

Compito di Meccanica Razionale
Corso di Laurea in Matematica
19 Giugno 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

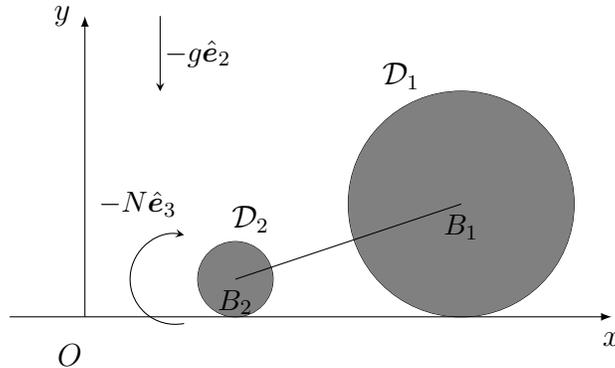
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = -\frac{3}{\rho^5} + \frac{\alpha}{\rho^6}, \quad \alpha \neq 0$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c e α .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c e α .
- iii) Siano $c = \sqrt{2}$ e $\alpha = 1$. Consideriamo il caso in cui $\rho(0) = 1/2$, calcolare tutti i possibili valori di $\dot{\rho}(0)$ per cui un'orbita con tali condizioni iniziali sia limitata.

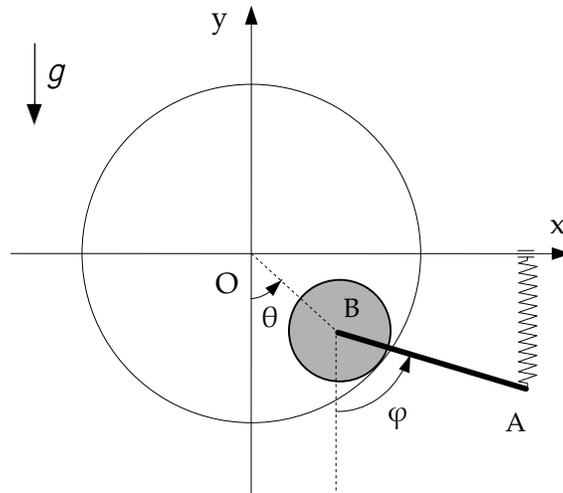
Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il moto di un sistema meccanico composto da due dischi omogenei $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, aventi rispettivamente massa M, m e raggio R, r , che rotolano senza strisciare sull'asse Ox . I baricentri B_1, B_2 dei dischi sono collegati da un'asta di massa trascurabile e lunghezza $\ell > R + r$, vedi figura.



Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g e rivolta verso il basso. Inoltre, sul disco \mathcal{D}_2 agisce una coppia di forze di momento $-N\hat{e}_3$, con $N > 0$ ed $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$, dove \hat{e}_1, \hat{e}_2 sono i versori degli assi Ox, Oy . Sia s l'ascissa del baricentro B_2 . Usando le equazioni cardinali della dinamica risolvere i problemi seguenti:

- i) trovare la legge oraria del moto del baricentro del sistema;
- ii) calcolare il valore di N per cui la componente verticale $\Phi_{1,y}$ della reazione vincolare sviluppata dall'asse Ox sul disco \mathcal{D}_1 si annulla.

Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di lunghezza ℓ e massa m , e da un disco omogeneo di raggio r e massa M . Il disco rotola senza strisciare all'interno di una guida circolare centrata nell'origine e di raggio $R > r$, mentre un estremo dell'asta è incernierato al baricentro B del disco. Il sistema è soggetto alla forza di gravità di accelerazione $g > 0$, diretta verso il basso. Inoltre l'estremo libero A dell'asta è collegato all'asse Ox da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, la quale si mantiene sempre verticale.



Usando come coordinate lagrangiane l'angolo θ che OB forma con la direzione verticale e l'angolo φ che l'asta BA forma con la direzione verticale (si veda la figura):

- i) scrivere la lagrangiana del sistema;
- ii) supponendo $M = m$ ed $R - r = \ell$, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;
- iii) studiare la stabilità delle configurazioni trovate al variare del parametro

$$J = \frac{mg}{k\ell}$$

Esercizio 1.

- i) Dalle ipotesi abbiamo che $\alpha \neq 0$, $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\dot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow \frac{c^2\rho^3 - 3\rho + \alpha}{\rho^6} = 0 \rightarrow c^2\rho^3 - 3\rho + \alpha = 0$$

Il problema si è ridotto a contare il numero di radici positive del polinomio $P(\rho) = c^2\rho^3 - 3\rho + \alpha$, cioè quante volte il grafico di $P(\rho)$ attraversa il semiasse positivo delle ascisse.

- Nel caso $\alpha < 0$, ho $P(0) = \alpha < 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} P(\rho) = +\infty$. Siccome $P(\rho)$ ha un unico cambio di segno, per la regola di Cartesio il polinomio ha al massimo una radice positiva. Ma dati i valori agli estremi del dominio, per continuità $P(\rho)$ deve averne almeno una, quindi in questo caso esiste un'unica orbita circolare.

- Nel caso $\alpha > 0$, ho $P(0) = \alpha > 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} P(\rho) = +\infty$. Siccome $P(\rho)$ ha due cambi di segno, per la regola di Cartesio il polinomio ha al massimo due radici positive. Per capire quante effettivamente ne ha, studio la funzione $P(\rho)$: essa ha un unico punto stazionario che deve necessariamente essere un minimo

$$P'(\rho) = 3c^2\rho^2 - 3 = 0 \rightarrow \bar{\rho} = \frac{1}{|c|}$$

Nel caso $P(\bar{\rho}) > 0$ allora il grafico del polinomio non interseca mai il semiasse positivo delle ascisse, mentre nel caso $P(\bar{\rho}) < 0$ lo interseca due volte.

$$P(\bar{\rho}) = \frac{1}{|c|} - \frac{3}{|c|} + \alpha > 0 \rightarrow |c| > \frac{2}{\alpha}$$

Quindi per $\alpha > 0$ abbiamo che se $|c| > 2/\alpha$ non ci sono orbite circolari, se $|c| = 2/\alpha$ esiste un'unica orbita circolare, se $|c| < 2/\alpha$ esistono due orbite circolari distinte.

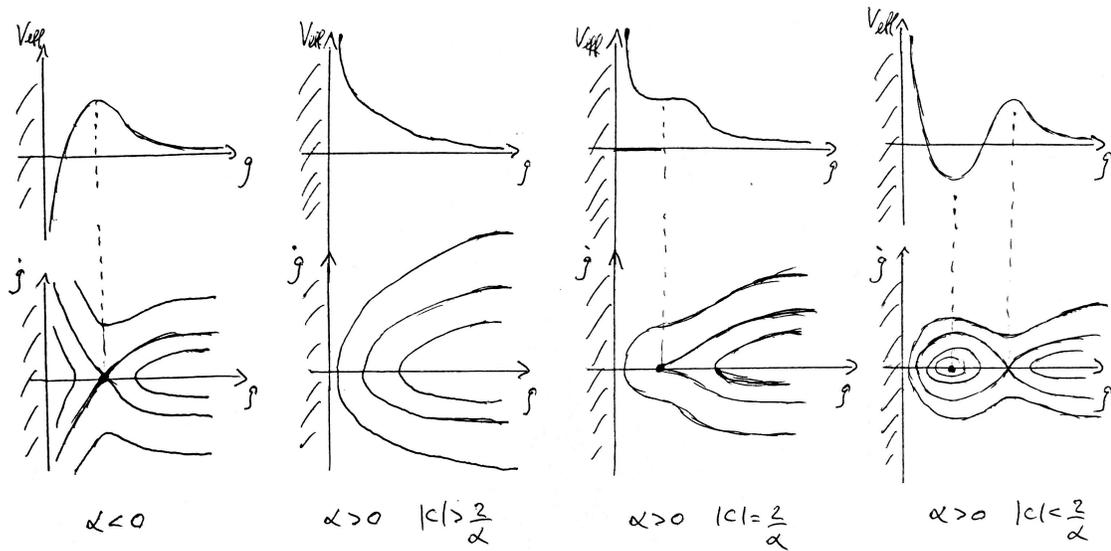
- ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \frac{c^2}{2\rho^2} - \frac{3}{4\rho^4} + \frac{\alpha}{5\rho^5}$$

Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}} = 0^+, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}} = \text{sgn}(\alpha)\infty$$

Tenendo conto che le orbite circolari trovate nel punto precedente corrispondono a punti stazionari di V_{eff} , abbiamo che i ritratti di fase sono:



iii) Poichè per $\alpha = 1$ e $c = \sqrt{2}$ abbiamo sia $\alpha > 0$ e $|c| < 2/\alpha$, sappiamo che esistono due orbite circolari, una con raggio maggiore e una minore di $\bar{\rho} = 1/|c| = \sqrt{2}/2$. Dal ritratto di fase disegnato nel punto ii) (ultimo grafico a destra), osserviamo che le uniche orbite limitate sono quelle racchiuse dalla separatrice, il cui livello di energia è uguale a quello del punto di equilibrio $(\rho_{\max}, 0)$, dove ρ_{\max} è il punto di massimo relativo di V_{eff} . Come visto nel punto i) tale punto di massimo è la soluzione dell'equazione $2\rho^3 - 3\rho + 1 = 0$ (abbiamo sostituito c e α) che sta a destra di $\bar{\rho} = \sqrt{2}/2$. Poichè 1 è chiaramente soluzione dell'equazione ed è anche maggiore di $\sqrt{2}/2$, abbiamo che $\rho_{\max} = 1$ e il livello di energia del punto di equilibrio è:

$$\tilde{E} = E(\rho_{\max}, 0) = V_{\text{eff}}(1) = \frac{9}{20}$$

Poichè $\rho(0) = 1/2$ e $V_{\text{eff}}(1/2) = -8/5$, per avere un'orbita limitata deve valere

$$\frac{1}{2}\dot{\rho}(0)^2 + V_{\text{eff}}(1/2) \leq \tilde{E} \rightarrow |\dot{\rho}(0)| \leq \sqrt{\frac{41}{10}}$$

Esercizio 2.

i) Le coordinate dei baricentri B_1, B_2 e dei due punti di contatto P_1, P_2 sono

$$\begin{aligned} (P_2 - O) &= s\mathbf{e}_1, & (B_2 - O) &= s\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_2 \\ (P_1 - O) &= (s + \ell \cos \alpha)\mathbf{e}_1, & (B_1 - O) &= (s + \ell \cos \alpha)\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

dove α è l'inclinazione costante dell'asta, definita da $\sin \alpha = (R - r)/\ell$.

Abbiamo reazioni vincolari in P_1, P_2, B_1 e B_2 . Le ultime due non contribuiscono alle equazioni cardinali quando consideriamo l'intero sistema formato dai due

dischi e dell'asta. Le reazioni vincolari in P_1 e P_2 possono essere espresse come:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{1,x}\mathbf{e}_1 + \Phi_{1,y}\mathbf{e}_2 \\ \Phi_2 &= \Phi_{2,x}\mathbf{e}_1 + \Phi_{2,y}\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Poichè la posizione del baricentro G del sistema nel tempo dipende solo dalla variabile s

$$(G - O) = \left(s + \frac{M}{m + M} \ell \cos \alpha \right) \mathbf{e}_1 + \frac{mr + MR}{m + M} \mathbf{e}_2$$

il nostro obiettivo è trovare la funzione $s(t)$.

- Iniziamo scrivendo la prima equazione cardinale per l'intero sistema:

$$M\mathbf{a}_{B_1} + m\mathbf{a}_{B_2} = -(M + m)g\mathbf{e}_2 + \Phi_1 + \Phi_2$$

Proiettando lungo \mathbf{e}_1 otteniamo

$$(M + m)\ddot{s} = \Phi_{1,x} + \Phi_{2,x}$$

- Ora scriviamo la seconda equazione cardinale con polo B_1 per il solo disco \mathcal{D}_1 (in questo modo il contributo della reazione vincolare in B_1 è nullo):

$$\dot{\mathbf{M}}_{B_1}^{\mathcal{D}_1} = \cancel{-\mathbf{v}_{B_1} \times M\mathbf{v}_{B_1}} + \mathbf{N}_{B_1}^{\mathcal{D}_1}$$

Calcolo i vari elementi dell'equazione cardinale:

$$\mathbf{M}_{B_1}^{\mathcal{D}_1} = \cancel{M(B_1 - B_1) \times v_{B_1}} + I_{B_1}\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}_1} = -(1/2)MRs\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{B_1}^{\mathcal{D}_1} = -(1/2)MR\dot{s}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{N}_{B_1}^{\mathcal{D}_1} = \cancel{(B_1 - B_1) \times (-Mg\mathbf{e}_2)} + (P_1 - B_1) \times (\Phi_{1,x}\mathbf{e}_1 + \Phi_{1,y}\mathbf{e}_2) = R\Phi_{1,x}\mathbf{e}_3$$

- In maniera analoga, scriviamo la seconda equazione cardinale con polo B_2 per il solo disco \mathcal{D}_2 (in questo modo il contributo della reazione vincolare in B_2 è nullo):

$$\dot{\mathbf{M}}_{B_2}^{\mathcal{D}_2} = \cancel{-\mathbf{v}_{B_2} \times m\mathbf{v}_{B_2}} + \mathbf{N}_{B_2}^{\mathcal{D}_2}$$

Calcolo i vari elementi dell'equazione cardinale:

$$\mathbf{M}_{B_2}^{\mathcal{D}_2} = \cancel{m(B_2 - B_2) \times v_{B_2}} + I_{B_2}\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}_2} = -(1/2)Mr\dot{s}\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{B_2}^{\mathcal{D}_2} = -(1/2)Mr\ddot{s}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{N}_{B_2}^{\mathcal{D}_2} = \cancel{(B_2 - B_2) \times (-mg\mathbf{e}_2)} + (P_2 - B_2) \times (\Phi_{2,x}\mathbf{e}_1 + \Phi_{2,y}\mathbf{e}_2) - N\mathbf{e}_3 = (r\Phi_{2,x} - N)\mathbf{e}_3$$

Siamo quindi arrivati al sistema

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{s} = \Phi_{1,x} + \Phi_{2,x} \\ -(1/2)M\ddot{s} = \Phi_{1,x} \\ -(1/2)m\ddot{s} = \Phi_{2,x} - N/r \end{cases}$$

da cui otteniamo l'equazione di moto

$$(3/2)(M + m)\ddot{s} = N/r$$

la quale una volta integrata ci dà la legge oraria

$$s(t) = \frac{N}{3(M + m)r}t^2 + \dot{s}(0)t + s(0)$$

- ii) Per trovare una relazione tra N e $\Phi_{1,y}$, scrivo la seconda equazione cardinale con polo P_2 per tutto il sistema (il contributo della reazione vincolare in P_2 è nullo):

$$\dot{\mathbf{M}}_{P_2}^{\text{tot}} = \cancel{-\mathbf{v}_{P_2} \times (M\mathbf{v}_{B_1} + m\mathbf{v}_{B_2})} + \mathbf{N}_{P_2}^{\text{tot}}$$

da cui il primo termine del membro di destra è nullo perchè tutte le velocità sono parallele. Calcolo i vari elementi dell'equazione cardinale (sfruttando il fatto che ho già calcolato alcuni momenti angolari in poli diversi):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{P_2}^{\text{tot}} &= \mathbf{M}_{P_2}^{\mathcal{D}_1} + \mathbf{M}_{P_2}^{\mathcal{D}_2} = (\mathbf{M}_{B_1}^{\mathcal{D}_1} + M(B_1 - P_2) \times \mathbf{v}_{B_1}) + (\mathbf{M}_{B_2}^{\mathcal{D}_2} + m(B_2 - P_2) \times \mathbf{v}_{B_2}) = \\ &= (-(1/2)MR\dot{s} - MR\dot{s} - (1/2)mR\dot{s} - mR\dot{s})\mathbf{e}_3 = -(3/2)(MR + mr)\dot{s}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{P_2}^{\text{tot}} = -(3/2)(MR + mr)\ddot{s}\mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{P_2}^{\text{tot}} &= (B_1 - P_2) \times (-Mg\mathbf{e}_2) + \cancel{(B_2 - P_2) \times (-mg\mathbf{e}_2)} + (P_1 - P_2) \times (\Phi_{1,x}\mathbf{e}_1 + \Phi_{1,y}\mathbf{e}_2) - N\mathbf{e}_3 = \\ &= ((-Mg + \Phi_{1,y})\ell \cos \alpha - N)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Proiettando lungo \mathbf{e}_3 e sostituendo \ddot{s} ottengo l'equazione

$$N - \frac{(MR + mr)}{(M + m)r}N = (-Mg + \Phi_{1,y})\ell \cos \alpha$$

Quindi per annullare $\Phi_{1,y}$ deve valere

$$N = \frac{r}{(R - r)}(M + m)g\ell \cos \alpha$$

Esercizio 3.

- i) Indichiamo con D il baricentro dell'asta, P il punto di contatto del disco con la guida e C l'estremo della molla che scorre sull'asse Ox . Le coordinate dei punti sono:

$$\begin{aligned} (P - O) &= R \sin \theta \mathbf{e}_1 - R \cos \theta \mathbf{e}_2, & (B - O) &= (R - r) \sin \theta \mathbf{e}_1 - (R - r) \cos \theta \mathbf{e}_2 \\ (A - O) &= (B - O) + \ell \sin \varphi \mathbf{e}_1 - \ell \cos \varphi \mathbf{e}_2, & (C - O) &= ((R - r) \sin \theta + \ell \sin \varphi) \mathbf{e}_1 \\ (D - O) &= (B - O) + (\ell/2) \sin \varphi \mathbf{e}_1 - (\ell/2) \cos \varphi \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Le velocità dei baricentri sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= (R-r)\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_B + (\ell/2)\dot{\varphi}(\cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2)\end{aligned}$$

La velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\omega}^A = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3$, in quanto un riferimento solidale all'asta è ruotato di un angolo φ rispetto ad Oxy . Per il disco applichiamo la formula fondamentale della cinematica rigida, sapendo che per ipotesi $\mathbf{v}_P^{(D)} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P^{(D)} + \boldsymbol{\omega}^D \times (B-P) = -\boldsymbol{\omega}^D r(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2) \rightarrow \boldsymbol{\omega}^D = -\frac{R-r}{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

Calcolo l'energia cinetica del sistema con il teorema di Konig:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \mathcal{T}^A + \mathcal{T}^D = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^D \cdot I_B^D \boldsymbol{\omega}^D + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_D|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^A \cdot I_D^A \boldsymbol{\omega}^A = \\ &= \frac{1}{2}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left((R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + (R-r)\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right) + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M+m\right)(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\end{aligned}$$

dove ho usato che $I_{33,B}^D = (1/2)Mr^2$ e $I_{33,D}^A = (1/12)m\ell^2$.

Calcolo l'energia potenziale del sistema (gravitazionale più elastica):

$$\mathcal{V} = -Mg(R-r)\cos\theta - mg((R-r)\cos\theta + (\ell/2)\cos\varphi) + \frac{1}{2}k((R-r)\cos\theta + \ell\cos\varphi)^2$$

La Lagrangiana del sistema si ricava da $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$.

ii) Con le ipotesi fatte, l'energia potenziale diventa

$$\mathcal{V} = -2mg\ell\cos\theta - mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}k\ell^2(\cos\theta + \cos\varphi)^2$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di \mathcal{V} rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} = 2mg\ell\sin\theta - k\ell^2(\cos\theta + \cos\varphi)\sin\theta = k\ell^2\sin\theta(2J - (\cos\theta + \cos\varphi)) = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\varphi} = mg(\ell/2)\sin\varphi - k\ell^2(\cos\theta + \cos\varphi)\sin\varphi = k\ell^2\sin\varphi(J/2 - (\cos\theta + \cos\varphi)) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo che

$$(I) \sin\theta = 0 \quad \text{oppure} \quad (II) \cos\theta + \cos\varphi = 2J$$

dalla seconda equazione otteniamo che

$$(a) \sin\varphi = 0 \quad \text{oppure} \quad (b) \cos\theta + \cos\varphi = J/2$$

- Nel caso (I) + (a) otteniamo le seguenti configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \varphi) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$$

- Nel caso (I) + (b) (in cui $\cos \theta = \pm 1$) otteniamo

$$\cos \varphi = J/2 \pm 1$$

siccome il caso +1 non ha soluzione troviamo solo le configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \varphi) = (0, \pm \varphi^*) = (0, \pm \arccos(J/2 - 1)), \quad \text{che esistono per } 0 < J < 4$$

- Nel caso (II) + (a) (in cui $\cos \varphi = \pm 1$) otteniamo

$$\cos \theta = 2J \pm 1$$

siccome il caso +1 non ha soluzione troviamo solo le configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \varphi) = (\pm \theta^*, 0) = (\pm \arccos(2J - 1), 0), \quad \text{che esistono per } 0 < J < 1$$

- Il caso (II) + (b) non è possibile.

Quindi al variare di J abbiamo al massimo 8 configurazioni di equilibrio.

iii) Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di \mathcal{V} valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial(\theta, \varphi)^2} = k\ell^2 \begin{bmatrix} \cos \theta(2J - (\cos \theta + \cos \varphi)) + \sin^2 \theta & \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi(J/2 - (\cos \theta + \cos \varphi)) + \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

Valuto \mathcal{V}'' nelle 8 configurazioni di equilibrio. Siccome per ogni punto $\sin \theta = 0$ oppure $\sin \varphi = 0$, la matrice valutata sarà sempre diagonale, quindi avremo già in evidenza entrambi gli autovalori.

$$\mathcal{V}''(0, 0) = k\ell^2 \begin{bmatrix} (2J - 2) & 0 \\ 0 & (J/2 - 2) \end{bmatrix}$$

se $J > 4$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0, 0)$ stabile per teorema di Lagrange-Dirichlet;

se $J < 4$: $\lambda_2 < 0 \implies (0, 0)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(0, \pi) = k\ell^2 \begin{bmatrix} 2J & 0 \\ 0 & -J/2 \end{bmatrix}$$

per ogni $J > 0$: $\lambda_2 < 0 \implies (0, \pi)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(\pi, 0) = k\ell^2 \begin{bmatrix} -2J & 0 \\ 0 & J/2 \end{bmatrix}$$

per ogni $J > 0$: $\lambda_1 < 0 \implies (\pi, 0)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(\pi, \pi) = k\ell^2 \begin{bmatrix} -2J - 2 & 0 \\ 0 & -J/2 - 2 \end{bmatrix}$$

per ogni $J > 0$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (\pi, \pi)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(0, \pm\varphi^*) = \mathcal{V}''(0, \pm \arccos(J/2 - 1)) = k\ell^2 \begin{bmatrix} (3/2)J & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi^* \end{bmatrix}$$

per ogni $0 < J < 4$ (cioè quando queste configurazioni esistono): $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0, \pm \arccos(J/2 - 1))$ stabili per teorema di Lagrange-Dirichlet.

$$\mathcal{V}''(\pm\theta^*, 0) = \mathcal{V}''(\pm \arccos(2J - 1), 0) = k\ell^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \theta^* & 0 \\ 0 & -(3/2)J \end{bmatrix}$$

per ogni $0 < J < 1$ (cioè quando queste configurazioni esistono): $\lambda_2 < 0 \implies (\pm \arccos(2J - 1), 0)$ instabili perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.