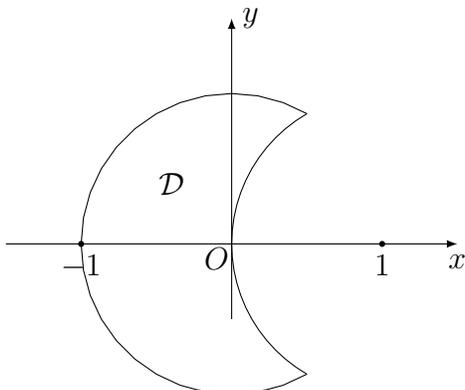


## Compito di Meccanica Razionale

### 16 Luglio 2025

**Esercizio 1.** In un piano si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Si consideri il corpo rigido omogeneo  $\mathcal{D}$  di densità  $\sigma > 0$  descritto in figura, ottenuto ritagliando da un disco di raggio  $r = 1$  e centro  $O$  una porzione di un disco di centro  $(x, y) = (1, 0)$  e raggio  $r$ .

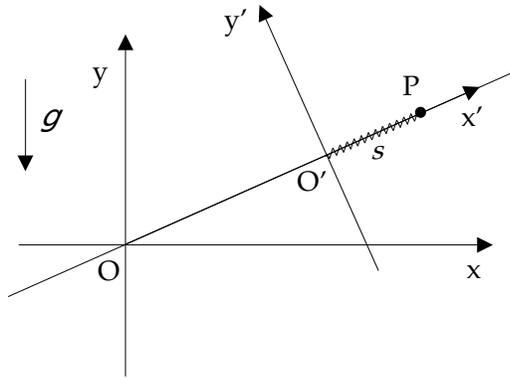


Calcolare il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse  $Oy$ .

**Esercizio 2.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxy$  con asse  $Oy$  verticale ascendente e si consideri una guida rettilinea incernierata in  $O$  che ruota con velocità angolare costante  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{e}_3$  ( $\omega > 0$ ), dove  $\hat{e}_3$  è il versore ortogonale al piano. Si prenda un punto  $O'$  vincolato a muoversi lungo la guida con legge oraria  $r(t) = \frac{1}{2}at^2$  ( $a > 0$ ). Si consideri quindi il sistema di riferimento  $\Sigma' = O'x'y'$  con asse  $O'x'$  lungo la guida. Prendiamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi sulla guida e collegato a  $O'$  da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla (si veda la figura). Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $g > 0$ .

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usi come coordinata lagrangiana l'ascissa  $s$  del punto  $P$  lungo la guida misurata da  $O'$  e si supponga che al tempo  $t = 0$  gli assi  $Ox$  e  $O'x'$  coincidano.

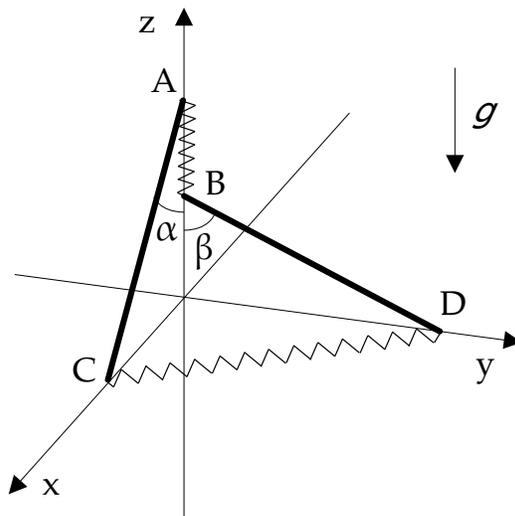
- i) Scrivere la lagrangiana  $L$  nel sistema di riferimento  $\Sigma$ .
- ii) Scrivere la lagrangiana  $L'$  nel sistema di riferimento  $\Sigma'$ .
- iii) Mostrare che le due lagrangiane sono equivalenti trovando una funzione  $F(s, t)$  tale che  $L' = L + dF/dt$ .



**Esercizio 3.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente. Un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  ha un estremo  $A$  vincolato a muoversi sull'asse  $Oz$  e l'altro estremo  $C$  vincolato a muoversi sull'asse  $Ox$ . Un'altra asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  ha un estremo  $B$  vincolato a muoversi sull'asse  $Oz$  e l'altro estremo  $D$  vincolato a muoversi sull'asse  $Oy$ . Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega gli estremi  $A$  e  $B$  delle due aste, mentre un'altra molla uguale alla precedente collega gli estremi  $C$  e  $D$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $g > 0$ .

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usino come coordinare lagrangiane l'angolo  $\alpha$  che l'asta  $AC$  forma con l'asse  $Oz$  e l'angolo  $\beta$  che l'asta  $BD$  forma con l'asse  $Oz$  (come riportato in figura).

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Trovare le configurazioni di equilibrio.
- iii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di  $J = \frac{mg}{k\ell}$ .



### Esercizio 1.

Il momento assiale richiesto corrisponde a  $I_{22}$  considerando il sistema di riferimento  $Oxy$  dato. Possiamo calcolare tale momento di inerzia in diversi modi. Per esempio, possiamo prendere  $I_{22}$  del cerchio e sottrargli quello della figura rimossa dal disco intero. Per fare questo possiamo prima calcolare il momento assiale di tale figura rispetto all'asse verticale passante per  $(1/2, 0)$  e poi usare Huygens-Steiner per spostarci di nuovo in  $O$ . Nella risoluzione proposta in queste soluzioni prenderemo invece una strada più diretta.

Dividiamo il corpo rigido nelle quattro figure definite dai quadranti del sistema  $Oxy$ ; per ottenere  $I_{22}$  dell'intero corpi sommeremo i contributi dei singoli pezzi. Chiamiamo le quattro figure  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{Q}_2$ ,  $\mathcal{Q}_3$  e  $\mathcal{Q}_4$ , numerate secondo l'ordine dei quadranti. Per i quarti di cerchio  $\mathcal{Q}_3$  e  $\mathcal{Q}_4$  il valore di  $I_{22}$  corrisponde a un quarto di quello del disco intero:

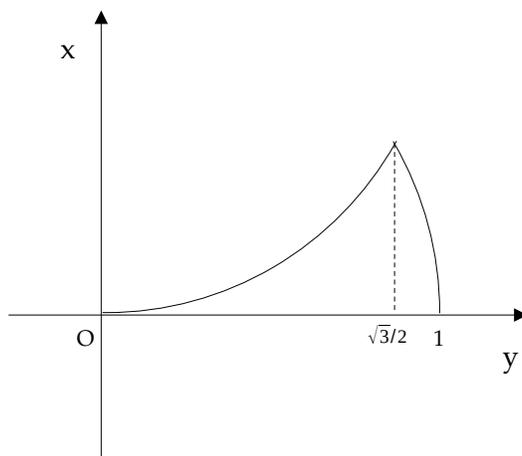
$$I_{22}^{\mathcal{Q}_3} = I_{22}^{\mathcal{Q}_4} = \frac{\pi}{16}\sigma r^4 = \frac{\pi}{16}\sigma$$

Per trovare  $I_{22}$  delle figure  $\mathcal{Q}_1$  e  $\mathcal{Q}_2$ , calcoliamo direttamente gli integrali che definiscono tale momento di inerzia. Notiamo che per invarianza di  $I_{22}$  per simmetrie di riflessione rispetto all'asse  $Ox$ , vale che  $I_{22}^{\mathcal{Q}_1} = I_{22}^{\mathcal{Q}_2}$ . Perciò calcoliamo tale quantità solo per  $\mathcal{Q}_1$ .

Esplicitiamo il supporto di  $\mathcal{Q}_1$  usando le equazioni delle due circonferenze che ne definiscono il bordo:  $x^2 + y^2 = 1$  e  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ . In particolare vediamo  $\mathcal{Q}_1$  come l'unione di due pezzi (si veda la figura)

$$\mathcal{Q}_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{3}/2, 0 \leq x \leq 1 - \sqrt{1 - y^2}\} \cup \{(x, y) | \sqrt{3}/2 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$$

Si noti che si poteva invece usare  $\sqrt{1 - (x - 1)^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$  (la risoluzione degli integrali cambiava e diventava leggermente più complicata).



Calcoliamo quindi  $I_{22}$  per  $\mathcal{Q}_1$ :

$$\begin{aligned}
 I_{22}^{\mathcal{Q}_1} &= \int_{\mathcal{Q}_1} \sigma x^2 dx dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} \sigma x^2 dx dy + \int_{\sqrt{3}/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sigma x^2 dx dy = \\
 &= \frac{\sigma}{3} \int_0^{\sqrt{3}/2} (1 - \sqrt{1-y^2})^3 dy + \frac{\sigma}{3} \int_{\sqrt{3}/2}^1 (\sqrt{1-y^2})^3 dy = \\
 &= \frac{\sigma}{3} \int_0^{\sqrt{3}/2} 1 dy - \sigma \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-y^2} dy + \sigma \int_0^{\sqrt{3}/2} (1-y^2) dy - \frac{\sigma}{3} \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-y^2}^3 dy \\
 &\quad + \frac{\sigma}{3} \int_{\sqrt{3}/2}^1 \sqrt{1-y^2}^3 dy
 \end{aligned}$$

Risolviamo a parte i tre integrali con le radici:

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-y^2} dy = \int_0^{\pi/3} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

in cui abbiamo usato la sostituzione  $y = \sin t$ . In maniera analoga

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-y^2}^3 dy = \int_0^{\pi/3} \cos^4 t dt = \int_0^{\pi/3} \cos^2 t dt - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \sin^2(2t) dt = \frac{\pi}{8} + \frac{7\sqrt{3}}{64}$$

$$\int_{\sqrt{3}/2}^1 \sqrt{1-y^2}^3 dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 t dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 t dt - \frac{1}{4} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2(2t) dt = \frac{\pi}{16} - \frac{7\sqrt{3}}{64}$$

Quindi il momento  $I_{22}$  relativo a  $\mathcal{Q}_1$  è

$$\begin{aligned}
 I_{22}^{\mathcal{Q}_1} &= \left( \frac{\sqrt{3}}{6} - \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \left( \frac{\pi}{24} + \frac{7\sqrt{3}}{192} \right) + \left( \frac{\pi}{48} - \frac{7\sqrt{3}}{192} \right) \right) \sigma = \\
 &= \left( \frac{11\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{16}\pi \right) \sigma
 \end{aligned}$$

Perciò  $I_{22}$  dell'intera figura vale

$$I_{22} = 2 \frac{\pi}{16} \sigma + 2 \left( \frac{11\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{16}\pi \right) \sigma = \left( \frac{11}{16}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi \right) \sigma$$

N.B.: per risolvere gli integrali abbiamo usato che

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x dx &= (1/2)(x + \cos x \sin x) \\
 \int \sin^2 x dx &= (1/2)(x - \cos x \sin x)
 \end{aligned}$$

## Esercizio 2.

- i) Considerando il moto di  $O'$  lungo la guida e le condizioni date all'istante iniziale, vale che ad un tempo  $t$  generico il punto  $O'$  avrà ascissa  $(1/2)at^2$  lungo la guida e l'angolo tra gli assi  $O'x'$  e  $Ox$  sarà  $\omega t$ .

Per calcolare  $L$  in  $\Sigma$ , prendiamo la posizione e la velocità del punto  $P$  in tale sistema di riferimento:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_P &= \left(\frac{1}{2}at^2 + s\right) \cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2}at^2 + s\right) \sin(\omega t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_P &= \left((at + \dot{s}) \cos(\omega t) - \left(\frac{1}{2}at^2 + s\right) \omega \sin(\omega t)\right) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad \left((at + \dot{s}) \sin(\omega t) + \left(\frac{1}{2}at^2 + s\right) \omega \cos(\omega t)\right) \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

L'energia cinetica è quindi:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m \left( (at + \dot{s})^2 + \left(\frac{1}{2}at^2 + s\right)^2 \omega^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ma^2t^2 + mats + \frac{1}{2}m\omega^2s^2 + \frac{1}{8}ma^2t^4\omega^2 + \frac{1}{2}mat^2\omega^2s\end{aligned}$$

L'energia potenziale del sistema comprende l'energia potenziale elastica e quella gravitazionale:

$$V = \frac{1}{2}k|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_{O'}|^2 + mg\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}_P = \frac{1}{2}ks^2 + mg \left(\frac{1}{2}at^2 + s\right) \sin(\omega t)$$

Perciò la Lagrangiana completa (a meno dei termini che non dipendono dalla coordinata lagrangiana e quindi possono essere tralasciati) è

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mats + \frac{1}{2}m\omega^2s^2 + \frac{1}{2}mat^2\omega^2s - \frac{1}{2}ks^2 - mgs \sin(\omega t)$$

- ii) Per calcolare  $L'$  in  $\Sigma'$ , riscriviamo la posizione e la velocità del punto  $P$  in questo sistema di riferimento:

$$\mathbf{x}'_P = s\mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{v}'_P = \dot{s}\mathbf{e}'_1$$

L'energia cinetica è quindi:

$$T' = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_P|^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$$

Per l'energia potenziale, a parte l'energia potenziale elastica e gravitazionale, dobbiamo considerare i vari contributi dovuti alle forze apparenti

$$V' = m\mathbf{a}_{O'} \cdot \mathbf{x}'_P - \frac{1}{2}m|\omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}'_P|^2 + m(\omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}'_P) \cdot \mathbf{x}'_P + \frac{1}{2}k|\mathbf{x}'_P|^2 + mg\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}'_P$$

dove  $\mathbf{e}_2 = \sin(\omega t)\mathbf{e}'_1 + \cos(\omega t)\mathbf{e}'_2$  e  $\mathbf{a}'_0$  è l'accelerazione di  $O'$  in  $\Sigma$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{O'} &= \left( \left( a - \frac{1}{2}at^2\omega^2 \right) \cos(\omega t) - 2at\omega \sin(\omega t) \right) \mathbf{e}_1 + \left( \left( a - \frac{1}{2}at^2\omega^2 \right) \sin(\omega t) + 2at\omega \cos(\omega t) \right) \mathbf{e}_2 = \\ &= \left( a - \frac{1}{2}at^2\omega^2 \right) \mathbf{e}'_1 + 2at\omega \mathbf{e}'_2\end{aligned}$$

Sviluppo i vari termini:

$$\begin{aligned}m\mathbf{a}_{O'} \cdot \mathbf{x}'_P &= mas - \frac{1}{2}mat^2\omega^2s \\ -\frac{1}{2}m|\omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}'_P|^2 &= -\frac{1}{2}m\omega^2s^2 \\ m(\omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}'_P) \cdot \mathbf{x}'_P &= m\omega s \mathbf{e}'_2 \cdot s\mathbf{e}'_1 = 0\end{aligned}$$

Quindi l'energia potenziale è

$$V' = mas - \frac{1}{2}mat^2\omega^2s - \frac{1}{2}m\omega^2s^2 + \frac{1}{2}ks^2 + mgs \sin(\omega t)$$

Perciò la Lagrangiana completa è

$$L' = T' - V' = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mas + \frac{1}{2}mat^2\omega^2s + \frac{1}{2}m\omega^2s^2 - \frac{1}{2}ks^2 - mgs \sin(\omega t)$$

iii) Calcoliamo la differenza tra  $L'$  e  $L$ , gli unici termini che rimangono sono:

$$L' - L = -mas - mats$$

Perciò è facile verificare che questa differenza è la derivata totale della funzione

$$F(s, t) = -mast$$

Le due lagrangiane sono quindi equivalenti per una proposizione dimostrata a lezione.

### Esercizio 3.

- i) Scriviamo le coordinate dei punti  $A, B, C, D$  e dei baricentri delle due aste  $M_1$  e  $M_2$ , e le velocità di questi ultimi.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \ell \cos \alpha \mathbf{e}_3, & \mathbf{x}_B &= \ell \cos \beta \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_C &= \ell \sin \alpha \mathbf{e}_1, & \mathbf{x}_D &= \ell \sin \beta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{x}_{M_1} &= (\ell/2) \sin \alpha \mathbf{e}_1 + (\ell/2) \cos \alpha \mathbf{e}_3, & \mathbf{v}_{M_1} &= (\ell/2) \dot{\alpha} \cos \alpha \mathbf{e}_1 - (\ell/2) \dot{\alpha} \sin \alpha \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_{M_2} &= (\ell/2) \sin \beta \mathbf{e}_2 + (\ell/2) \cos \beta \mathbf{e}_3, & \mathbf{v}_{M_2} &= (\ell/2) \dot{\beta} \cos \beta \mathbf{e}_2 - (\ell/2) \dot{\beta} \sin \beta \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

L'energia cinetica è la somma dell'energia cinetica delle due aste. Poichè le aste si muovono di moto piano, possiamo calcolare le loro energie cinetiche come

$$T^a = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_M|^2 + \frac{1}{2} I_M \omega^2$$

dove  $I_M = (1/12)m\ell^2$  è il momento di inerzia rispetto all'asse perpendicolare al piano del moto e passante per il baricentro, e  $\omega$  è la velocità angolare dell'asta. L'energia cinetica totale è quindi

$$T = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\beta}^2$$

L'energia potenziale è la somma dell'energia potenziale elastica e gravitazionale

$$V = \frac{1}{2} k |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|^2 + \frac{1}{2} k |\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D|^2 + mgy_{M_1} + mgy_{M_2} = k\ell^2 - k\ell^2 \cos \alpha \cos \beta + mg \frac{\ell}{2} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

Perciò la lagrangiana è (a meno di costanti additive):

$$L = T - V = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\beta}^2 + k\ell^2 \cos \alpha \cos \beta - mg \frac{\ell}{2} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

- ii) Per trovare i punti di equilibrio, calcoliamo i punti stazionari della funzione  $V$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = k\ell^2 \sin \alpha \cos \beta - mg \frac{\ell}{2} \sin \alpha = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} = k\ell^2 \sin \beta \cos \alpha - mg \frac{\ell}{2} \sin \beta = 0 \end{cases}$$

Da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} k\ell^2 \sin \alpha (\cos \beta - J/2) = 0 \\ k\ell^2 \sin \beta (\cos \alpha - J/2) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi), \\ &= (\theta^*, \theta^*), (\theta^*, -\theta^*), (-\theta^*, \theta^*), (-\theta^*, -\theta^*) \end{aligned}$$

con  $\theta^* = \arccos(J/2)$ . Delle otto configurazioni di equilibrio trovate, le ultime quattro esistono solo se  $0 < J < 2$ .

iii) Per studiare la stabilità di tali configurazioni, calcoliamo la matrice hessiana di  $V$  e la valutiamo in tali punti

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(\alpha, \beta)^2} = k\ell^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha (\cos \beta - J/2) & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta (\cos \alpha - J/2) \end{bmatrix}$$

Valutiamo  $V''/(k\ell^2)$  nelle quattro configurazioni di equilibrio.

$$V''(0, 0)/(k\ell^2) = \begin{bmatrix} 1 - J/2 & 0 \\ 0 & 1 - J/2 \end{bmatrix}$$

se  $0 < J < 2$ :  $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0, 0)$  è minimo stretto di  $V$  e quindi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;

se  $J > 2$ :  $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (0, 0)$  è instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$V''(0, \pi)/(k\ell^2) = \begin{bmatrix} -1 - J/2 & 0 \\ 0 & -1 + J/2 \end{bmatrix}$$

per ogni  $J > 0$ :  $\lambda_1 < 0 \implies (0, \pi)$  è instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$V''(\pi, 0)/(k\ell^2) = \begin{bmatrix} -1 + J/2 & 0 \\ 0 & -1 - J/2 \end{bmatrix}$$

per ogni  $J > 0$ :  $\lambda_2 < 0 \implies (\pi, 0)$  è instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$V''(\pi, \pi)/(k\ell^2) = \begin{bmatrix} 1 + J/2 & 0 \\ 0 & 1 + J/2 \end{bmatrix}$$

per ogni  $J > 0$ :  $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (\pi, \pi)$  è minimo stretto di  $V$  e quindi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

$$V''(\theta^*, \theta^*)/(k\ell^2) = V''(-\theta^*, -\theta^*)/(k\ell^2) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin^2 \theta^* \\ -\sin^2 \theta^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$V''(-\theta^*, \theta^*)/(k\ell^2) = V''(\theta^*, -\theta^*)/(k\ell^2) = \begin{bmatrix} 0 & +\sin^2 \theta^* \\ +\sin^2 \theta^* & 0 \end{bmatrix}$$

per ogni  $0 < J < 2$  (cioè quando queste configurazioni di equilibrio esistono):  
 $\det < 0 \implies$  esiste  $\lambda_i < 0 \implies$  tutte e quattro queste configurazioni sono instabili perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.