Primo compitino di Meccanica Razionale
19 Aprile 2024

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\,,\ \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \frac{\rho}{4} - 2 + \frac{11}{2\rho} - \frac{6}{\rho^2}$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c.

ii) Calcolare l'energia potenziale efficace. Nel caso $|c| = \sqrt{2}$, tracciare qualitativamente il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$.

iii) Sul piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si prendano

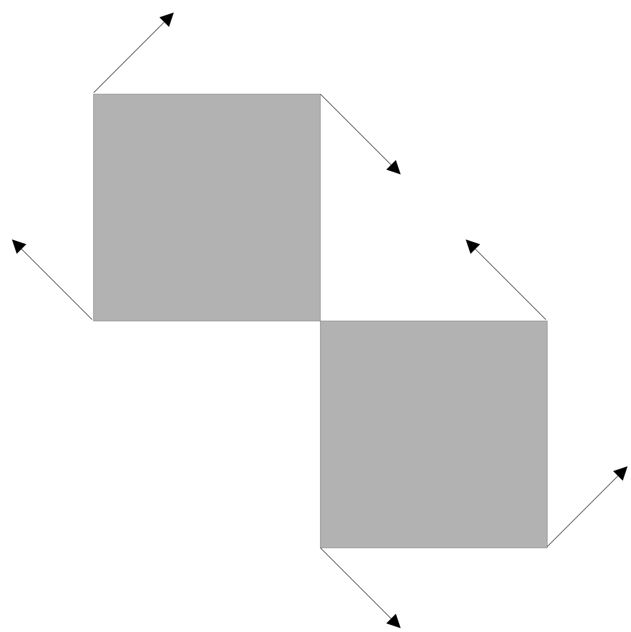
$$\mathbf{x}(0) = (1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (a, b), \qquad a, b \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a e b affinchè l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. Si consideri una lamina $\mathcal{C}$ omogenea di massa m, formata da due lamine quadrate di lato ℓ, con lati paralleli e con solo un vertice in comune. Sui vertici non in comune dei due quadrati sono applicate delle forze di uguale intensità $F > 0$, parallele alle diagonali dei quadrati e orientate come in figura.

i) Calcolare i momenti principali di inerzia per la lamina $\mathcal{C}$ rispetto al suo baricentro.

ii) Trovare un'ulteriore forza $\mathbf{G}$ che applicata su un punto A della lamina $\mathcal{C}$ equilibri il sistema di forze.



Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$\frac{\rho}{4} - 2 + \frac{11}{2\rho} - \frac{6}{\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho^4}{4} - 2\rho^3 + \frac{11}{2}\rho^2 - 6\rho + c^2 = 0$$

Studiamo il polinomio $P(\rho)$ definito sopra per capire quante radici reali positive possiede. Poichè $P(\rho)$ presenta quattro cambi di segno, dalla regola di Cartesio sappiamo che ha al massimo quattro radici positive. In più:

$$P(0) = c^2 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \to +\infty} P(\rho) = +\infty$$

Studiando i massimi e i minimi di $P(\rho)$ è possibile ricavare quante volte il grafico del polinomio attraversa l'asse delle ascisse. I punti stazionari sono:

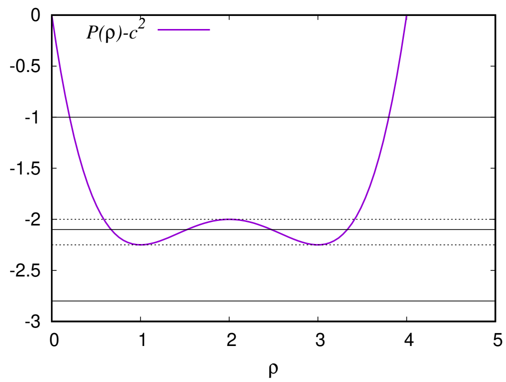
$$P'(\rho) = \rho^3 - 6\rho^2 + 11\rho - 6 = 0 \implies \rho = 1 \ \vee \ \rho = 2 \ \vee \rho = 3$$

Dal valore del polinomio agli estremi del dominio ricaviamo che $\rho = 1$ e $\rho = 3$ sono punti di minimo, mentre $\rho = 2$ di massimo. Valutiamo $P(\rho)$ nei punti stazionari:

$$P(1) = \frac{1}{4} - 2 + \frac{11}{2} - 6 + c^2 = c^2 - \frac{9}{4}$$
$$P(2) = 4 - 16 + 22 - 12 + c^2 = c^2 - 2$$
$$P(3) = \frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18 + c^2 = c^2 - \frac{9}{4}$$

Ricaviamo quindi che per $c^2 > 9/4$ il grafico del polinomio è sempre sopra il semiasse positivo delle ascisse; per $2 < c^2 < 9/4$ i punti di minimo sono sotto il semiasse positivo delle ascisse e quello di massimo sopra; per $c^2 > 2$ tutti e tre i punti sono sotto il semiasse positivo delle ascisse. Perciò abbiamo le seguenti casistiche (si veda la figura):

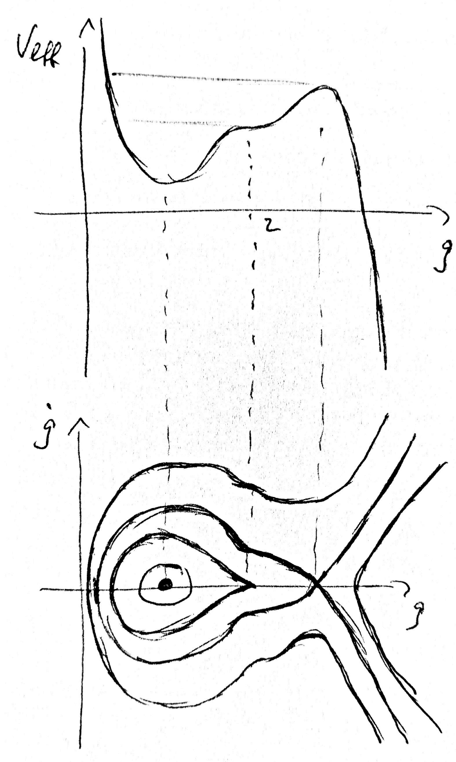
- $|c| > 3/2$, allora $P(\rho)$ non attraversa mai il semiasse positivo delle ascisse, quindi non ci sono orbite circolari.
- $|c| = 3/2$, allora esistono due orbite circolari con $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 3$.
- $\sqrt{2} < |c| < 3/2$, allora esistono quattro orbite circolari con $\rho_1 < 1$, $1 < \rho_2 < 2$, $2 < \rho_3 < 3$ e $\rho_4 > 3$.
- $|c| = \sqrt{2}$, allora esistono tre orbite circolari con $\rho_1 < 1$, $\rho_2 = 2$ e $\rho_3 > 3$.
- $|c| < \sqrt{2}$, allora esistono due orbite circolari con $\rho_1 < 1$ e $\rho_3 > 3$.



ii) Siccome $c = \sqrt{2}$, dai punti precedenti sappiamo che esistono tre orbite circolari, una delle quali ha $\rho_2 = 2$. Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\frac{\rho^2}{8} + 2\rho - \frac{11}{2}\log\rho - \frac{6}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}$$

Tale funzione ha tre punti stazionari (vedi punto precedente), inoltre $\lim_{\rho\to 0^+} V_{\text{eff}} = +\infty$ e $\lim_{\rho\to+\infty} V_{\text{eff}} = -\infty$. Dallo studio di $P(\rho)$ fatto nel punto precedente ricaviamo che i punti stazionari sono: ρ_1 $(= 2-\sqrt{2})$ minimo locale, ρ_2 $(= 2)$ flesso a tangente orizzontale ($V''_{\text{eff}}(2) = 0$), ρ_3 $(= 2+\sqrt{2})$ massimo locale. Il ritratto di fase richiesto è quindi



iii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

e che in questo caso all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{e}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{e}_2$, valutando le espressioni sopra all'istante iniziale otteniamo

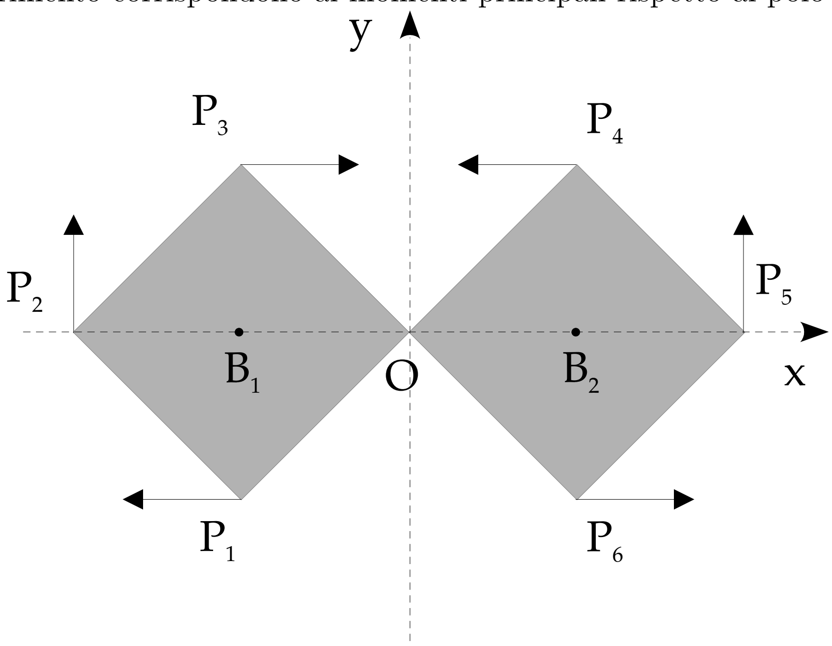
$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = b.$$

La condizione $\dot{\rho} = 0 \to a = 0$ è necessaria per avere un'orbita circolare. Inoltre, dal primo punto dell'esercizio sappiamo che l'unica possibilità perchè si abbia un'orbita circolare con $\rho = 1$ è che $|c| = 3/2$. Otteniamo quindi

$$c = \rho^2\dot{\theta} = \rho^2(0)\dot{\theta}(0) = b \;\to\; b = \pm\frac{3}{2}$$

Esercizio 2.

i) Il baricentro della lamina è il punto di contatto tra i due quadrati $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$, essendo il punto medio tra i due baricentri B_1 e B_2. Per trovare i momenti principali di inerzia, determiniamo una base principale. Consideriamo il riferimento riportato nella figura, centrato nel baricentro di $\mathcal{C}$, l'asse Ox lungo la diagonale dei quadrati e l'asse Oy sempre nel piano della figura e perpendicolare a Ox. Tale sistema di riferimento è principale di inerzia in quanto: $\mathbf{e}_3$ è una direzione principale, perchè il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_2$ è una direzione principale, perchè ortogonale al piano xz che è di simmetria per riflessione per il corpo; $\mathbf{e}_1$ è una direzione principale, perchè l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali. Perciò la matrice di inerzia I in questo sistema di riferimento é diagonale e i valori I_{ii} calcolati in questo riferimento corrispondono ai momenti principali rispetto al polo scelto.



Per calcolare i momenti di inerzia utilizziamo i valori dei momenti principali di inerzia per le lamine quadrate, che già conosciamo (nota che $m_{\mathcal{Q}} = (1/2)m$):

$$I_{B,11}^{(\mathcal{Q})} = I_{B,22}^{(\mathcal{Q})} = \frac{1}{12} m_{\mathcal{Q}} \ell^2 = \frac{1}{24} m\ell^2,$$

infatti sappiamo che rispetto al baricentro B_i tutte le direzioni sono principali di inerzia per il quadrato $\mathcal{Q}_i$ e hanno lo stesso valore del momento di inerzia.

Siccome O si trova sullo stesso asse orizzontale passante per B_i, il momento di inerzia rispetto a tale asse è lo stesso:

$$I_{O,11}^{(\mathcal{Q})} = I_{B,11}^{(\mathcal{Q})} = \frac{1}{24} m\ell^2.$$

Invece, per calcolare $I^{(\mathcal{Q})}_{O,22}$, possiamo utilizzare il teorema di Huygens-Steiner, dove la distanza tra l'asse verticale passante per O e quello per B_i è $d = (\sqrt{2}/2)\ell$:

$$I^{(\mathcal{Q})}_{O,22} = I^{(\mathcal{Q})}_{B,22} + m_{\mathcal{Q}} d^2 = \frac{1}{24} m\ell^2 + \frac{1}{4} m\ell^2 = \frac{7}{24} m\ell^2.$$

I momenti principali di inerzia di $\mathcal{C}$ si ottengono sommando i momenti calcolati per i due quadrati (i quali sono uguali):

$$\begin{aligned} I_1 =& 2I^{(\mathcal{Q})}_{O,11} = \frac{1}{12} m\ell^2, \\ I_2 =& 2I^{(\mathcal{Q})}_{O,22} = \frac{7}{12} m\ell^2, \\ I_3 =& I_1 + I_2 = \frac{2}{3} m\ell^2. \end{aligned}$$

ii) Usiamo lo stesso sistema di riferimento introdotto nel punto precedente. In tale sistema di riferimento il sistema di forze applicate $\{P_i, F_i\}_{i=1,6}$ è descritto da:

$$\begin{aligned} P_1 - O =& -(\sqrt{2}/2)\ell \mathbf{e}_1 - (\sqrt{2}/2)\ell \mathbf{e}_2, & \mathbf{F}_1 &= -F\mathbf{e}_1, \\ P_2 - O =& -\sqrt{2}\ell \mathbf{e}_1, & \mathbf{F}_2 &= F\mathbf{e}_2, \\ P_3 - O =& -(\sqrt{2}/2)\ell \mathbf{e}_1 + (\sqrt{2}/2)\ell \mathbf{e}_2, & \mathbf{F}_3 &= -\mathbf{F}_1, \\ P_4 - O =& -(P_1 - O), & \mathbf{F}_4 &= \mathbf{F}_1, \\ P_5 - O =& -(P_2 - O), & \mathbf{F}_5 &= \mathbf{F}_2, \\ P_6 - O =& -(P_3 - O), & \mathbf{F}_6 &= -\mathbf{F}_1, \end{aligned}$$

Essendo un sistema di vettori applicati piano, sappiamo che il trinomio invariante è nullo, inoltre la risultante

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{F}_i = 2\mathbf{F}_2 = 2F\mathbf{e}_2$$

è non nulla, perciò il sistema è equivalente ad un altro sistema composto da un'unica forza applicata ad un punto dell'asse centrale. Siccome

$$\mathbf{N}_O = \sum_{i=1}^{6} (P_i - O) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

vale che O, cioè il baricentro della lamina $\mathcal{C}$, appartiene all'asse centrale, il quale corrisponde all'asse Oy (essendo parallelo a $\mathbf{R}$). Il punto O è l'unico punto della lamina appartenente a tale asse, perciò il sistema iniziale di forze applicate si può ridurre al sistema $\mathcal{S}' = \{O, 2F\mathbf{e}_2\}$. Per equilibrarlo, devo prendere $\mathbf{G} = -2F\mathbf{e}_2$ e il suo punto di applicazione deve essere necessariamente $A = O$.