

Compito di Meccanica Razionale

14 Gennaio 2026

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|,$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{14}{\rho^4} + \frac{8}{\rho^5}.$$

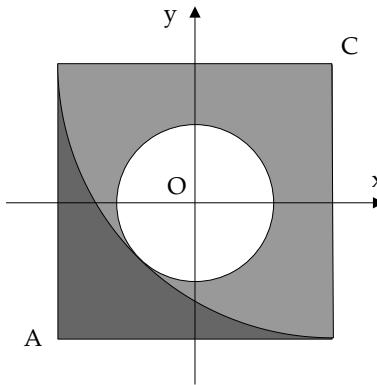
Si supponga che la norma del momento angolare rispetto al centro di forze O sia uguale a $\sqrt{7}$.

1. Trovare tutte le possibili orbite circolari e calcolare i relativi periodi.
2. Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$. Quale è il valore minimo dell'energia totale per cui è possibile il moto?
3. Si consideri l'orbita con condizioni iniziali

$$\mathbf{x}(0) = (0, 1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (\sqrt{7}, a, 0), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Trovare l'insieme dei valori di a per cui tale orbita è illimitata.

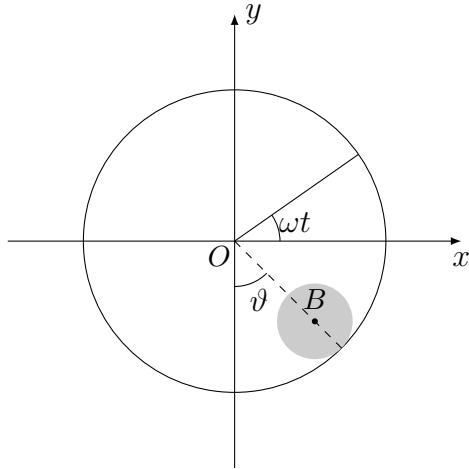
Esercizio 2. In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il corpo rigido descritto nella figura, costituito da una lamina quadrata di lato ℓ centrata nell'origine O composta da due parti, con densità $\sigma > 0$ (più chiara) e 2σ (più scura) rispettivamente. La parte con densità σ corrisponde ad un quarto di disco di raggio ℓ . Da questa lamina è stato ritagliato un disco centrato in O di raggio r , tale da rendere il disco tangente alla curva che separa le parti di densità σ e 2σ . Chiamiamo \mathcal{C} il corpo rigido che risulta da questa costruzione.



1. Mostrare che il baricentro B di \mathcal{C} sta sulla diagonale AC del quadrato (vedi figura) e trovarne le coordinate.
2. Trovare un riferimento principale di inerzia per \mathcal{C} rispetto al polo O e mostrare con un ragionamento qualitativo che Ox non è un asse principale di inerzia.

Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare all'interno di una guida circolare di centro O e raggio $R > r$, che a sua volta ruota nel piano Oxy con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g e rivolta verso il basso.

Sia B il baricentro del disco. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ che il segmento OB forma con la direzione di Oy (vedi figura),



1. scrivere l'equazione di Lagrange per il moto del disco;
2. ritrovare l'equazione del moto con le equazioni cardinali.

Esercizio 1.

1. Dalle ipotesi ho che $|c| = \sqrt{7}$ e $m = 1$, dove c è la componente ortogonale al piano del moto del momento angolare. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$-\frac{1}{\rho^2} - \frac{14}{\rho^4} + \frac{8}{\rho^5} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho^3 - 7\rho^2 + 14\rho - 8 = 0$$

Tale equazione di terzo grado ha tre soluzioni reali positive: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$ e $\rho_3 = 4$, che corrispondono ai raggi delle orbite circolari.

Per calcolare il periodo di tali orbite basta utilizzare la formula $T = 2\pi/|\dot{\theta}|$, dove $|\dot{\theta}|$ è il modulo della velocità angolare costante con cui il punto si muove lungo la sua orbita circolare. Vale che $\dot{\theta} = |c|/(m\rho^2)$, perciò i periodi richiesti sono $T_1 = 2\pi/\sqrt{7}$, $T_2 = 8\pi/\sqrt{7}$ e $T_3 = 32\pi/\sqrt{7}$, rispettivamente.

2. L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\frac{1}{\rho} + \frac{7}{2\rho^2} - \frac{14}{3\rho^3} + \frac{2}{\rho^4}$$

Per $\rho \rightarrow +\infty$ il termine dominante è il primo, perciò

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^-$$

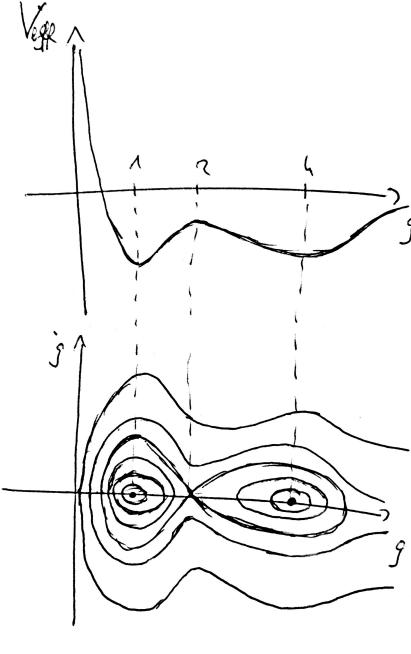
mentre per $\rho \rightarrow 0^+$ il termine dominante è l'ultimo, perciò

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

La funzione V_{eff} ha tre punti stazionari per $\rho = 1, 2, 4$. Per una rappresentazione accurata del ritratto di fase è necessario calcolare il valore della funzione nei punti stazionari.

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(1) &= -1 + \frac{7}{2} - \frac{14}{3} + 2 = -\frac{1}{6} \\ V_{\text{eff}}(2) &= -\frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{12} \\ V_{\text{eff}}(4) &= -\frac{1}{4} + \frac{7}{32} - \frac{7}{96} + \frac{1}{128} = -\frac{37}{384} > -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Il ritratto di fase è



L'energia totale può essere espressa come

$$E(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho)$$

Perciò il valore minimo corrisponde al valore di minimo assoluto di $V_{\text{eff}}(\rho)$, cioè $-1/6$. Tale valore è realizzato dall'orbita circolare di raggio $\rho_1 = 1$ ($\dot{\rho} = 0$).

- Poiché le condizioni iniziali sono contenute nel piano $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$, esso è il piano del moto. In tale piano ad ogni tempo vale che

$$\mathbf{x} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Inoltre è facile verificare che all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{e}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\mathbf{e}_1$. Valutando le espressioni sopra all'istante iniziale ottengo

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = -\sqrt{7},$$

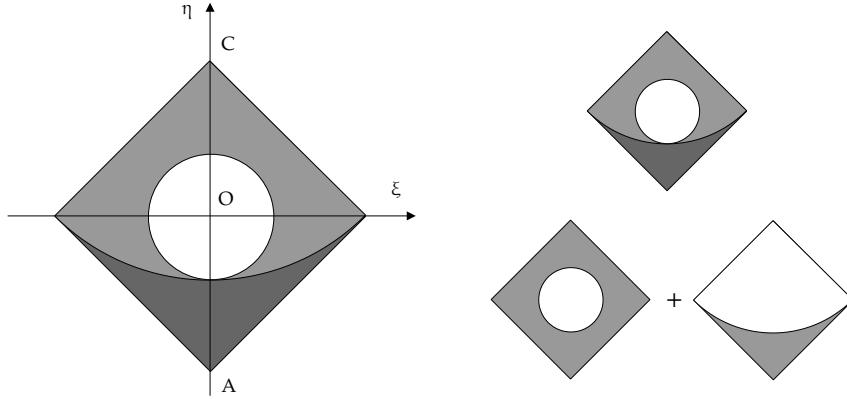
da cui verifico che $c = \rho^2\dot{\theta} = -\sqrt{7}$. Dal ritratto di fase ottenuto nel punto precedente (valido per $|c| = \sqrt{7}$) segue che perché l'orbita sia illimitata il valore dell'energia $E(\rho, \dot{\rho})$ deve essere superiore a $\bar{E} = 0$.

$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}(0)^2 + V_{\text{eff}}(\rho(0)) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6} > 0 \implies |a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Esercizio 2.

1. Fisso un sistema di riferimento $O\xi\eta\zeta$ con origine nel centro del quadrato: l'asse $O\eta$ lungo la diagonale AC del quadrato, l'asse $O\xi$ lungo l'altra diagonale del quadrato e l'asse $O\zeta$ uscente dal piano della figura.

Considero il corpo rigido \mathcal{C} come la somma di un quadrato bucato \mathcal{Q}_0 di densità costante σ e dello spigolo \mathcal{S} evidenziato in scuro nella figura del testo. Anche \mathcal{S} va considerato di densità costante σ , in modo da avere una densità risultante di 2σ nella regione scura.



Il quadrato bucato \mathcal{Q}_0 ha baricentro in O e massa $m_Q = \sigma(1 - \pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2)\ell^2$. Lo spigolo \mathcal{S} ha massa $m_S = \sigma(1 - \frac{\pi}{4})\ell^2$ e baricentro B_S da determinare. Facendo una media pesata dei baricentri di \mathcal{Q}_0 e \mathcal{S} sarà possibile poi ottenere il baricentro di \mathcal{C} . Calcolo quindi il baricentro di \mathcal{S} .

Considero il sistema di riferimento $C\xi\eta\zeta$ orientato come il precedente, ma centrato in C . In questo modo sarà più facile calcolare il baricentro B_T del quarto di cerchio complementare a \mathcal{S} , la cui massa è $m_T = \sigma\frac{\pi}{4}\ell^2$. Per simmetria della distribuzione di massa rispetto all'asse $O\eta$, il baricentro B_T si troverà lungo l'asse $O\eta$, quindi ne calcolo solo l'ordinata Y_T

$$m_T Y_T = \int_T \sigma y dx dy = \sigma \int_0^\ell \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta = -\sigma \frac{\sqrt{2}}{3} \ell^3 \implies Y_T = -\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \ell$$

Tornando nel sistema di riferimento centrato in O , l'ordinata del baricentro B_T diventa $y_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell + Y_T = \frac{(3\pi-8)\sqrt{2}}{6\pi} \ell$. Calcolo il baricentro di \mathcal{S} tenendo conto che il baricentro del quadrato completo deve stare in O . L'ascissa di B_S sarà quindi 0, mentre per l'ordinata y_S vale

$$m_T y_T + m_S y_S = 0 \implies y_S = -\frac{m_T}{m_S} y_T = -\frac{(3\pi-8)\sqrt{2}}{6(4-\pi)} \ell$$

Come detto sopra, per trovare il baricentro B_C di \mathcal{C} , calcolo la media pesata del baricentro di \mathcal{Q}_0 (che è l'origine) e del baricentro di \mathcal{S} . Anche in questo caso

l'ascissa sarà nulla, mentre per l'ordinata y_C vale

$$(m_Q + m_S)y_C = m_{sys} + 0 \implies y_C = \frac{m_S}{m_Q + m_S}y_S = \frac{(8 - 3\pi)\sqrt{2}}{48 + 6(4\sqrt{2} - 7)\pi}\ell$$

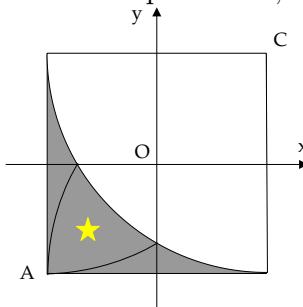
Tramite rotazione di un angolo di -45° trovo le coordinate di B_C nel sistema di riferimento Oxy di partenza

$$R_3^{-45^\circ}[0, y_C]^T = \frac{\sqrt{2}}{2}[y_C, y_C]^T = \left[\frac{(8 - 3\pi)}{48 + 6(4\sqrt{2} - 7)\pi}\ell, \frac{(8 - 3\pi)}{48 + 6(4\sqrt{2} - 7)\pi}\ell \right]^T$$

2. Riprendiamo il sistema di riferimento $O\xi\eta\zeta$. Dimostriamo che questo è un sistema di riferimento principale. Siano $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ i versori ortonormali associati al sistema. Il versore $\hat{\mathbf{e}}_3$ definisce una direzione principale, perché il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$; \mathbf{e}_1 è una direzione principale, perché ortogonale al piano $O\eta\zeta$ che è di simmetria per riflessione per il corpo; \mathbf{e}_2 è una direzione principale, perché l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali.

Dimostriamo ora che Ox definito come nella figura del testo non può essere un asse principale di inerzia. Per fare ciò, dimostriamo che nel sistema di riferimento Oxy , il termine I_{12} della matrice di inerzia è diverso da 0. Consideriamo di nuovo \mathcal{C} come la somma di \mathcal{Q}_0 e \mathcal{S} . Il quadrato buco non dà contributo a I_{12} (per tale figura Ox e Oy sono principali di inerzia), quindi mi posso concentrare solo su \mathcal{S} .

\mathcal{S} è tagliato in tre pezzi dagli assi Ox e Oy . Identifichiamo due corni, uno nel secondo e uno nel quarto quadrante, e un pezzo più grande contenuto nel terzo quadrante. Dalla formula di I_{12} , sappiamo che è antisimmetrico per riflessioni rispetto all'asse Ox e all'asse Oy . Perciò il contributo (positivo) dei due corni è perfettamente annullato dai due corni riflessi contenuti nel terzo quadrante (contributo negativo). Togliendo questi contributi, rimane ancora un pezzo di figura (indicata con la stella) interamente contenuta nel terzo quadrante. Poichè il contributo risultante di tutto \mathcal{C} è dato da questo unico pezzo ed essendo questo tutto contenuto in un unico quadrante, allora necessariamente $I_{12} \neq 0$; inoltre, poichè il contributo è solo nel terzo quadrante, allora $I_{12} < 0$.



Questo dimostra che Ox non è una direzione principale di inerzia.

Esercizio 3.

1. Sia B il baricentro del disco e C il punto di contatto con la guida, calcolo le seguenti posizioni e velocità:

$$\mathbf{x}_B = (R - r) \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - (R - r) \cos \vartheta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_B = (R - r) \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + (R - r) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_C = R \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - R \cos \vartheta \mathbf{e}_2$$

Calcolo la velocità angolare del disco $\boldsymbol{\omega}^{(d)} = \omega^{(d)} \mathbf{e}_3$ tramite la formula fondamentale della cinematica

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \omega^{(d)} \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C)$$

Per ipotesi, la velocità del punto C come punto solidale al disco è uguale alla velocità come punto solidale alla guida, che possiamo calcolare di nuovo tramite la formula fondamentale della cinematica

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \omega \times (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) = \omega R \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \omega R \sin \vartheta \mathbf{e}_1$$

dove ho utilizzato che $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ e che la velocità angolare della guida è $\omega \mathbf{e}_3$. Perciò inserendo \mathbf{v}_C nella prima equazione ottengo

$$\omega^{(d)} = \frac{R}{r} \omega - \frac{R - r}{r} \dot{\vartheta}$$

Calcolo l'energia cinetica del disco (ricordando che $I_{B,33} = (1/2)mr^2$)

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{(d)} \cdot I_B \boldsymbol{\omega}^{(d)} \\ &= \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4} m (R - r)^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} m R (R - r) \omega \dot{\vartheta} + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \end{aligned}$$

e l'energia potenziale

$$\mathcal{V} = mgy_B = -mg(R - r) \cos \vartheta$$

La Lagrangiana è quindi (a meno di costanti additive)

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{3}{4} m (R - r)^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} m R (R - r) \omega \dot{\vartheta} + mg(R - r) \cos \vartheta$$

Da cui l'equazione di Lagrange risulta

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0 \implies \frac{3}{2} m (R - r)^2 \ddot{\vartheta} + mg(R - r) \sin \vartheta = 0 \implies \frac{3}{2} (R - r) \ddot{\vartheta} = -g \sin \vartheta$$

2. Scrivo la seconda equazione cardinale per il disco usando C come polo, in modo da annullare il contributo delle reazioni vincolari

$$\dot{\mathbf{M}}_C = -\underline{m\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_B} + \mathbf{N}_C$$

dove ho cancellato il primo termine del secondo membro perchè le due velocità sono parallele (attenzione: qui \mathbf{v}_C è la derivata temporale delle coordinate di C , non la velocità come punto solidale alla guida). Calcolo i vari termini

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_C &= I_B \boldsymbol{\omega}^{(d)} + m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) \times \mathbf{v}_B = \left(-\frac{3}{2}m(R-r)r\dot{\vartheta} + \frac{1}{2}m\omega Rr \right) \mathbf{e}_3 \\ \dot{\mathbf{M}}_C &= -\frac{3}{2}m(R-r)r\ddot{\vartheta}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{N}_C &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) \times (-mge_2) + \cancel{(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_C) \times \boldsymbol{\Phi}} = mgr \sin \vartheta \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Perciò l'equazione del moto finale è

$$-\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\vartheta} = mg(R-r) \sin \vartheta \implies \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\vartheta} = -g \sin \vartheta$$

che è la stessa trovata nel punto precedente.