vedi 8.1.2 e 1.3.5).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $m_n(A) < +\infty$ (altrimenti la disuguaglianza è ovvia). Fissiamo $\varepsilon > 0$; per la definizione 7.2.1, esiste un aperto Ω tale che $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ e $m_n(\Omega) \leq m_n(A) + \varepsilon$. Fissiamo $\delta > 0$ e poniamo

$$\mathcal{F} \coloneqq \{\mathcal{B}(x, r) \mid x \in A,\ r \in (0, 2\delta),\ \mathcal{B}(x; r) \subseteq \Omega\}.$$

Per ogni $x \in A$, poniamo

$$\mathcal{F}_x \coloneqq \{\mathcal{B}(y;r) \in \mathcal{F} \mid x \in \mathcal{B}(y;r)\}.$$

Osserviamo che

$$\inf_{\mathcal{B}\in\mathcal{F}} \rho(\mathcal{B}) = 0.$$

Possiamo applicare il teorema di Vitali (vedi 8.1.4) e otteniamo che esiste una famiglia disgiunta al più numerabile di palle $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ tale che

$$m_n\left(A \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) = 0.$$

Per il teorema 9.2.6, vale che

$$\mathcal{H}^n\left(A \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) = 0.$$

In particolare, vale che

$$\mathcal{H}^n_\delta\left(A \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) = 0.$$

Essendo $\mathcal{H}^n_\delta$ una misura esterna, vale che

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\le \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup \mathcal{G}\right) + \mathcal{H}^n_\delta\left(A \setminus \bigcup \mathcal{G}\right)\\
&\le \sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{G}} \mathcal{H}^n_\delta(\mathcal{B}) \le \frac{\omega_n}{2^n}\sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{G}} (\operatorname{diam}(\mathcal{B}))^n\\
&= \sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{G}} m_n(\mathcal{B}) = m_n\left(\bigcup \mathcal{G}\right)\\
&\le m_n(\Omega) \le m_n(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Prendendo il limite per δ che tende a 0^+, otteniamo che $\mathcal{H}^n(A) \le m_n(A) + \varepsilon$. Passando al limite per ε che tende a 0^+, troviamo che $\mathcal{H}^n(A) \le m_n(A)$. □

9.2.2 Frattali

Presentiamo (non sempre in maniera del tutto rigorosa) la costruzione di alcuni frattali.

Esempio 9.2.8 (Insieme di Cantor). Fissiamo $a > 2$; vogliamo definire l'insieme di Cantor di proporzione a. Al passo 0 consideriamo $\mathbb{X}_0$ il segmento $[0,1]$. Al passo 1 dividiamo il segmento $[0,1]$ in tre parti, in proporzioni $\frac{1}{a}$ (per la prima) $1-\frac{2}{a}$ (per quella centrale) e $\frac{1}{a}$ (per la terza); rimuoviamo la parte centrale e otteniamo l'insieme $\mathbb{X}_1$ come unione del primo e del terzo segmento (si veda la figura 9.1). Al passo 2 ripetiamo questa costruzione su ciascuno dei due segmenti, ottenendo l'insieme $\mathbb{X}_2$ che è l'unione di quattro segmenti di lunghezza $\frac{1}{a^2}$. Iterando questa costruzione, al passo n otteniamo l'insieme $\mathbb{X}_n$ come unione di 2^n rettangoli di lunghezza $\frac{1}{a^n}$; denotiamo questi segmenti come $\{T^n_1;\ldots;T^n_{2^n}\}$. L'insieme di Cantor di proporzione $\frac{1}{a}$ è definito come

$$C_a \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{X}_n.$$

Se prendiamo i rettangoli T^n_i chiusi, deduciamo immediatamente che C_a è un insieme compatto. Precisiamo che nel caso $a = 3$ si ottiene l'insieme di Cantor classico (vedi 8.2.12).

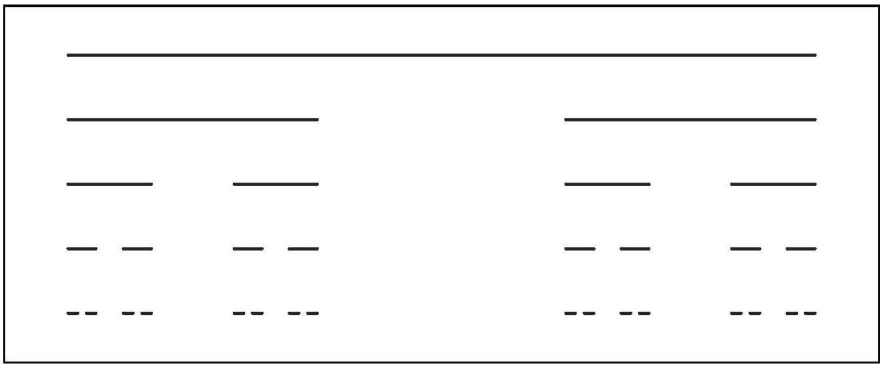

Figura 9.1: Insieme di Cantor

Vogliamo calcolare la dimensione di Hausdorff di C_a. Sia $\beta > 0$; notiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale $\{T_1^k; \dots ; T_{2^k}^k\}$ è un $\frac{1}{a^k}$-ricoprimento di C_a; pertanto vale che

$$\mathcal{H}^\beta_{\frac{1}{a^k}}(C) \leq c_\beta \sum_{i=1}^{2^k} \left(\operatorname{diam}(T_i^k)\right)^\beta = c_\beta \frac{2^k}{a^{k\beta}},$$

che è uniformemente limitato in k se $a^\beta = 2$, ovvero

$$\beta = \frac{\log 2}{\log a}.$$

In particolare, vale che $\mathcal{H}^\beta(C_a) \leq c_\beta$. Dal lemma 9.1.9 segue che

$$\dim_{\mathcal{H}}(C_\alpha) \leq \frac{\log 2}{\log a}.$$

Vogliamo dimostrare che vale l'uguaglianza. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un 1-ricoprimento finito di C_a. Per ogni $i \in \mathbb{N}$, esiste k_i tale che

$$\frac{1}{a^{k_i+1}} \leq \operatorname{diam}(U_i) \leq \frac{1}{a^{k_i}};$$

notiamo che U_i interseca al più due elementi di $\mathbb{X}_{k_i}$, altrimenti dovrebbe essere

$$\operatorname{diam}(U_i) > \frac{1}{a^{k_i}};$$

deduciamo che per ogni $j \geq k_i$ l'insieme U_i interseca al più 2^{j-k_i+1} rettangoli di $\mathbb{X}_j$. Ricordando che I è finito, sia

$$j > \max_{i \in I} k_i.$$

Dalla stima sui diametri segue che per ogni intervallo T al livello j-esimo esiste un aperto U_{i_T} che interseca in maniera non banale T. Detto $I = \{1; \dots ; k\}$ definiamo

$$N_1 := \#\{T \text{ al livello j-esimo} \mid T \cap U_1 \neq \emptyset\}$$

e per ogni $h \in \{2; \dots ; k\}$

$$N_h := \# \left\{ T \text{ al livello j-esimo} \;\middle|\; T \cap U_h \neq \emptyset, \quad T \cap \bigcup_{l=1}^{h-1} U_l = \emptyset \right\}.$$

Da questa costruzione segue immediatamente che

$$\sum_{h=1}^{k} N_i = 2^j.$$

Notiamo anche che per ogni $i \in \{1; \dots; k\}$ vale che

$$N_i \leq 2^{j-k_i+1}.$$

Se assumiamo che $2 = a^\beta$, otteniamo che

$$\begin{aligned} N_i \leq 2^{j-k_i+1} &= 2^{j+1}\left(\frac{1}{a^{k_i}}\right)^\beta \\ &= 4 \cdot 2^j \cdot \left(\frac{1}{a^{k_i+1}}\right)^\beta \leq 4 \cdot 2^j (\operatorname{diam}(U_i))^\beta. \end{aligned}$$

Segue che

$$2^j = \sum_{i=1}^{k} N_i \leq \sum_{i=1}^{k} 4 \cdot 2^j \cdot (\operatorname{diam}(U_i))^\beta;$$

si ottiene che

$$\frac{c_\beta}{4} \leq c_\beta \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{diam}(U_i))^\beta.$$

Notiamo che per compattezza (ogni ricoprimento aperto di C_a ammette un sottoricoprimento finito) e per quanto osservato in 9.1.8 possiamo supporre che un qualsiasi ricoprimento di C_a sia formato da un numero finito di aperti. Allora deduciamo che per qualsiasi 1-ricoprimento $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (non necessariamente aperto) di C_a vale che

$$\frac{c_\beta}{4} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(V_i))^\beta;$$

segue immediatamente che

$$\mathcal{H}^\beta(C_a) \geq \frac{c_\beta}{4};$$

in particolare otteniamo che

$$\dim_{\mathcal{H}}(C_a) \geq \beta = \frac{\log 2}{\log a}.$$

Per ogni numero reale $s \in (0, 1)$ abbiamo costruito esplicitamente un insieme avente dimensione di Hausdorff s.

Esempio 9.2.9 (Polvere di Cantor). La costruzione di tale insieme può essere descritta tramite un processo iterativo. Al passo 0, consideriamo $\mathbb{X}_0 := [0, 1]^2$ il quadrato in $\mathbb{R}^2$. Al passo 1, dividiamo il quadrato in sedici parti e prendiamo quattro quadrati come in figura 9.2 che chiamiamo $T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1$. Denotiamo con $\mathbb{X}_1$ l'unione dei quattro quadrati selezionati. Al passo 2 dividiamo ciascuno dei quattro quadrati selezionati al passo 1 in quattro sedici quadrati e selezioniamone quattro per ciascuno dei T_i^1. Otteniamo l'insieme $\mathbb{X}_2$ che è formato dall'unione di sedici quadrati di lato $\frac{1}{16}$. Iterando questa costruzione, al passo n si ottiene un insieme $\mathbb{X}_n$ formato dall'unione di 4^n quadrati di lato $\frac{1}{4^n}$. Notiamo che la famiglia $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente (si dice che è una famiglia

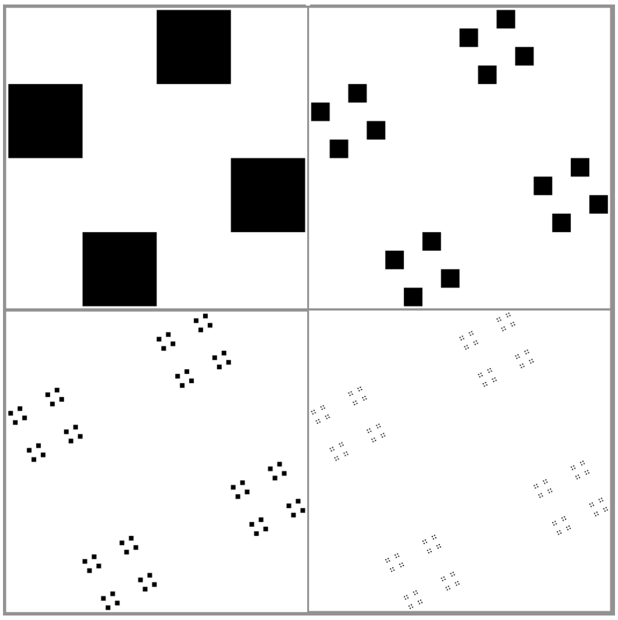

Figura 9.2: Polvere di Cantor

"nested"), pertanto non abbiamo difficoltà a definire

$$\mathbb{X} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{X}_n.$$

Se ad ogni passo selezioniamo dei quadrati chiusi, $\mathbb{X}$ è un insieme compatto. Vogliamo calcolarne la dimensione di Hausdorff. Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}_n = \bigcup_{i=1}^{4^n} T_i^n.$$

Essendo $\operatorname{diam}(T_i^n) = \frac{\sqrt{2}}{4^n}$, per ogni $\alpha > 0$ si ha che

$$\mathcal{H}^\alpha_{\frac{\sqrt{2}}{4^n}}(\mathbb{X}) \leq c_\alpha \sum_{i=1}^{4^n} \operatorname{diam}(T_i^n) = c_\alpha(\sqrt{2})^\alpha 4^{n-n\alpha}.$$

Se $\alpha = 1$, notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\mathcal{H}^1_{\frac{\sqrt{2}}{4^n}} \leq c_1\sqrt{2}.$$

Prendendo l'estremo superiore su n, si trova che

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{X}) \leq c_1\sqrt{2} < +\infty.$$

Allora $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{X}) \leq 1$ (vedi 9.1.10 e 9.1.9). Per mostrare che vale l'altra disuguaglianza, notiamo che la proiezione π su una coordinata è una mappa 1-lipschitziana e che $\pi(\mathbb{X}) = [0,1]$. Per quanto mostrato in 9.1.13, si ha che

$$1 = \dim_{\mathcal{H}}(\pi(\mathbb{X})) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{X}).$$

Abbiamo costruito un insieme di Hausdorff di dimensione 1 nel piano che è radicalmente diverso da una curva rettificabile.

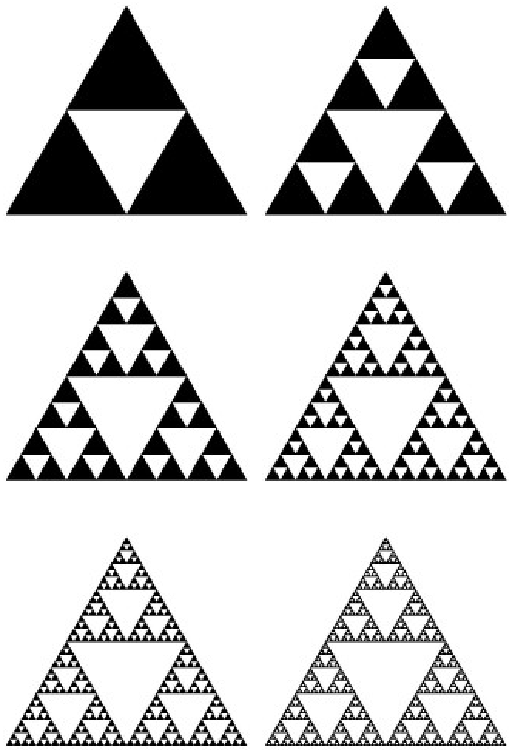

Figura 9.3: Triangolo di Sierpinsky

Esempio 9.2.10 (Triangolo di Sierpinsky). Procedendo come nell'esempio 9.2.9, è possibile definire il triangolo di Sierpinsky come intersezione di una famiglia di insiemi compatti annidati; a tal proposito, si veda la figura 9.3. Si può dimostrare che, detto T il triangolo di Sierpinsky, vale che

$$\dim_{\mathcal{H}}(T) = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Esempio 9.2.11 (Curva di Von Kock). La figura 9.4 rappresenta la costruzione iterativa della curva di Von Kock. Al passo 0 consideriamo $\mathbb{X}_0$ il segmento $[0, 1]$; al passo 1 dividiamo questo segmento in quattro parti e sostituiamo quella centrale con altri due segmenti, come in figura 9.4, ottenendo la spezzata $\mathbb{X}_1$. Al passo 2, dividiamo ciascun segmento in quattro parti e operiamo la trasformazione descritta al passo 1 in ciascuno dei quattro pezzi che formano $\mathbb{X}_1$, ottenendo la spezzata $\mathbb{X}_2$. Iterando questa costruzione, otteniamo una successione di spezzate; vorremmo dire che al limite questo processo si assesta intorno ad una certa figura. Osserviamo che la famiglia di spezzate $\{\mathbb{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non è annidata, quindi non ha senso definire l'insieme limite come intersezione delle spezzate (come è stato fatto negli esempi 9.2.9 e 9.2.10). Per formalizzare questa costruzione è necessario introdurre una struttura metrica sull'insieme dei compatti di $\mathbb{R}^2$ e ottenere l'esistenza dell'insieme limite $\mathbb{X}_\infty$ come punto fisso di un'opportuna contrazione su tale spazio. In ogni caso, è possibile dimostrare che

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{X}_\infty) = \frac{\log(4)}{\log(3)}.$$

Introduciamo la nozione di distanza di Hausdorff ed enunciamo i risultati che consentono di formalizzare le costruzioni illustrate negli esempi precedenti.

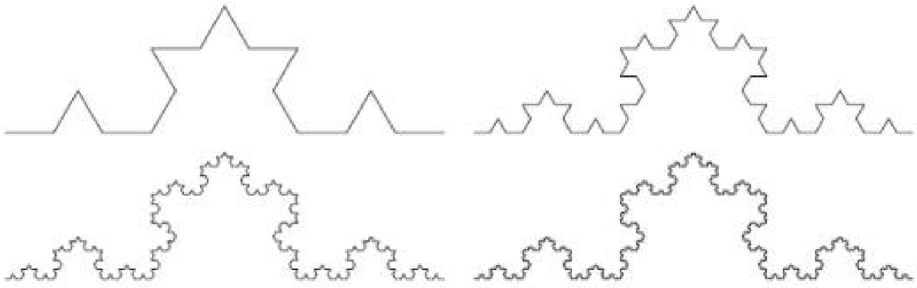

Figura 9.4: Curva di Von Kock

Definizione 9.2.12 (Distanza di Hausdorff)**.** Siano $(\mathbb{X}; d)$ uno spazio metrico, $t > 0$ e $S \subseteq \mathbb{X}$. Si pone

$$I_t(S) \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid \operatorname{dist}(x; S) < t\}.$$

Siano A, B insiemi limitati; definiamo la distanza di Haurdorff tra A e B:

$$d_{\mathcal{H}}(A; B) \coloneqq \inf\{t > 0 \mid A \subseteq I_t(B),\ B \subseteq I_t(A)\}.$$

Osservazione 9.2.13. Si può mostrare che $d_{\mathcal{H}}$ è una distanza sullo spazio degli insiemi limitati di $\mathbb{X}$.

Teorema 9.2.14 (Blaschke)**.** *Se $(\mathbb{X}; d)$ è uno spazio metrico compatto, detta $C_{\mathbb{X}}$ la classe degli insiemi compatti di $\mathbb{X}$, allora $(C_{\mathbb{X}}; d_{\mathcal{H}})$ è uno spazio metrico compatto.*

Teorema 9.2.15. *Siano $S_1, \ldots, S_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mappe lipschitziane con costanti di Lipschitz $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in (0, 1)$. La mappa $S : C_{\mathbb{X}} \to C_{\mathbb{X}}$ tale che per ogni compatto K vale*

$$S(K) \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K)$$

è una contrazione rispetto alla distanza $d_{\mathcal{H}}$.

Teorema 9.2.16 (Hutchinson, 1981)**.** *Siano $S_1, \ldots, S_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ similitudini, ovvero $|S_i(x) - S_i(y)| = \lambda_i |x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $\lambda_i \in (0, 1)$. Supponiamo che sia verificata la condizione dell'insieme aperto, cioè esiste un aperto non vuoto e limitato tale che*

$$\bigcup_{j=1}^{n} S_j(V) \subseteq V.$$

Allora la mappa $S : C_{\mathbb{R}^n} \to C_{\mathbb{R}^n}$ tale che

$$S(K) \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K)$$

ammette un unico punto fisso F che soddisfa la seguente condizione:

$$0 < \mathcal{H}^\beta(F) < +\infty,$$

dove β è tale che

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\beta = 1.$$

Osservazione 9.2.17. Notiamo che per tutte le costruzioni presentate è possibile applicare il teorema di Hutchinson.

9.2.3 Formula dell'area in $\mathbb{R}^n$

Definizione 9.2.18. Sia $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia A la matrice $n \times n$ che rappresenta J rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si pone $\det(J) \coloneqq \det(A)$.

Osservazione 9.2.19. Essendo il determinante di una matrice invariante per similitudine, la definizione 9.2.18 è ben posta, cioè non dipende dalla base $\mathcal{B}$ che abbiamo fissato.

Osservazione 9.2.20. Dati un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^k$ e una funzione $f : A \to \mathbb{R}^n$ una mappa in $C^1(A; \mathbb{R}^n)$, ricordiamo che per ogni $x \in A$ il differenziale di f in x è un'applicazione lineare $D_f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ che si rappresenta rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^k$ ed $\mathbb{R}^n$ con la matrice

$$\mathcal{J}_f(x) \coloneqq \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$$

di taglia $n \times k$.

Definizione 9.2.21. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un aperto, $f \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ e $x \in A$. Si pone

$$J_f(x) \coloneqq \sqrt{\det(D_f(x)^* \circ D_f(x))}$$

dove $D_f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è il differenziale di f in x, $D_f(x)^*$ è l'omomorfismo aggiunto di $D_f(x)$.

Osservazione 9.2.22. Nel contesto della definizione 9.2.21, se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una mappa affine, il suo differenziale in qualsiasi punto coincide con la sua parte lineare. In tal caso, scriveremo che $J_f(x) = J_f$ per ogni $x \in \mathbb{R}^k$.

Enunciamo i seguenti risultati di algebra lineare.

Teorema 9.2.23. *Sia $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare iniettiva (in particolare $n \geq k$) tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^k$, vale $L(x) = Ax$, dove A è una matrice a coefficienti reali di taglia $n \times k$. Per ogni scelta di*

$$1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$$

poniamo $A^{i_1,\dots,i_k}$ la matrice quadrata avente per j-esima colonna la i_j-esima colonna di A. Allora, vale che

$$J_L = \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} (\det(A^{i_1,\dots,i_k}))^2}.$$

Teorema 9.2.24 (Decomposizione polare)**.** *Siano $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare iniettiva. Esistono due applicazioni lineari $J : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ortogonale (cioè $< J(x), J(y) >=< x, y >$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^k$) e $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ autoaggiunta (cioè $< S(x), y >=< x, S(y) >$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^k$) tali che $L = J \circ S$.*

Teorema 9.2.25. *Sia $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare e iniettiva ($k \leq n$). Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^k$ vale che*

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = J_L \cdot m_k(A).$$

Dimostrazione. Per il teorema di decomposizione polare, esistono J, S come nel teorema 9.2.24. Essendo $J : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ortogonale, detto $J^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ l'omomorfismo aggiunto di J, vale che $J^*_{|J(\mathbb{R}^k)} : J(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^k$ è un'isometria. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(L(A)) &= \mathcal{H}^k(J^*_{|J(\mathbb{R}^k)}(L(A))) && (9.1)\\
&= \mathcal{H}^k(J^*_{|J(\mathbb{R}^k)} \circ J \circ S(A)) && (9.2)\\
&= \mathcal{H}^k(S(A)) && (9.3)\\
&= \mathcal{H}^k(O \circ \Lambda \circ O^T(A)) && (9.4)\\
&= \mathcal{H}^k(\Lambda \circ O^T(A)) && (9.5)\\
&= m_k(\Lambda \circ O^T(A)) && (9.6)\\
&= |\det(\Lambda)|\, m_k(O^T(A)) && (9.7)\\
&= |\det(\Lambda)|\, \mathcal{H}^K(O^T(A)) && (9.8)\\
&= |\det(\Lambda)|\, \mathcal{H}^K(A) && (9.9)\\
&= |\det(\Lambda)|\, m_k(A) && (9.10)\\
&= J_L \cdot m_k(A). && (9.11)
\end{aligned}$$

In (9.1), (9.5) e (9.9) abbiamo utilizzato il comportamento della misura di Haurdorff rispetto alle isometrie (vedi 9.1.13); in (9.2) abbiamo utilizzato il fatto che $L = J \circ S$ (vedi 9.2.24); in (9.3) abbiamo usato il fatto che $J^*_{|J(\mathbb{R}^k)} \circ J = J^* \circ J = Id : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, essendo J ortogonale (vedi 9.2.24); in (9.4) abbiamo utilizzato il fatto che, essendo $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ autoaggiunta (vedi 9.2.24), per il teorema spettrale è ortogonalmente diagonalizzabile ($O : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è ortogonale, O^T è l'endomorfismo aggiunto di O, $\Lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^K$ è un'applicazione lineare diagonale); in (9.6), (9.8) e (9.10) abbiamo usato il fatto che m_k e $\mathcal{H}^k$ coincidono come misure esterne in $\mathbb{R}^k$; in (9.7) abbiamo usato la proprietà di riscalamento della misura di Lebesgue (vedi 1.3.5); in (9.11) abbiamo usato il fatto che

$$J_L = \sqrt{\det(L^* \circ L)} = \sqrt{\det(S^* \circ J^* \circ J \circ S)} = \sqrt{\det(S^*)\det(S)} = |\det(\Lambda)|\,.$$

□

Lemma 9.2.26. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^0(A; \mathbb{R}^n)$. Per ogni boreliano $B \subseteq A$, vale che $f(B)$ è un boreliano $\mathbb{R}^n$. Se f è anche iniettiva $\mathcal{H}^k$ è numerabilmente additiva sugli insiemi della forma $\{f(B) \mid B \in \mathcal{B}(A)\}$, cioè se $\{B_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ sono boreliani a due a due disgiunti in A, allora $\{f(B_h)\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di boreliani in $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti e vale che*

$$\mathcal{H}^k\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} f(B_h)\right) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^k(f(B_h)).$$

Dimostrazione. Essendo f una funzione continua, per ogni $K \subseteq A$ compatto in A vale che $f(K)$ è compatto in $\mathbb{R}^n$; in particolare, $f(K)$ è un boreliano. Osservando che ogni aperto Ω in A ammette un'esaustione in compatti, possiamo scrivere $f(\Omega)$ come unione crescente di boreliani; pertanto, $f(\Omega)$ è un boreliano in $\mathbb{R}^n$. Notiamo che la famiglia

$$\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(A) \mid f(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

è chiusa per unione numerabile; in particolare, $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. Avendo verificato che $\mathcal{F}$ contiene gli aperti, deduciamo che contiene i boreliani di A.

Ricordiamo che $\mathcal{H}^k$ è una misura esterna boreliana regolare su $\mathbb{R}^n$ (vedi 9.1.6); pertanto, la σ-algebra dei misurabili secondo $\mathcal{H}^k$ contiene i boreliani di $\mathbb{R}^n$. In conclusione, se f è anche iniettiva deduciamo che $\mathcal{H}^k$ è numerabilmente additiva sugli insiemi della forma

$$\{f(B) \mid B \in \mathcal{B}(A)\}$$

nel senso specificato. □

Teorema 9.2.27 (Formula dell'area)**.** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un aperto, $\overline{Q} \subseteq A$ un k-intervallo compatto e $f \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ tale che $f_{|Q}$ sia iniettiva e $D_f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sia iniettivo per ogni $x \in Q$. Allora vale che*

$$\mathcal{H}^k(f(Q)) = \int_Q J_f(x)\ dx.$$

Dimostrazione. Essendo $D_f(x)$ iniettivo per ogni $x \in \overline{Q}$, dalla compattezza di $\overline{Q} \times S^{k-1}$ e dalla regolarità di f segue che esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\alpha := \min_{x \in \overline{Q},\ |v|=1} |D_f(x)v|\,.$$

Fissiamo $\varepsilon \in (0, \alpha)$; essendo f di classe $C^1(A; \mathbb{R}^n)$ e $\overline{Q}$ compatto in A, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x, x' \in Q$ tali che $|x - x'| \leq \delta_\varepsilon$ vale che

$$|J_f(x) - J_f(x')| \leq \varepsilon,\ \|D_f(x) - D_f(x')\| \leq \varepsilon,$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma matriciale indotta dalla norma euclidea. Possiamo introdurre una famiglia finita $\mathcal{F}$ di rettangoli relativamente compatti in Q a due a due disgiunti tali che $Q = \bigcup \mathcal{F}$ e per ogni $C \in \mathcal{F}$ vale che $\operatorname{diam}(C) \leq \delta_\varepsilon$.

Fissiamo $C \in \mathcal{F}$ e $\xi \in C$. Definiamo la mappa affine $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$T(x) := f(\xi) + D_f(\xi)(x - \xi).$$

Essendo $D_f(x)$ iniettivo, possiamo definire

$$\varphi_C := f \circ T^{-1}_{T(C)} : T(C) \to f(C).$$

Dati $y, y' \in T(C)$, siano $x, x' \in C$ tali che $y = T(x), y' = T(x')$; utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si trova che

$$\begin{aligned}
|\varphi_C(y) - \varphi_C(y')| &= |f(x) - f(x')| \\
&\leq |(f(x) - f(x')) - (T(x) - T(x'))| + |y - y'| \\
&= \left| \int_0^1 D_f(x' + t(x - x'))(x - x')\ dt - \int_0^1 D_f(\xi)(x - x')\ dt \right| \\
&\quad + |y - y'| \\
&\leq \varepsilon\,|x - x'| + |y - y'|\,.
\end{aligned}$$

Notiamo anche che

$$|y - y'| = |D_f(\xi)(x - x')| \geq \alpha\,|x - x'|\,;$$

allora otteniamo che

$$|\varphi_C(y) - \varphi_C(y')| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)|y - y'|\,.$$

Definiamo la mappa $\psi_C \coloneqq T \circ f^{-1}_{|f(C)} : f(C) \to T(C)$. Dati $x, x' \in C$, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ottengono le seguenti stime:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &= \left|\int_0^1 D_f(x' + t(x - x'))(x - x')\ dt - D_f(x')(x - x') + D_f(x')(x - x')\right| \\
&\left|\int_0^1 [D_f(x' + t(x - x'))(x - x') - D_f(x')(x - x')]\ dt + D_f(x')(x - x')\right| \\
&\geq -\varepsilon\,|x - x'| + \alpha\,|x - x'| \\
&= (\alpha - \varepsilon)\,|x - x'|\,.
\end{aligned}$$

Siano $y, y' \in f(C)$; detti $x, x' \in C$ tali che $f(x) = y, f(x') = y'$, si ha che

$$\begin{aligned}
|\psi_C(y) - \psi_C(y')| &= |T(x) - T(x')| \\
&\leq |(f(x) - f(x')) - (T(x) - T(x'))| + |y - y'| \\
&= \left|\int_0^1 D_f(x' + t(x - x'))(x - x')\ dt - \int_0^1 D_f(\xi)(x - x')\ dt\right| \\
&\quad + |y - y'| \\
&\leq \varepsilon\,|x - x'| + |y - y'| \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha - \varepsilon}\right)|y - y'|\,.
\end{aligned}$$

Utilizzando la proprietà della misura di Hausdorff rispetto alle mappe lipschitziane (vedi 9.1.13) e il teorema 9.2.25, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(f(C)) &= \mathcal{H}^k(f \circ T^{-1}_{|T(C)}(T(C))) = \mathcal{H}^k(\varphi_C(T(C))) \\
&\leq \left(1 + \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^k \mathcal{H}^k(T(C)) = \left(1 + \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^k J_T \cdot m_k(C) \\
&= \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^k \left[\int_C (J_T - J_f(x))\ dx + \int_C J_f(x)\ dx\right] \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^k \left[\varepsilon m_k(C) + \int_C J_f(x)\ dx\right].
\end{aligned}$$

Per concludere, si ha che

$$\mathcal{H}^k(f(Q)) \leq \sum_{C \in \mathcal{F}} (\mathcal{H}^k f(C)) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^k \left[\varepsilon m_k(Q) + \int_Q J_f(x)\ dx\right].$$

Prendendo il limite per ε che tende a 0, troviamo che

$$\mathcal{H}^k(f(Q)) \leq \int_Q J_f(x)\ dx.$$

In maniera completamente analoga, si ottengono le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned}
\int_Q J_f(x)\ dx &= \sum_{C\in\mathcal{F}} \int_C J_f(x)\ dx \\
&\leq \varepsilon m_k(Q) + \sum_{C\in\mathcal{F}} J_T \cdot m_k(C) \\
&= \varepsilon m_k(Q) + \sum_{C\in\mathcal{F}} \mathcal{H}^k(T(C)) \\
&= \varepsilon m_k(Q) + \sum_{C\in\mathcal{F}} \mathcal{H}^k(\psi_C(f(C))) \\
&\leq \varepsilon m_k(Q) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha - \varepsilon}\right) \sum_{C\in\mathcal{F}} \mathcal{H}^k(f(C)) \\
&= \varepsilon m_k(Q) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha - \varepsilon}\right) \mathcal{H}^k(f(Q)).
\end{aligned}$$

Precisiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'iniettività di f e il fatto che i rettangoli sono a due a due disgiunti (vedi 9.2.26). In ogni caso, prendendo il limite per ε che tende a 0^+, otteniamo che

$$\int_Q J_f(x)\ dx \leq \mathcal{H}^k(f(Q)).$$

$\square$

Corollario 9.2.28. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione iniettiva di classe $C^1(A;\mathbb{R}^n)$ tale che $D_f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è iniettivo per ogni $x \in A$. Allora per ogni $E \subseteq A$ che sia boreliano vale la formula*

$$\int_E J_f(x)\ dx = \mathcal{H}^k(f(E)).$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che Ω sia un aperto contenuto in A. Esiste una famiglia al più numerabile $\mathcal{F}$ di rettangoli disgiunti e relativamente compatti in Ω che copre Ω. Per il teorema 9.2.27, per ogni $C \in \mathcal{F}$ vale che

$$\int_C J_f(x)\ dx = \mathcal{H}^k(f(C)).$$

Utilizzando l'iniettività di f (se $C_1 \neq C_2$, allora $f(C_1 \cap C_2) = \emptyset$) e il teorema di Beppo Levi (infatti J_f è una funzione non negativa) si trova che

$$\int_\Omega J_f(x)\ dx = \sum_{C\in\mathcal{F}} \int_C J_f(x)\ dx = \sum_{C\in\mathcal{F}} \mathcal{H}^k(f(C)) = \mathcal{H}^k(f(\Omega)).$$

Precisiamo che l'ultima uguaglianza segue dal fatto che gli insiemi $f(C)$ appartengono alla classe degli insiemi misurabili secondo $\mathcal{H}^k$ in $f(A)$ (vedi 9.2.26).

Step 2: Utilizzando le stesse argomentazioni esposte nel primo passo, si verifica facilmente che la famiglia

$$\mathcal{F} := \left\{ E \subseteq A \;\middle|\; E \text{ è misurabile, } \int_E J_f(x)\ dx = \mathcal{H}^k(f(E)) \right\}$$

è una σ-algebra; avendo verificato che $\mathcal{F}$ contiene gli aperti, deduciamo che $\mathcal{F}$ contiene i boreliani di A.

Step 3: Sia $E \subseteq A$ un insieme misurabile. Essendo m_k una misura boreliana regolare (vedi 7.1.16), per il teorema 7.1.14 esiste un boreliano $B \in \mathcal{B}(A)$ tale che $E \subseteq B \subseteq A$ e $m_k(B \setminus E) = 0$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int_E J_f(x)\ dx = \int_B J_f(x)\ dx = \mathcal{H}^k(f(B)).$$

Per concludere è sufficiente mostrare che $\mathcal{H}^k(f(B)) = \mathcal{H}^k(f(E))$. Dal contenimento segue immediatamente che

$$\mathcal{H}^k(f(E)) \leq \mathcal{H}^k(f(B)).$$

Essendo f iniettiva, vale che $f(B)\setminus f(E) = f(B\setminus E)$. Essendo f localmente lipschitziana, possiamo scrivere

$$B \setminus E = \bigcup_{j\in J} C_j,$$

dove J è un insieme al più numerabile, C_j è un insieme misurabile secondo Lebesgue e f è lipschitziana in C_j con costante di Lipschitz L_j. Notiamo anche che $m_k(C_j) = 0$ per ogni $j \in J$. Per il comportamento della misura di Hausdorff rispetto alle mappe lipschitziane (vedi 9.1.13) e per il teorema 9.2.6, vale che

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(f(B) \setminus f(E)) &= \mathcal{H}^k f(B \setminus E)\\ &\leq \sum_{j\in J} \mathcal{H}^k(f(C_j))\\ &\leq \sum_{j\in J} L_j \mathcal{H}^k(C_j) = 0.\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo che

$$\mathcal{H}^k f(B) \leq \mathcal{H}^k(f(B) \setminus f(E)) + \mathcal{H}^k(f(E)) = \mathcal{H}^k(f(E)).$$

□

Misura d'area su una varietà

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^1(A;\mathbb{R}^n)$ iniettiva, tale che $D_f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è iniettivo per ogni $x \in A$. Vogliamo definire la misura d'area sulla varietà $f(A)$.

Considereremo lo spazio mensurale $(f(A); \mathcal{B}(f(A)); \mathcal{H}^k)$; per quanto provato in 9.1.6, $\mathcal{H}^k$ è una misura esterna boreliana regolare su $\mathbb{R}^n$; pertanto la sua restrizione ai boreliani di $f(A)$ (che sono boreliani di $\mathbb{R}^n$, perchè $f(A)$ è un boreliano, come mostrato in 9.2.26) è σ-additiva.

Avendo dotato $f(A)$ di una struttura di spazio mensurale, possiamo definire l'integrale di funzioni misurabili (rispetto alla σ-algebra introdotta) e introdurre gli spazi $L^p(f(A))$ e $\mathcal{L}^p(f(A))$ (vedi 2.2.13 e 3.1.4).

Vogliamo dare una formula di calcolo l'integrale di funzioni misurabili su $f(A)$.

Sia Ω un boreliano in $f(A)$. Essendo f una funzione boreliana, $f^{-1}(\Omega)$ è un boreliano in A. Dal corollario 9.2.28 segue che

$$\int_{f^{-1}(\Omega)} J_f(x)\ dx = \mathcal{H}^k(\Omega).$$

Possiamo scrivere equivalentemente

$$\int_A \mathbb{1}_{f^{-1}(\Omega)} \cdot J_f \; dx = \int_{f(A)} \mathbb{1}_\Omega \; d\mathcal{H}^k.$$

Notando che $\mathbb{1}_{f^{-1}(\Omega)} = \mathbb{1}_\Omega \circ f$, otteniamo che

$$\int_A \mathbb{1}_\Omega \circ f \cdot J_f \; dx = \int_{f(A)} \mathbb{1}_\Omega \; d\mathcal{H}^k.$$

Se $g : f(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile (rispetto alla σ-algebra introdotta su $f(A)$), notiamo che $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione boreliana (vedi 2.1.11).

Vogliamo mostrare che per ogni $g : f(A) \to [0, +\infty]$ misurabile vale che

$$\int_{f(A)} g \; d\mathcal{H}^k = \int_A (g \circ f) \cdot J_f \; dx.$$

Abbiamo provato che la formula per le funzioni indicatrici; per linearità si estende a tutte le funzioni semplici non negative. Per il teorema di Beppo Levi, si estende a tutte le funzioni misurabili non negative. Infine, notiamo che se $J_f \in L^\infty(A)$, la formula si estende immediatamente a tutte le funzioni $g \in L^1(f(A))$.

Concludiamo notando che se $h : A \to [0, +\infty]$ è una funzione boreliana non negativa vale che $h \circ f^{-1} : f(A) \to [0, +\infty]$ è una funzione boreliana non negativa (infatti, abbiamo provato in 9.2.26 che $f^{-1} : f(A) \to A$ è boreliana). Allora vale che

$$\int_A h J_f \; dx = \int_{f(A)} h \circ f^{-1} \; d\mathcal{H}^k.$$

Ovviamente, la formula si estende anche al caso in cui h sia boreliana e appartenga a $L^1(A)$ e J_f sia in $L^\infty(A)$. Questa è la nota formula del cambio di variabili.

Concludiamo dicendo che questa costruzione può essere adattata anche al caso in cui f sia una mappa lipschitziana.