Primo compito di Meccanica Razionale
18 Giugno 2022

Esercizio 1. Un corpo di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \alpha\rho^2 + \frac{\beta}{\rho^2}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di α e β.

ii) Tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare dei parametri α, β e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto, supponendo $c \neq 0$.

iii) Siano $\alpha = -2$, $\beta = 1$ e si prendano

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = a\mathbf{e}_\rho + b\mathbf{e}_\theta, \qquad a, b \in \mathbb{R};$$

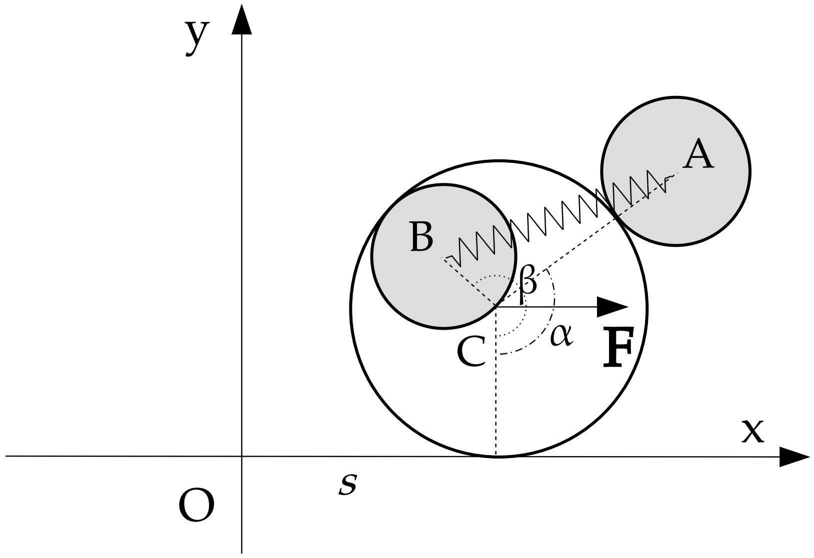
trovare a e b affinchè l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Un anello $\mathcal{A}$ omogeneo di massa M e raggio $2r$ rotola senza strisciare sull'asse Ox. Inoltre, due dischi $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ omegenei di massa m e raggio r rotolano senza strisciare sul bordo dell'anello, stando uno all'esterno e uno all'interno dell'anello. I baricentri dei due dischi sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Infine, una forza costante $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_1$ é applicata nel centro di massa dell'anello.

Chiamiamo C il centro di massa di $\mathcal{A}$, A il centro di massa di $\mathcal{D}_1$ e B il centro di massa di $\mathcal{D}_2$. Si usino come coordinate l'ascissa s di C, l'angolo α che CA forma con la direzione verticale e l'angolo β che CB forma con la direzione verticale (si veda la figura).

i) Calcolare le velocità angolari di $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$.

ii) Calcolare le equazioni di moto del sistema mediante le equazioni cardinali.



Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m collegati da una molla di costante elastica k. Il punto P_1 può scivolare sulla retta

$$r = \{(x, y, z) \ : \ x = a, \ z = 0\}$$

con $a > 0$ e il punto P_2 può scivolare sulla circonferenza

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 = r^2, \ z = h\}$$

con $r, h > 0$. Usando come coordinate lagrangiane la coordinata y del punto P_1 e l'angolo θ che il punto P_2 descrive sulla circonferenza, assumendo $\theta = 0$ quando P_2 si trova nel punto di coordinare $(x, y, z) = (r, 0, h)$.

i) Calcolare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro a/r.

ii) Per $a = 2r$, trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $m = 1$ e per avere orbite circolari necessariamente $c \neq 0$, dove c è la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

Per trovare le orbite circolari, risolvo quindi l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{m\rho^3} = \frac{\alpha\rho^5 + \beta\rho + c^2}{\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad P(\rho) = \alpha\rho^5 + \beta\rho + c^2 = 0$$

Abbiamo ridotto l'esercizio al calcolo del numero di radici positive di un polinomio, di cui sappiamo che $P(0) = c^2 > 0$. Distinguiamo i vari casi secondo il segno di α e β.
- Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, allora non ci sono cambi di segno nel polinomio, quindi per la regola di Cartesio non ci sono radici positive. In questo caso non esistono orbite circolari.
- Se $\alpha < 0$ e β qualsiasi, allora c'è un unico cambio di segno nel polinomio, quindi per la regola di Cartesio esiste al massimo una sola radice positiva. Poichè $\lim_{\rho\to+\infty} P(\rho) = -\infty$, allora per $P(0) > 0$ e la continuità di $P(\rho)$ abbiamo esattamente una soluzione, quindi un'unica orbita circolare.
- Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, allora ci sono due cambi di segno nel polinomio, quindi per la regola di Cartesio esistono al massimo due radici positive. Poichè $\lim_{\rho\to+\infty} P(\rho) = +\infty$, il numero di orbite circolari dipenderà dall'altezza del minimo di $P(\rho)$.

$$P'(\rho) = 5\alpha\rho^4 + \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_m = \sqrt[4]{-\frac{\beta}{5\alpha}}$$

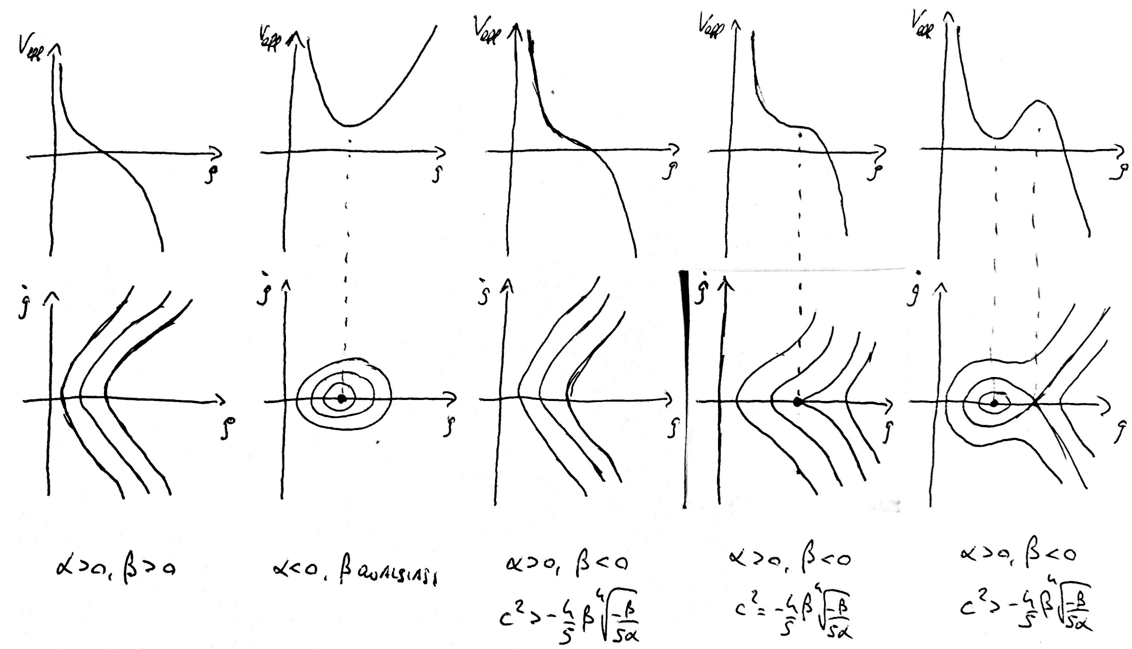
E il valore del polinomio in tale punto è

$$P(\rho_m) = \frac{4}{5}\beta\sqrt[4]{-\frac{\beta}{5\alpha}} + c^2$$

Perciò in questo caso abbiamo che se $c^2 > -\frac{4}{5}\beta\sqrt[4]{-\frac{\beta}{5\alpha}}$ allora non ci sono orbite circolari, se $c^2 = \frac{4}{5}\beta\sqrt[4]{-\frac{\beta}{5\alpha}}$ esiste un'unica orbita circolare e se $c^2 < \frac{4}{5}\beta\sqrt[4]{-\frac{\beta}{5\alpha}}$ esistono due orbite circolari.

ii) Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace e studio la funzione

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2} = -\frac{\alpha\rho^3}{3} + \frac{\beta}{\rho} + \frac{c^2}{2\rho^2}$$



iii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

valutando queste espressioni all'istante iniziale otteniamo

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = b.$$

Per avere un'orbita circolare, necessariamente deve valere $a = 0$. Inoltre, possiamo calcolare il valore della costante c dalle condizioni iniziali:

$$c = m\rho^2\dot{\theta} = \rho^2(0)\dot{\theta}(0) = b$$

Per $\alpha = -2$ e $\beta = 1$, abbiamo un'unica orbita circolare $\overline{\rho}$, che sappiamo risolvere l'equazione $P(\overline{\rho}) = 0$. Imponendo che $\overline{\rho} = \rho(0) = 1$, otteniamo

$$-2 + 1 + c^2 = 0 \quad \to \quad c^2 = 1 \quad \to \quad b = \pm 1$$

Perciò per avere che la condizione iniziale data corrisponda ad un'orbita circolare $(a, b) = (0, \pm 1)$

Esercizio 2.

i) La velocità angolare dell'anello è $\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{A})} = (-\dot{s}/(2r))\mathbf{e}_3$ (risultato noto da lezione). Chiamo P il punto di contatto tra $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{A}$, Q il punto di contatto tra $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{A}$, T

il punto di contatto tra $\mathcal{A}$ e l'asse x. Le coordinate dei punti sono:

$$
\begin{gathered}
(T-O) = s\mathbf{e}_1, \quad (C-O) = s\mathbf{e}_1 + 2r\mathbf{e}_2 \\
(A-O) = (C-O) + 3r\sin\alpha\mathbf{e}_1 - 3r\cos\alpha\mathbf{e}_2 \\
(B-O) = (C-O) + r\sin\beta\mathbf{e}_1 - r\cos\beta\mathbf{e}_2 \\
(P-O) = (C-O) + 2r\sin\alpha\mathbf{e}_1 - 2r\cos\alpha\mathbf{e}_2 \\
(Q-O) = (C-O) + 2r\sin\beta\mathbf{e}_1 - 2r\cos\beta\mathbf{e}_2
\end{gathered}
$$

La velocità del punto P come punto di $\mathcal{A}$ è:

$$
\mathbf{v}_P^{(\mathcal{A})} = \mathbf{v}_C - \frac{\dot{s}}{2r}\mathbf{e}_3 \times (2r\sin\alpha\mathbf{e}_1 - 2r\cos\alpha\mathbf{e}_2) = \dot{s}(1-\cos\alpha)\mathbf{e}_1 - \dot{s}\sin\alpha\mathbf{e}_2
$$

Usando che per ipotesi $\mathbf{v}_P^{(\mathcal{A})} = \mathbf{v}_P^{(\mathcal{D}_1)}$ e che

$$
\mathbf{v}_A = (\dot{s} + 3r\dot{\alpha}\cos\alpha)\mathbf{e}_1 + 3r\dot{\alpha}\sin\alpha\mathbf{e}_2
$$

possiamo calcolare $\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_1)}$ tramite la formula fondamentale della cinematica rigida

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P^{(\mathcal{D}_1)} + \omega^{(\mathcal{D}_1)}\mathbf{e}_3 \times (A-P) = \mathbf{v}_P^{(\mathcal{D}_1)} + \omega^{(\mathcal{D}_1)}\mathbf{e}_3 \times (r\sin\alpha\mathbf{e}_1 - r\cos\alpha\mathbf{e}_2) \\
(\dot{s} + 3r\dot{\alpha}\cos\alpha)\mathbf{e}_1 + 3r\dot{\alpha}\sin\alpha\mathbf{e}_2 = \dot{s}(1-\cos\alpha)\mathbf{e}_1 - \dot{s}\sin\alpha\mathbf{e}_2 + \omega^{(\mathcal{D}_1)}r\cos\alpha\mathbf{e}_1 + \omega^{(\mathcal{D}_1)}r\sin\alpha\mathbf{e}_2 \\
\Longrightarrow \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_1)} = \left(\frac{\dot{s}}{r} + 3\dot{\alpha}\right)\mathbf{e}_3
\end{gathered}
$$

In modo analogo, usando i punti B e Q per $\mathcal{D}_2$, troviamo che

$$
\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_2)} = -\left(\frac{\dot{s}}{r} + \dot{\beta}\right)\mathbf{e}_3
$$

ii) Siccome le coordinate che descrivono il sistema sono tre, ho bisogno di tre equazioni differenziali pure indipendenti nelle tre variabili s, α e β.

- La prima equazione è la seconda equazione cardinale con polo P per il solo $\mathcal{D}_1$

$$
\dot{\mathbf{M}}_P^{\mathcal{D}_1} = -\mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_A + \mathbf{N}_P^{\mathcal{D}_1}
$$

Il momento angolare è

$$
\mathbf{M}_P^{\mathcal{D}_1} = m(A-P) \times \mathbf{v}_P^{\mathcal{D}_1} + I_P^{\mathcal{D}_1}\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_1)} = \left(\frac{1}{2}mr\dot{s} + \frac{9}{2}mr^2\dot{\alpha} + mr\dot{s}\cos\alpha\right)\mathbf{e}_3
$$

La sua derivata temporale è

$$
\dot{\mathbf{M}}_P^{\mathcal{D}_1} = \left(\frac{1}{2}mr\ddot{s} + \frac{9}{2}mr^2\ddot{\alpha} + mr\ddot{s}\cos\alpha - mr\dot{s}\dot{\alpha}\sin\alpha\right)\mathbf{e}_3
$$

I termini del membro destro dell'equazione sono:

$$-\mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_A = -m\mathbf{v}_P \times (\cancel{\mathbf{v}_P} + r\dot{\alpha}(\cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2)) = -mr\dot{s}\dot{\alpha}\sin\alpha\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{N}_P^{\mathcal{D}_1} = m(A-P) \times (-k(A-B)) = kr^2\sin(\beta-\alpha)\mathbf{e}_3$$

L'equazione completa è quindi

$$\frac{1}{2}mr\ddot{s} + \frac{9}{2}mr^2\ddot{\alpha} + mr\ddot{s}\cos\alpha = kr^2\sin(\beta-\alpha)$$

- La seconda equazione è la seconda equazione cardinale con polo Q per il solo $\mathcal{D}_2$

$$\dot{\mathbf{M}}_Q^{\mathcal{D}_2} = -\mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{\mathcal{D}_2}$$

Il momento angolare è

$$\mathbf{M}_Q^{\mathcal{D}_2} = m(B-Q) \times \mathbf{v}_Q^{\mathcal{D}_2} + I_Q^{\mathcal{D}_2}\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_2)} = \left(-\frac{1}{2}mr\dot{s} - \frac{3}{2}mr^2\dot{\beta} - mr\dot{s}\cos\beta\right)\mathbf{e}_3$$

La sua derivata temporale è

$$\dot{\mathbf{M}}_Q^{\mathcal{D}_2} = \left(-\frac{1}{2}mr\ddot{s} - \frac{3}{2}mr^2\ddot{\beta} - mr\ddot{s}\cos\beta + mr\dot{s}\dot{\beta}\sin\beta\right)\mathbf{e}_3$$

I termini del membro destro dell'equazione sono:

$$-\mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B = -m\mathbf{v}_Q \times (\cancel{\mathbf{v}_Q} - r\dot{\beta}(\cos\beta\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2)) = mr\dot{s}\dot{\beta}\sin\beta\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{N}_Q^{\mathcal{D}_2} = m(B-Q) \times (k(A-B)) = 3kr^2\sin(\beta-\alpha)\mathbf{e}_3$$

L'equazione completa è quindi

$$-\frac{1}{2}mr\ddot{s} - \frac{3}{2}mr^2\ddot{\beta} - mr\ddot{s}\cos\beta = 3kr^2\sin(\beta-\alpha)$$

- La terza equazione è la seconda equazione cardinale con polo T per l'intero sistema

$$\dot{\mathbf{M}}_T^{\text{tot}} = -\mathbf{v}_T \times (m\mathbf{v}_A + m\mathbf{v}_B + \cancel{M\mathbf{v}_C}) + \mathbf{N}_T^{\text{tot}}$$

Il momento angolare è

$$\mathbf{M}_T^{\text{tot}} = \mathbf{M}_T^{\mathcal{D}_1} + \mathbf{M}_T^{\mathcal{D}_2} + \mathbf{M}_T^{\mathcal{A}} = \left(\mathbf{M}_P^{\mathcal{D}_1} + m(P-T) \times \mathbf{v}_A\right) + \left(\mathbf{M}_Q^{\mathcal{D}_2} + m(Q-T) \times \mathbf{v}_B\right) + \mathbf{M}_T^{\mathcal{A}} =$$
$$\left(mr\dot{s}(-(3/2) + 3\cos\alpha) + mr^2\dot{\alpha}(21/2 - 6\cos\alpha)\right) + \left(mr\dot{s}(-(5/2) + \cos\beta) + mr^2\dot{\beta}(1/2 - 2\cos\beta)\right) - 3Mr\dot{s} =$$
$$\left(-3Mr\dot{s} + mr\dot{s}(-4 + 3\cos\alpha + \cos\beta) + mr^2\dot{\alpha}(21/2 - 6\cos\alpha) + mr^2\dot{\beta}(1/2 - 2\cos\beta)\right)\mathbf{e}_3$$

dove ho sfruttato il fatto che avevo già calcolato il momento angolare dei due dischi in punti diversi da T. La sua derivata temporale è

$$\dot{\mathbf{M}}_T^{\text{tot}} = \Big(-3Mr\ddot{s} + mr\ddot{s}(-4 + 3\cos\alpha + \cos\beta) - mr\dot{s}(3\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\beta}\sin\beta)$$
$$+mr^2\ddot{\alpha}(21/2 - 6\cos\alpha) + 6mr^2\dot{\alpha}^2\sin\alpha + mr^2\ddot{\beta}(1/2 - 2\cos\beta) + 2mr^2\dot{\beta}^2\sin\beta\Big)\,\mathbf{e}_3$$

I termini del membro destro dell'equazione sono:

$$-\mathbf{v}_T \times m(\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B) = -mr\dot{s}(3\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\beta}\sin\beta)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{N}_T^{\text{tot}} = (C - T) \times F\mathbf{e}_1 = 2r\mathbf{e}_2 \times F\mathbf{e}_1 = -2rF\mathbf{e}_3$$

dove ho usato il fatto che per il sistema completo la molla non contribuisce all'equazione cardinale (risultante e momento nulli). L'equazione completa è quindi

$$-3Mr\ddot{s}+mr\ddot{s}(-4+3\cos\alpha+\cos\beta)+mr^2\ddot{\alpha}(21/2-6\cos\alpha)+6mr^2\dot{\alpha}^2\sin\alpha+mr^2\ddot{\beta}(1/2-2\cos\beta)+2mr^2\dot{\beta}^2\sin\beta = -2rF$$

Esercizio 3.

i) Le coordinate e le velocità dei due punti materiali sono

$$(P_1 - O) = a\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{v}_1 = \dot{y}\mathbf{e}_2$$
$$(P_2 - O) = r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{v}_2 = -r\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_1 + r\dot{\theta}\cos\theta\mathbf{e}_2$$

Calcolo l'energia potenziale del sistema (è presente solo la forza elastica):

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k|P_1 - P_2|^2 = \frac{1}{2}k\left((a - r\cos\theta)^2 + (y - r\sin\theta)^2 + h^2\right)$$

Eliminando i termini costanti, che non contribuiscono alle equazioni di Lagrange, ottengo:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k\left(-2ar\cos\theta + y^2 - 2ry\sin\theta\right)$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di $\mathcal{V}$ rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} = ky - kr\sin\theta = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} = kar\sin\theta - kry\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ottengo $y = r\sin\theta$, e sostituendola alla seconda:

$$kar\sin\theta - kr^2\sin\theta\cos\theta = 0$$
$$\cos\theta\sin\theta - (a/r)\sin\theta = 0$$
$$\sin\theta = 0 \quad \text{oppure} \quad \cos\theta = a/r$$

Dalla prima ottengo le configurazioni di equilibrio $(0,0)$ e $(0,\pi)$, dalla seconda $(r\sin\theta^*, \theta^*)$ e $(-r\sin\theta^*, -\theta^*)$, con $\theta^* = \arccos(a/r)$. Le ultime due configurazioni di equilibrio esistono solo per $0 < a/r < 1$.

Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di $\mathcal{V}$ valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial(y,\theta)^2} = \begin{bmatrix} k & -kr\cos\theta \\ -kr\cos\theta & kr^2((a/r)\cos\theta + (y/r)\sin\theta) \end{bmatrix}$$

Valuto $\mathcal{V}''$ nelle quattro configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{V}''(0,0) = \begin{bmatrix} k & -kr \\ -kr & kr^2(a/r) \end{bmatrix}$$

det $= (a/r - 1)k^2r^2$ e tr $= k + kr^2(a/r)$
se $(a/r) > 1$: det > 0 e tr $> 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0,0)$ stabile per teorema di Lagrange-Dirichilet
per $0 < (a/r) < 1$: det $< 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,0)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$\mathcal{V}''(0,\pi) = \begin{bmatrix} k & kr \\ kr & -kr^2(a/r) \end{bmatrix}$$

det $= (-a/r - 1)k^2r^2$ e tr $= k + kr^2(a/r)$
per ogni $(a/r) > 0$: det $< 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,\pi)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$V''(r\sin\theta^*, \theta^*) = V''(-r\sin\theta^*, -\theta^*) = \begin{bmatrix} k & kr(a/r) \\ kr(a/r) & kr^2 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo usato che $\cos\theta^* = a/r$ e $\sin^2\theta^* = 1 - (a/r)^2$
det $= k^2r^2(1 - (a/r)^2)$ e tr $= k + kr^2$
se $0 < (a/r) < 1$ (cioè quando queste configurazioni di equilibrio esistono): det > 0 e tr $> 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (r\sin\theta^*, \theta^*)$ e $(-r\sin\theta^*, -\theta^*)$ sono stabili per teorema di Lagrange-Dirichilet

ii) Per $(a/r) = 2$ esiste un unico punto di equilibrio stabile ed è $(0,0)$. L'energia cinetica del sistema è

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

La matrice cinetica è quindi

$$A(\dot{y},\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{bmatrix}$$

Per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni calcolo gli autovalori della matrice $A^{-1}\mathcal{V}''$ valutata nel punto di equilibrio stabile

$$A^{-1}\mathcal{V}''(0,0) = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 & -r \\ -1/r & 2 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$

E le frequenze proprie cercate sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$