Compito di Meccanica Razionale
5 Febbraio 2026

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\boldsymbol{x}|$$

$$f(\rho) = \rho e^{-2\rho} - \frac{1}{\rho^3}$$

Si supponga che il momento angolare rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

1. Trovare il numero di orbite circolari al variare di c.

2. Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c.

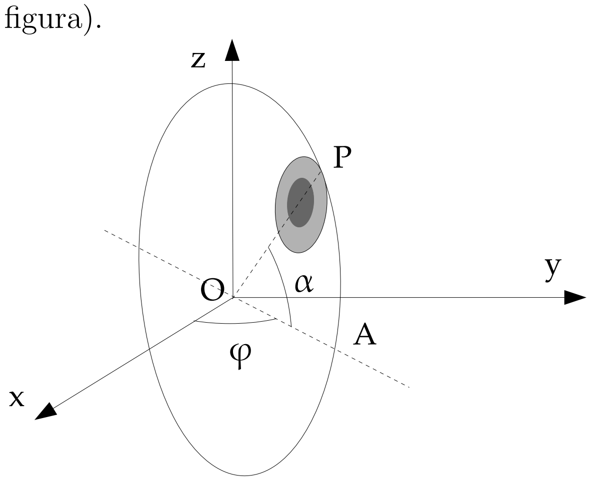
3. Si consideri l'orbita con condizioni iniziali

$$\boldsymbol{x}(0) = (1, 0, 0), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = (a, b, 0), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

   Trovare tutti i valori di a e b per cui tale orbita è circolare.

Esercizio 2. Si consideri una lamina circolare $\mathcal{C}$ di massa m, centro B e raggio $2r$. La parte della lamina contenuta nel disco di centro B e raggio r ha densità costante tripla rispetto al resto di $\mathcal{C}$, anch'esso di densità costante. Si fissi ora un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Una guida circolare di raggio $R > 2r$ e centrata in O ruota attorno all'asse Oz tenendosi sempre perpendicolare al piano Oxy. La lamina $\mathcal{C}$ ruota senza strisciare all'interno di tale guida, rimanendo sempre nel piano della guida. Si indichi con P il punto di contatto tra $\mathcal{C}$ e la guida, e con A uno dei due punti in cui la guida interseca il piano Oxy.

Sia φ l'angolo misurato dall'asse Ox al segmento OA e sia α l'angolo misurato da OA a OP (si veda la figura).



1. Calcolare i momenti principali di inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto al suo baricentro.

2. Calcolare la velocità angolare di $\mathcal{C}$.

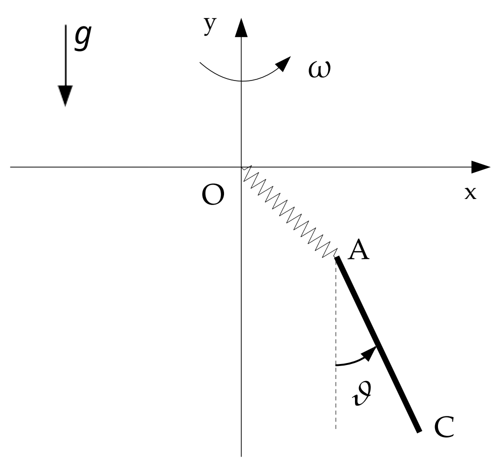
3. Calcolare l'energia cinetica di $\mathcal{C}$.

Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea AC di massa m e lunghezza 2ℓ. L'estremo A dell'asta è collegato all'origine O da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il sistema è soggetto alla forza di gravità, di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso. Inoltre, il piano verticale ruota attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\omega > 0$.

Assumiamo che valgano le seguenti relazioni tra i parametri:

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\ell} = 2\omega^2.$$

Usando come coordinate lagrangiane x, y, ϑ, dove (x, y) sono le coordinate del punto A e ϑ è l'angolo che l'asta AC forma con la direzione verticale (vedi figura),



1. scrivere la lagrangiana del sistema;

2. trovare le configurazioni di equilibrio;

3. studiare la stabilità delle configurazioni con $\sin\vartheta \neq 0$.

Esercizio 1.

1. Dalle ipotesi ho che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicito l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \to \rho e^{-2\rho} + \frac{c^2-1}{\rho^3} = 0 \to \rho^4 e^{-2\rho} = 1 - c^2$$

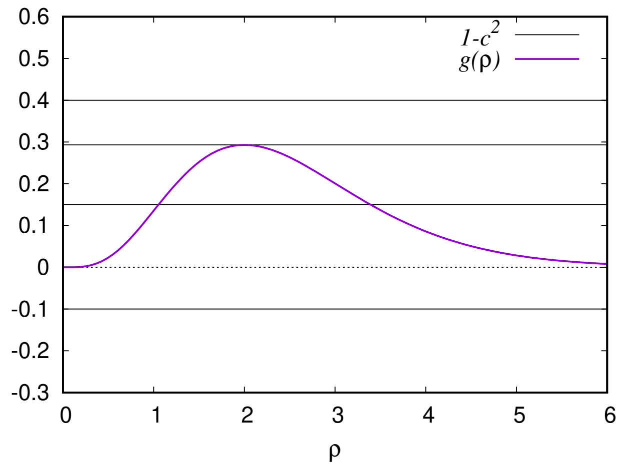
Per capire il numero di soluzioni, conto il numero di intersezioni per $\rho > 0$ tra il grafico della funzione $g(\rho) = \rho^4 e^{-2\rho}$ e la retta orizzontale $h(\rho) = 1 - c^2$.
Per la funzione $g(\rho)$ vale che

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0^+, \quad \lim_{\rho \to +\infty} g(\rho) = 0^+$$

e che ha un unico punto stazionario (massimo) in

$$g'(\rho) = 4\rho^3 e^{-2\rho} - 2\rho^4 e^{-2\rho} = 0 \to \overline{\rho} = 2,$$

in cui la funzione vale $g(\overline{\rho}) = 16/e^4 < 1$. Perciò ho i seguenti casi:



- se $0 < c^2 < 1 - 16/e^4 \vee c^2 \geq 1$ allora non ci sono intersezioni per $\rho > 0$ tra la retta e la funzione $g(\rho)$ (quindi nessuna orbita circolare).
- se $c^2 = 1 - 16/e^4$ allora c'è un'unica intersezione (quindi un'orbita circolare) con $\rho_1 = 2$.
- se $1 - 16/e^4 < c^2 < 1$ allora ci sono due intersezioni (quindi due orbite circolari), una per $\rho_1 < 2$ e una per $\rho_2 > 2$.

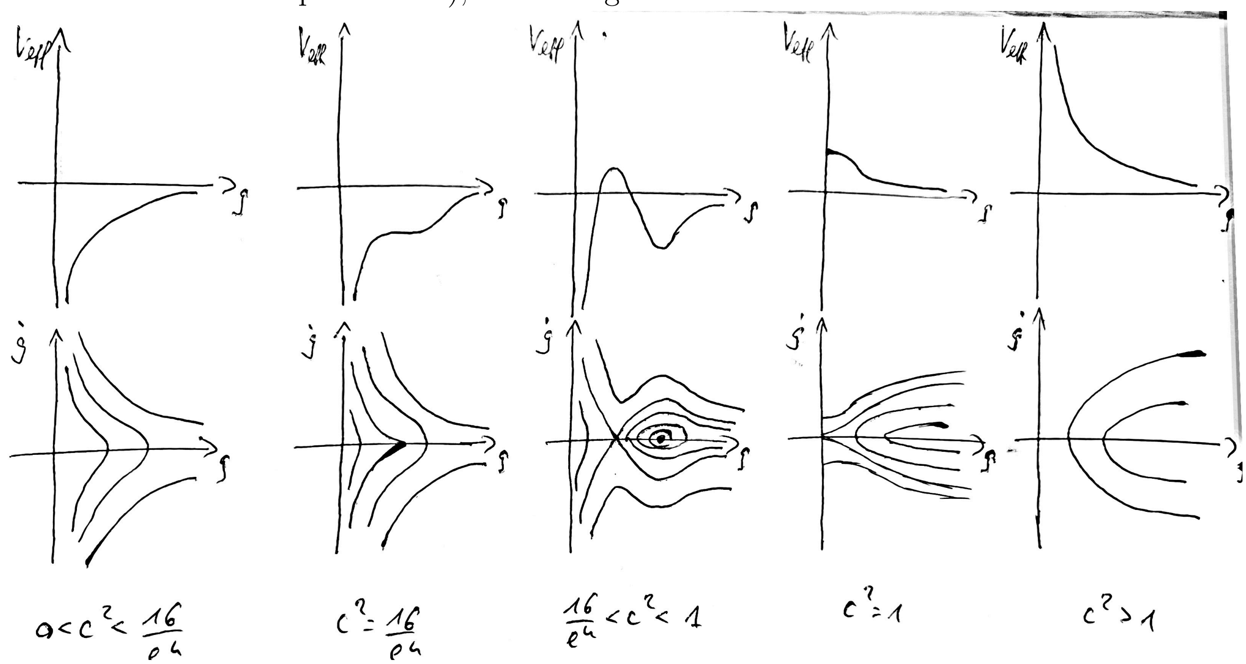
2. L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \frac{1}{2} e^{-2\rho} \left(\rho + \frac{1}{2} \right) + \frac{c^2 - 1}{2\rho^2}$$

i cui limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c^2 > 1 \\ 1/4 & \text{se } c^2 = 1 \\ -\infty & \text{se } c^2 < 1 \end{cases} \qquad \lim_{\rho\to +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} 0^+ & \text{se } c^2 > 1 \\ 0^+ & \text{se } c^2 = 1 \\ 0^- & \text{se } c^2 < 1 \end{cases}$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), trovo i seguenti casi:



* si noti che il terzo ritratto può cambiare a seconda dell'altezza del punto di massimo (qualsiasi scelta ai fini della risoluzione dell'esercizio andava bene).

3. Dalle coordinate delle condizioni iniziali segue che il piano del moto dell'orbita è Oxy. Su tale piano, so che ad ogni tempo vale

$$\boldsymbol{x} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

e che in questo caso all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_2$. Valutando le espressioni sopra all'istante iniziale ottengo

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = b.$$

Per avere un'orbita circolare, deve valere $\dot{\rho} = 0$ e $f(\rho) + c^2/\rho^3 = 0$, dove in questo caso $c = b$. Dalla seconda equazione

$$\rho(0)^4 e^{-2\rho(0)} = 1 - b^2 \implies b^2 = 1 - \frac{1}{e^2} \implies b = \pm\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$$

Perciò le coppie (a, b) per avere un'orbita circolare sono $(0, \frac{\sqrt{e^2-1}}{e})$ e $(0, -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e})$.

Esercizio 2.

1. Posso vedere $\mathcal{C}$ come la somma di due dischi, uno di raggio $2r$ e densità costante σ e l'altro di raggio r e densità costante 2σ. La relazione tra m e σ è

$$m = 4\sigma\pi r^2 + 2\sigma\pi r^2 = 6\sigma\pi r^2,$$

perciò il primo disco ha massa $(2/3)m$, mentre il secondo $(1/3)m$. Considero il sistema di riferimento $B\xi\eta\zeta$ riportato in figura e così definito: origine nel baricentro di $\mathcal{C}$, asse $O\zeta$ perpendicolare al piano della figura e gli altri due assi nel piano della figura (per la simmetria della figura vanno bene due assi ortogonali qualsiasi).

Essendo B il baricentro di $\mathcal{C}$, e anche dei due dischi in cui l'ho scomposto, posso calcolare i momenti principali di inerzia semplicemente sommando i due contributi noti:

$$I_1^{\mathcal{C}} = \frac{1}{4}\frac{2}{3}m(2r)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{3}mr^2 = \frac{3}{4}mr^2$$
$$I_2^{\mathcal{C}} = I_1^{\mathcal{C}} = \frac{3}{4}mr^2$$
$$I_3^{\mathcal{C}} = I_1^{\mathcal{C}} + I_2^{\mathcal{C}} = \frac{3}{2}mr^2$$

2. Per calcolare la velocità angolare di $\mathcal{C}$, passo ad un sistema di riferimento in cui il moto del disco è piano. Partendo dal sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$, passo al sistema $\Sigma' = Ox'y'z'$, ottenuto tramite la rotazione elementare R_3^{φ}. In questo modo ho che $\hat{\mathbf{e}}_1' = (A-O)/|A-O|$ e $\hat{\mathbf{e}}_3' = \hat{\mathbf{e}}_3$.

Per costruzione, la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è $\boldsymbol{\omega}' = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_3$. Calcolo ora la velocità angolare di $\mathcal{C}$ in Σ' tramite la formula fondamentale della cinematica rigida. In tale sistema, il moto piano e la velocità angolare è della forma $\boldsymbol{\omega}'' = \omega''\hat{\mathbf{e}}_2'$. Inoltre, per ipotesi $\mathbf{v}_P' = \mathbf{0}$ (velocità di P in Σ' come punto solidale a $\mathcal{C}$):

$$\mathbf{v}_B' = \cancel{\mathbf{v}_P'} + \omega''\hat{\mathbf{e}}_2' \times (B-P)$$
$$-\dot{\alpha}(R-2r)\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_1' + \dot{\alpha}(R-2r)\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_3' = -\omega''2r\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_1' + \omega''2r\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_3'$$
$$\boldsymbol{\omega}'' = \frac{R-2r}{2r}\dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_2'$$

Perciò la velocità angolare del corpo rigido in Σ sarà la somma delle due

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}'' = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_3 + \frac{R-2r}{2r}\dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_2' = -\frac{R-2r}{2r}\dot{\alpha}\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{R-2r}{2r}\dot{\alpha}\cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_2 + \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_3$$

scritto nelle coordinate di Σ ($\mathbf{e}_2' = R_3^{\varphi}(0,1,0)^T$).

3. Per calcolare l'energia cinetica utilizzo il teorema di Konig

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}$$

In Σ (attenzione, prima l'avevo calcolata in Σ'), la velocità del baricentro è

$$\mathbf{v}_B = (R-2r)(-\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\varphi - \dot{\varphi}\cos\alpha\sin\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + (R-2r)(-\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\alpha\cos\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2 + (R-2r)\dot{\alpha}\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_3$$

Per la parte rotazionale posso scegliere una base conveniente; infatti il valore del prodotto scalare $\boldsymbol{\omega} \cdot I_B^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega}$ è indipendente dalla scelta della base ortonormale. Scelgo la base associata al sistema di riferimento Σ'; in tale sistema $I_B^{\mathcal{C}}$ è costante, anche se non Σ' non è solidale al disco. Infatti, in Σ' il corpo rigido sta sul $Ox'z'$ e la matrice di inerzia in questo sistema è costantemente

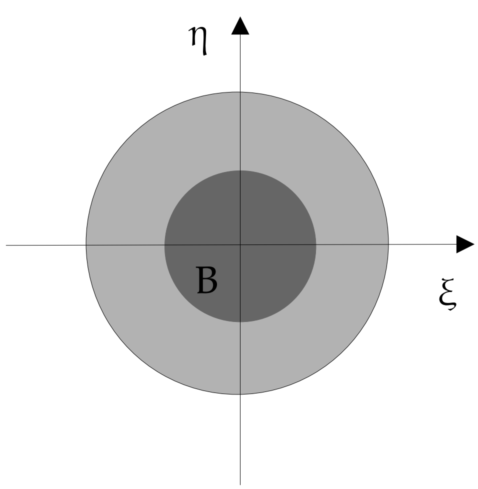
$$I_B^{\mathcal{C}_0} = \frac{3}{4}mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

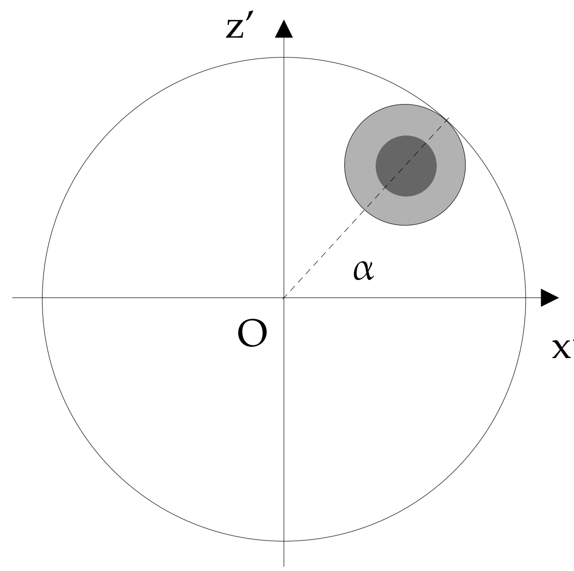
Poichè $\hat{\mathbf{e}}_3' = \hat{\mathbf{e}}_3$, le coordinate della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ in Σ' sono $(0, \frac{(R-2r)}{2r}\dot{\alpha}, \dot{\varphi})$. Percio il contributo rotazionale all'energia cinetica è

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B^{\mathcal{C}}\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{16}m(R-2r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{3}{8}mr^2\dot{\varphi}^2$$

Infine l'energia cinetica totale è la somma dei due contributi

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m(R-2r)^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\alpha) + \frac{3}{16}m(R-2r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{3}{8}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{11}{16}m(R-2r)^2\dot{\alpha}^2 + m\left(\frac{3}{8}r^2 + \frac{1}{2}m(R-2r)^2\cos^2\alpha\right)\dot{\varphi}^2$$





Esercizio 3.

1. Scrivo le coordinate dei punti A e B (baricentro), e di P generico dell'asta

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_A &= x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{x}_B &= (x + \ell\sin\vartheta)\mathbf{e}_1 + (y - \ell\cos\vartheta)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{x}_P &= (x + r\sin\vartheta)\mathbf{e}_1 + (y - r\cos\vartheta)\mathbf{e}_2, \quad r \in (0, 2\ell)
\end{aligned}$$

L'energia cinetica dell'asta è

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varpi}\cdot I\boldsymbol{\varpi}$$

dove I è la matrice di inerzia dell'asta e $\boldsymbol{\varpi}$ la sua velocità angolare. Per risultati noti, so che $\boldsymbol{\varpi} = \dot\vartheta\mathbf{e}_3$ e $I_{33} = (1/3)m\ell^2$. Inoltre

$$\boldsymbol{v}_B = (\dot x + \ell\dot\vartheta\cos\vartheta)\mathbf{e}_1 + (\dot y + \ell\dot\vartheta\sin\vartheta)\mathbf{e}_2$$

Perciò l'energia cinetica totale è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot x\dot\vartheta\cos\vartheta + 2\ell\dot y\dot\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot\vartheta^2$$

L'energia potenziale è la somma del contributo gravitazionale, elastico e centrifugo (in questa configurazione Coriolis non dà contributo al moto dell'asta sul piano)

$$V = mg(y - \ell\cos\vartheta) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\int_0^{2\ell}\lambda|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_P|^2 dr$$

Calcolo a parte l'integrale (λ è la densità costante dell'asta)

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\ell}\lambda|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_P|^2 dr = \frac{1}{2}\frac{m}{2\ell}\omega^2\int_0^{2\ell}(x + r\sin\vartheta)^2 dr = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + 2\ell x\sin\vartheta + \frac{4}{3}\ell^2\sin^2\vartheta)$$

Perciò la lagrangiana finale è

$$\begin{aligned}
L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \frac{4}{3}\ell^2\dot\vartheta^2 + 2\ell\dot x\dot\vartheta\cos\vartheta + 2\ell\dot y\dot\vartheta\sin\vartheta\right) \\
- mg(y - \ell\cos\vartheta) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + 2\ell x\sin\vartheta + \frac{4}{3}\ell^2\sin^2\vartheta)
\end{aligned}$$

2. Per trovare i punti di equilibrio, calcolo i punti stazionari della funzione V:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial x} = kx - m\omega^2 x - m\omega^2\ell\sin\vartheta = 0 \\
\dfrac{\partial V}{\partial y} = mg + ky = 0 \\
\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = mg\ell\sin\vartheta - m\omega^2\ell x\cos\vartheta - \dfrac{4}{3}m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0
\end{cases}$$

Usando le ipotesi sui parametri, otteno

$$\begin{cases} m\omega^2 x - m\omega^2 \ell \sin\vartheta = 0 \\ 2m\omega^2\ell + 2m\omega^2 y = 0 \\ 2m\omega^2\ell^2\sin\vartheta - m\omega^2\ell x\cos\vartheta - (4/3)m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{cases} \implies \begin{cases} x = \ell\sin\vartheta \\ y = -\ell \\ \sin\vartheta(2-(7/3)\cos\vartheta) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$(x,y,\vartheta) = (0,-\ell,0),\ (0,-\ell,\pi),\ (x^*,-\ell,\vartheta^*),\ (-x^*,-\ell,-\vartheta^*)$$

con $\vartheta^* = \arccos(6/7)$ e $x^* = \ell\sqrt{13/49}$.

3. Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio con $\sin\vartheta \neq 0$, calcolo prima la matrice hessiana di V

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(x,y,\vartheta)^2} = m\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\ell\cos\vartheta \\ 0 & 2 & 0 \\ -\ell\cos\vartheta & 0 & 2\ell^2\cos\vartheta + \ell x\sin\vartheta - (4/3)\ell^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{bmatrix}$$

e poi la valuto nel punto $(x^*,-\ell,\vartheta^*)$ (l'altro punto dà gli stessi risultati per simmetria).

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(x,y,\vartheta)^2}(x^*,-\ell,\vartheta^*) = m\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(6/7)\ell \\ 0 & 2 & 0 \\ -(6/7)\ell & 0 & \ell^2(199/147) \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha determinante positivo ($\det = 182/147\ell^2 > 0$) e anche i minori principali hanno determinante positivo; per il criterio di Sylvester sulle matrici simmetriche reali tutti gli autovalori sono positivi. Quindi la configurazione $(x^*,-\ell,\vartheta^*)$ è un punto di minimo di V ed è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichilet. Lo stesso vale per il punto $(-x^*,-\ell,-\vartheta^*)$.