

Quinto compito di Meccanica Razionale - con soluzioni

20 Febbraio 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$
$$f(\rho) = \frac{\rho + \alpha}{\rho^2}, \quad \alpha \neq 0$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

- i) Trovare, al variare di α e c , i valori di ρ per cui esistono orbite circolari.
- ii) Tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α e c .
- iii) Sia $\alpha = -3$, sul piano del moto si prendano

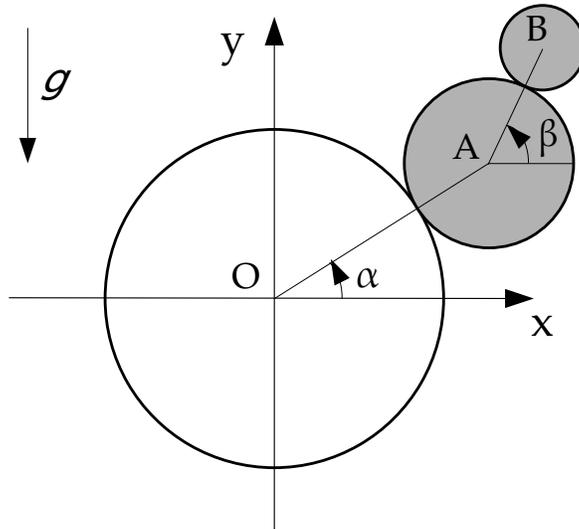
$$\mathbf{x}(0) = 2\hat{\mathbf{e}}_\rho(0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = a\hat{\mathbf{e}}_\rho(0) + b\hat{\mathbf{e}}_\theta(0), \quad a, b \in \mathbb{R};$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ è il versore radiale, mentre $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ è il versore relativo alla coordinata polare θ . Trovare tutti i valori di a e b affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Il disco \mathcal{D}_1 di massa M e raggio $R/2$ rotola senza strisciare su una guida circolare centrata in O e di raggio R . Inoltre, un altro disco \mathcal{D}_2 di massa m e raggio $R/4$ rotola senza strisciare sul disco \mathcal{D}_1 . Sul sistema agisce la forza di gravità di intensità $g > 0$ e rivolta verso il basso.

Si usino come coordinate l'angolo α che la direzione OA forma con la direzione orizzontale e l'angolo β che la direzione AB forma con la direzione orizzontale (si veda la figura).

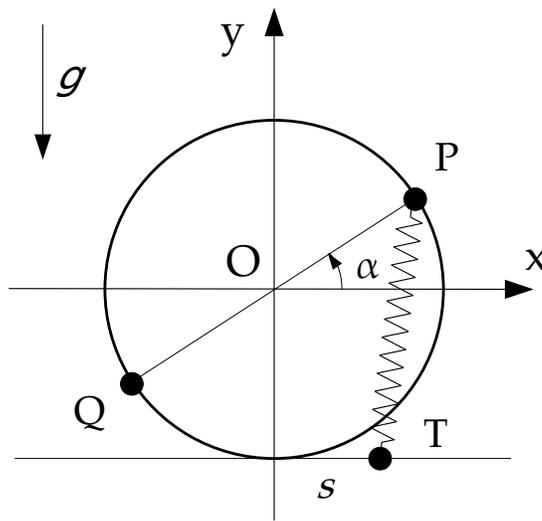
- i) Calcolare le velocità angolari di \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 .
- ii) Calcolare la seconda equazione cardinale per il solo disco \mathcal{D}_2 prendendo come polo il punto di contatto tra i due dischi.



Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Due punti materiali P e Q , di massa rispettivamente m e $3m$, sono vincolati a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio R , e sono posti agli estremi di un'asta priva di massa di lunghezza uguale a $2R$. Inoltre, un altro punto materiale T di massa m è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $y = -R$. Sul sistema agisce la forza di gravità di intensità $g > 0$ e rivolta verso il basso, e i punti P e T sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto T e l'angolo che la direzione OP forma con l'asse Ox (si veda la figura).

- i) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- ii) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- iii) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio al variare del parametro $J = \frac{mg}{kR}$.



Esercizio 1.

- i) Dalle ipotesi abbiamo che $\alpha \neq 0$, $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\dot{\rho} = 0$

$$\frac{\rho + \alpha}{\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow \rho^2 + \alpha\rho + c^2 = 0$$

Se $\alpha > 0$, non ci sono cambi di segno nel polinomio, quindi per la regola di Cartesio non esistono radici reali positive. In questo caso non esistono orbite circolari. Se $\alpha < 0$, ci sono due cambi di segno nel polinomio, quindi per la regola di Cartesio esistono al massimo due radici reali positive. In questo caso abbiamo

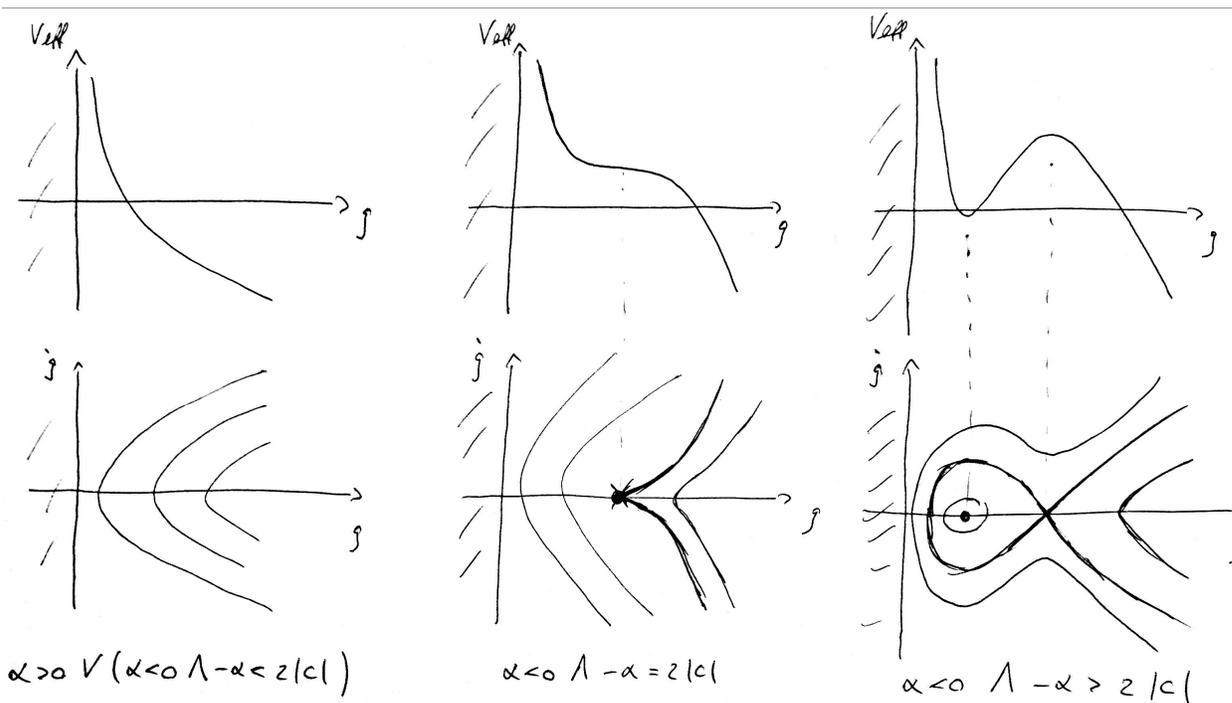
$$\rho_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4c^2}}{2}$$

che sono reali nel caso $\alpha^2 > 4c^2 \rightarrow -\alpha > 2|c|$, e in tal caso sono entrambe positive, quindi esistono due orbite circolari distinte di raggio ρ_1 e ρ_2 date dall'equazione sopra. Per $-\alpha = 2|c|$ esiste un'unica orbita circolare, per $-\alpha < 2|c|$ nessuna.

- ii) Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\log(\rho) + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{c^2}{2\rho^2}$$

Ci sono tre casi qualitativamente diversi:



iii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

valutando queste espressioni all'istante iniziale otteniamo

$$\rho(0) = 2, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = b.$$

Per avere un'orbita circolare, necessariamente deve valere $a = 0$. Inoltre, possiamo calcolare il valore della costante c dalle condizioni iniziali:

$$c = \rho^2 \dot{\theta} = \rho^2(0)\dot{\theta}(0) = 2b$$

Per $\alpha = -3$ e $c = 2b$, le soluzioni circolari trovate nel punto i) diventano:

$$\rho_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16b^2}}{2} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{3 - \sqrt{9 - 16b^2}}{2}$$

Per trovare b , impongo $\rho_1 = \rho(0) = 2$ oppure $\rho_2 = \rho(0) = 2$. La prima equazione mi dà $b = \pm\sqrt{2}/2$, mentre la seconda non ha soluzioni. Perciò per avere che la condizione iniziale data corrisponda ad un'orbita circolare $(a, b) = (0, \pm\sqrt{2}/2)$

Esercizio 2.

i) Scriviamo le posizioni dei punti che utilizzeremo (indichiamo con P il punto di contatto tra la guida e \mathcal{D}_1 , e con Q il punto di contatto tra i due dischi):

$$\begin{aligned} (P - O) &= R(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2), \\ (A - O) &= (3R/2)(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2) \\ (Q - O) &= (A - O) + (R/2)(\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2), \\ (B - O) &= (A - O) + (3R/4)(\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Per la condizione di rotolamento senza strisciamento di \mathcal{D}_1 sulla guida, vale che $\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D}_1)} = \mathbf{v}_P^{(\text{guida})} = 0$. Uso la formula fondamentale della cinematica rigida per calcolare la velocità angolare di \mathcal{D}_1 ($\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_1)} = \omega^{(\mathcal{D}_1)} \mathbf{e}_3$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_1)} \times (A - P) \\ (3R/2)\dot{\alpha}(-\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2) &= (R/2)\omega^{(\mathcal{D}_1)}(-\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2) \\ \implies \omega^{(\mathcal{D}_1)} &= 3\dot{\alpha} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Per la condizione di rotolamento senza strisciamento di \mathcal{D}_2 su \mathcal{D}_1 , vale che $\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D}_1)} = \mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D}_2)}$. Uso la formula fondamentale della cinematica rigida per calcolare $\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D}_1)}$

$$\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D}_1)} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_1)} \times (Q - A) = \mathbf{v}_A + (3R/2)\dot{\alpha}(\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2)$$

Ora uso la formula fondamentale della cinematica rigida per calcolare la velocità angolare di \mathcal{D}_2 ($\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_2)} = \omega^{(\mathcal{D}_2)} \mathbf{e}_3$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D}_2)} + \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_2)} \times (B - Q) \\ \mathbf{v}_A + (3R/4)\dot{\beta}(-\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2) &= \mathbf{v}_A + (3R/2)\dot{\alpha}(\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2) + \\ &\quad (R/4)\omega^{(\mathcal{D}_2)}(-\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2) \\ \implies \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_2)} &= (-6\dot{\alpha} + 3\dot{\beta})\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ii) L'equazione cardinale che dobbiamo esplicitare è

$$\dot{\mathbf{M}}_Q^{(\mathcal{D}_2)} = -\mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(\mathcal{D}_2)}$$

Calcolo il momento angolare di \mathcal{D}_2 rispetto al polo Q

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q^{(\mathcal{D}_2)} &= I_B^{(\mathcal{D}_2)}\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D}_2)} + (B - Q) \times m\mathbf{v}_B = \\ &\quad \frac{1}{2}m \left(\frac{R}{4}\right)^2 (-6\dot{\alpha} + 3\dot{\beta}) \mathbf{e}_3 + \frac{1}{4}R(\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2) \times \\ &\quad \times m \left(\left(-\frac{3}{2}R\dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{3}{4}R\dot{\beta} \sin \beta\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{3}{2}R\dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{3}{4}R\dot{\beta} \cos \beta\right) \mathbf{e}_2 \right) = \\ &\quad \frac{1}{32}mR^2 (-6\dot{\alpha} + 9\dot{\beta} + 12\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta)) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Calcolo la sua derivata temporale

$$\dot{\mathbf{M}}_Q^{(\mathcal{D}_2)} = \frac{1}{32}mR^2 (-6\ddot{\alpha} + 9\ddot{\beta} + 12\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + 12\dot{\alpha}(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \sin(\alpha - \beta)) \mathbf{e}_3$$

Calcolo il primo termine del membro di destra (dove \mathbf{v}_Q è la velocità del polo Q , che otteniamo facendo la derivata temporale delle sue coordinate, quindi in particolare è diversa da $\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D}_2)}$)

$$-\mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B = \frac{3}{8}mR^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)$$

Infine calcolo il momento delle forze su \mathcal{D}_2 rispetto al polo Q

$$\mathbf{N}_Q^{(\mathcal{D}_2)} = (B - Q) \times (-mg\mathbf{e}_2) = -mg(R/4) \cos \beta \mathbf{e}_3$$

L'equazione cercata é

$$\frac{1}{32}mR^2 (-6\ddot{\alpha} + 9\ddot{\beta} + 12\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - 12\dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)) = -mg(R/4) \cos \beta$$

Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni e le velocità dei punti che utilizzeremo:

$$\begin{aligned}(P - O) &= R(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2), & \mathbf{v}_P &= R\dot{\alpha}(-\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2) \\(Q - O) &= -R(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2), & \mathbf{v}_Q &= R\dot{\alpha}(\sin \alpha \mathbf{e}_1 - \cos \alpha \mathbf{e}_2) \\(T - O) &= s\mathbf{e}_1 - R\mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_T &= \dot{s}\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

Calcolo l'energia cinetica

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}|\mathbf{v}_P|^2 + \frac{3m}{2}|\mathbf{v}_Q|^2 + \frac{m}{2}|\mathbf{v}_T|^2 = 2mR^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}\dot{s}^2$$

Calcolo l'energia potenziale

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \mathcal{V}_{\text{grav}} + \mathcal{V}_{\text{elas}} = mgR \sin \alpha - 3mgR \sin \alpha - mgR + (1/2)k|P - T|^2 = \\ &= -2mgR \sin \alpha - mgR + (1/2)k(s^2 - 2sR \cos \alpha + 2R^2 + 2R^2 \sin \alpha) = \\ &= -2mgR \sin \alpha - (1/2)ks^2 - ksR \cos \alpha + kR^2 \sin \alpha \quad (\text{a meno di costanti additive})\end{aligned}$$

La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

ii) Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di \mathcal{V} rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s} = ks - kR \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \alpha} = ksR \sin \alpha + (kR^2 - 2mgR) \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ottengo $s = R \cos \alpha$, e sostituendola alla seconda:

$$\begin{aligned}kR^2 \cos \alpha \sin \alpha + (kR^2 - 2mgR) \cos \alpha &= 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha + (1 - 2J) \cos \alpha &= 0 \\ \cos \alpha = 0 \quad \text{oppure} \quad \sin \alpha &= 2J - 1\end{aligned}$$

Dalla prima ottengo le configurazioni di equilibrio $(0, \pi/2)$ e $(0, 3\pi/2)$, dalla seconda $(R \cos \alpha^*, \alpha^*)$ e $(-R \cos \alpha^*, \pi - \alpha^*)$, con $\alpha^* = \arcsin(2J - 1)$. Le ultime due configurazioni di equilibrio esistono per $0 < J < 1$.

iii) Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di \mathcal{V} valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial (s, \alpha)^2} = \begin{bmatrix} k & kR \sin \alpha \\ kR \sin \alpha & ksR \cos \alpha - kR^2(1 - 2J) \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Valuto \mathcal{V}'' nelle quattro configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{V}''(0, \pi/2) = \begin{bmatrix} k & kR \\ kR & kR^2(2J - 1) \end{bmatrix}$$

$\det = k^2 R^2 (2J - 2)$ e $\text{tr} = k + kR^2(2J - 1)$

se $J > 1$: $\det > 0$ e $\text{tr} > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0, \pi/2)$ stabile per teorema di Lagrange-Dirichlet

se $0 < J < 1$: $\det < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0, \pi/2)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$\mathcal{V}''(0, 3\pi/2) = \begin{bmatrix} k & -kR \\ -kR & -kR^2(2J - 1) \end{bmatrix}$$

$\det = -k^2 R^2 (2J)$ e $\text{tr} = k - kR^2(2J - 1)$

per ogni $J > 0$: $\det < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0, \pi/2)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$\mathcal{V}''(R \cos \alpha^*, \alpha^*) = \mathcal{V}''(-R \cos \alpha^*, \pi - \alpha^*) = \begin{bmatrix} k & kR(2J - 1) \\ kR(2J - 1) & kR^2 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo usato che $\sin \alpha^* = 2J - 1$ e $\cos^2 \alpha^* = 4J - 4J^2$

$\det = k^2 R^2 (4J - 4J^2)$ e $\text{tr} = k + kR^2$

se $0 < J < 1$ (cioè quando queste configurazioni di equilibrio esistono): $\det > 0$ e $\text{tr} > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (R \cos \alpha^*, \alpha^*)$ e $(-R \cos \alpha^*, \pi - \alpha^*)$ sono stabili per teorema di Lagrange-Dirichlet