Secondo compito di Meccanica Razionale
20 Luglio 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - 1$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c.

ii) Sul piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (1/2, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (a, b), \qquad a, b \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a e b affinchè l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

iii) Nel caso $c = 1/(2\sqrt{2})$, calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare qualitativamente il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$.

Esercizio 2. Si consideri una lamina rettangolare omogenea $ABCD$ con lati AB e BC di lunghezza rispettivamente a e b, con $a < b$. Alla lamina viene applicato un foro rettangolare di lati $a/2$ e $b/2$ centrato nel suo baricentro G e con lati paralleli rispettivamente ad AB e BC. La lamina forata, che chiamiamo $\mathcal{C}_0$, ha massa m.

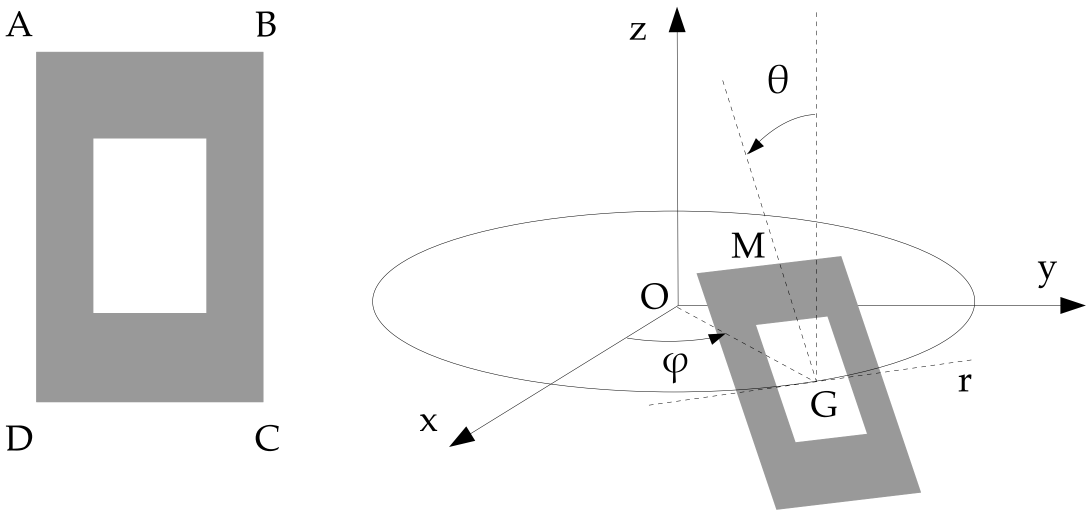
i) Calcolare i momenti principali di inerzia della lamina $\mathcal{C}_0$ rispetto al polo G.

Si fissi ora un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. La lamina $\mathcal{C}_0$ ha il baricentro G vincolato a muoversi lungo una guida circolare di raggio R che giace sul piano Oxy. La lamina può anche ruotare durante il moto, con il vincolo che la retta r passante per G e parallela al segmento AB coincida sempre con la tangente alla guida in G nel piano Oxy.

Indichiamo con M il punto medio del lato AB. Si usino come coordinate l'angolo φ che il segmento OG forma con l'asse Ox e l'angolo θ che il segmento GM forma con la direzione verticale (si veda la figura). Si chiede di

ii) calcolare la velocità angolare di $\mathcal{C}_0$;

iii) calcolare l'energia cinetica di $\mathcal{C}_0$.



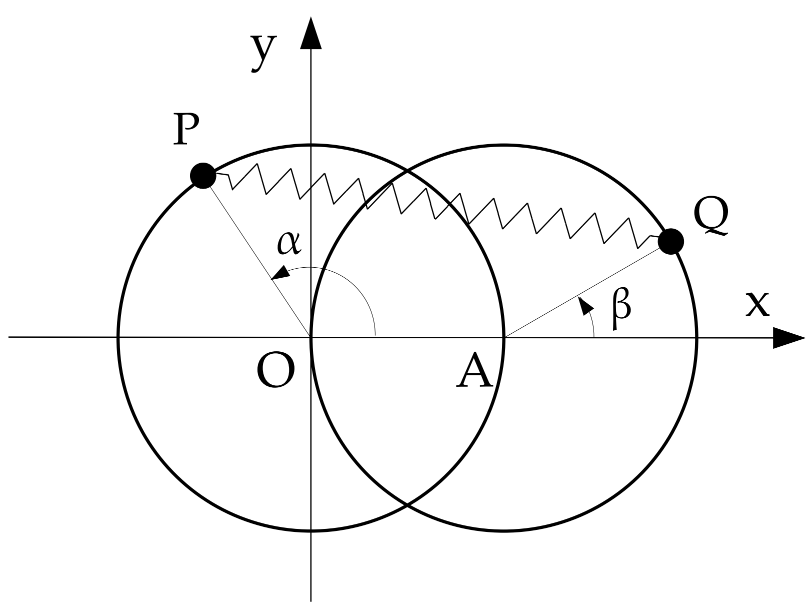
Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Consideriamo due punti materiali P e Q, entrambi di massa m e collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il punto P è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro $O = (0, 0)$ e raggio r, mentre il punto Q è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro $A = (r, 0)$ e raggio r.

Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo α che il segmento OP forma con l'asse Ox e l'angolo β che il segmento AQ forma con l'asse Ox (si veda la figura).

i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.

ii) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio.

iii) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad uno a scelta dei punti di equilibrio stabili trovati.



Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$-\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - 1 + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \quad \to \quad -\rho^3 + 2\rho^2 - \rho + c^2 = 0$$

Studiamo il polinomio $P(\rho)$ per capire quante radici reali positive possiede. Poichè $P(\rho)$ presenta tre cambi di segno, dalla regola di Cartesio sappiamo che ha al massimo tre radici positive. In più:

$$P(0) = c^2 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \to +\infty} P(\rho) = -\infty$$

Per continuità deve attraversare almeno una volta il semiasse positivo delle ascisse, quindi ha sempre almeno una radice positiva. Studiando i massimi e i minimi di $P(\rho)$, possiamo vedere se lo attraversa più di una volta. I punti stazionari sono:

$$P'(\rho) = -3\rho^2 + 4\rho - 1 = 0 \implies \rho = 1 \ \vee \ \rho = 1/3$$

Dal valore del polinomio agli estremi del dominio ricaviamo che $\rho = 1/3$ è punto di minimo, mentre $\rho = 1$ di massimo. Valutando $P(\rho)$ nei punti stazionari otteniamo

$$P(1/3) = -\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} + c^2 = c^2 - \frac{4}{27}$$
$$P(1) = -1 + 2 - 1 + c^2 = c^2 > 0$$

Se $P(1/3) < 0$, cioè $|c| < \sqrt{4/27}$, allora $P(\rho)$ attraversa tre volte il semiasse positivo delle ascisse (tre radici positive), quindi esistono tre orbite circolari distinte.
Se $P(1/3) = 0$, cioè $|c| = \sqrt{4/27}$, allora esistono due orbite circolari distinte.
Se $P(1/3) > 0$, cioè $|c| > \sqrt{4/27}$, allora esiste un'unica orbita circolare.

ii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

e che in questo caso all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{e}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{e}_2$, valutando le espressioni sopra all'istante iniziale otteniamo

$$\rho(0) = 1/2, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = b.$$

La condizione $\dot{\rho} = 0 \to a = 0$ è necessaria per avere un'orbita circolare. Inoltre, possiamo calcolare il valore di c dalle condizioni iniziali:

$$c = \rho^2\dot{\theta} = \rho^2(0)\dot{\theta}(0) = \frac{1}{2}b$$

Vogliamo trovare b affinchè con $\rho = 1/2$ e $c = (1/2)b$ si abbia $\ddot{\rho} = 0$

$$P(1/2) = 0 \quad \to \quad -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}b^2 = 0 \quad \implies \quad b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

iii) Siccome $c = 1/(2\sqrt{2})$, dai punti precedenti sappiamo che esistono tre orbite circolari ($c^2 = 1/8 < 4/27$) e che una ha $\rho = 1/2$. Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \rho - 2\log\rho - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{16\rho^2}$$

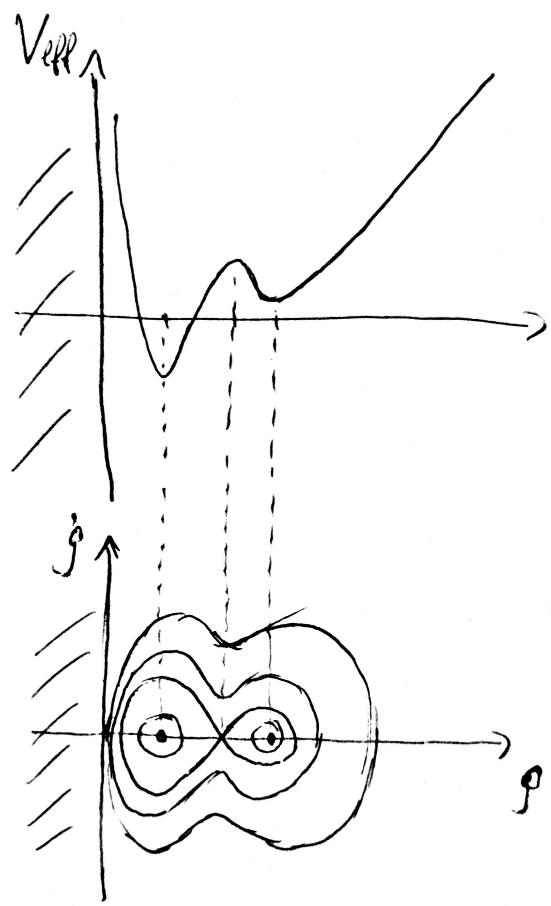
Tale funzione ha tre punti stazionari e $\lim_{\rho\to 0^+} V_{\text{eff}} = \lim_{\rho\to+\infty} V_{\text{eff}} = +\infty$. A parte $1/2$, possiamo trovare gli altri punti stazionari risolvendo l'equazione $P(\rho) = 0$

$$-\rho^3 + 2\rho^2 - \rho + \frac{1}{8} = 0 \quad \to \quad \left(-\rho + \frac{1}{2}\right)\left(\rho^2 - \frac{3}{2}\rho + \frac{1}{4}\right) = 0$$

da cui abbiamo $\rho_2 = 1/2$ e

$$\rho_1 = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5}) \quad \text{e} \quad \rho_3 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})$$

Siccome $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, ρ_2 è un punto di massimo e gli altri due di minimo. Inoltre vale che $V_{\text{eff}}(\rho_1) < V_{\text{eff}}(\rho_3)$. Il ritratto di fase richiesto è quindi



Esercizio 2.

i) Considero il sistema di riferimento riportato nella figura in fondo, con l'origine centrata nel baricentro di $\mathcal{C}_0$, l'asse i parallelo ad AB, l'asse j parallelo a BC e l'asse k perpendicolare al piano e uscente. Questo sistema di riferimento è principale. Infatti l'asse i definisce una direzione principale di inerzia, in quanto è una direzione ortogonale al piano jk, che è un piano di simmetria per riflessione per $\mathcal{C}_0$. Essendo $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$ (perchè figura piana) direzioni principali di inerzia, allora anche l'ultimo vettore della terna $\mathbf{e}_2$ la deve essere. Per calcolare i momenti di inerzia di $\mathcal{C}_0$ rispetto al baricentro, faccio la differenza tra i momenti di inerzia della lamina $ABCD$ e del foro, entrambi di forma rettangolare.

   Intanto l'area di $\mathcal{C}_0$ è uguale a $ab - (1/4)ab = (3/4)ab$, perciò la densità di $\mathcal{C}_0$ è $\sigma = 4m/(3ab)$. Calcolo i momenti principali di inerzia (usando i risultati noti sui momenti di inerzia per i rettangoli)

$$
\begin{aligned}
I_1^{\mathcal{C}_0} &= I_1^{ABCD} - I_1^{\text{foro}} = \frac{1}{12}\sigma ab^3 - \frac{1}{12}\sigma\frac{ab^3}{16} = \frac{15}{192}\sigma ab^3 = \frac{5}{48}mb^2 \\
I_2^{\mathcal{C}_0} &= I_2^{ABCD} - I_2^{\text{foro}} = \frac{1}{12}\sigma a^3 b - \frac{1}{12}\sigma\frac{a^3 b}{16} = \frac{15}{192}\sigma a^3 b = \frac{5}{48}ma^2 \\
I_3^{\mathcal{C}_0} &= I_1^{\mathcal{C}_0} + I_2^{\mathcal{C}_0} = \frac{5}{48}m(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

ii) Per calcolare la velocità angolare di $\mathcal{C}_0$ definisco un sistema solidale al corpo rigido. Partendo dal sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$, passo prima attraverso un sistema di riferimento intermedio $\Sigma' = Ox'y'z'$, ottenuto tramite la rotazione elementare R_3^{φ}. In questo modo abbiamo che $\mathbf{e}'_1 = (G-O)/|G-O|$ e $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$. Infine il sistema di riferimento solidale alla lamina $\Sigma'' = Ox''y''z''$ è ottenuto a partire da Σ' tramite una rotazione $\mathrm{R}_2^{-\theta}$ (il segno meno si evince dal fatto che nello schema nella figura in fondo la direzione $\mathbf{e}'_2$ è entrante nel piano). In questo modo abbiamo che $\mathbf{e}''_3 = (M-G)/|M-G|$ e $\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_2$. Nota bene: per visualizzare meglio il sistema di riferimento solidale, può essere utile (anche se non necessario) trasportare Σ' e Σ'' in G.

   Per costruzione, la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è $\boldsymbol{\omega}' = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3$, mentre la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ' è $\boldsymbol{\omega}'' = -\dot{\theta}\mathbf{e}'_2$.

   Perciò la velocità angolare del corpo rigido sarà la somma delle due

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 - \dot{\theta}\mathbf{e}'_2 = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 - \dot{\theta}\mathrm{R}_3^{\varphi}\mathbf{e}_2 = \dot{\theta}\sin\varphi\mathbf{e}_1 - \dot{\theta}\cos\varphi\mathbf{e}_2 + \dot{\varphi}\mathbf{e}_3$$

   scritto nelle coordinate in Σ.

iii) Per calcolare l'energia cinetica utilizzo il teorema di Konig

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot I_G^{\mathcal{C}_0}\boldsymbol{\omega}$$

La velocità del baricentro è

$$G - O = R(\cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \mathbf{e}_2) \;\rightarrow\; \mathbf{v}_G = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \mathbf{e}_1 + \cos\varphi \mathbf{e}_2)$$

Per la parte rotazionale possiamo scegliere un sistema di riferimento conveniente; infatti il valore del prodotto scalare $\boldsymbol{\omega} \cdot I_G^{\mathcal{C}_0} \boldsymbol{\omega}$ è indipendente dalla scelta della base ortonormale. Scelgo il sistema di riferimento Σ'' solidale al corpo, in modo da avere $I_G^{\mathcal{C}_0}$ costante. In Σ'' il corpo rigido sta su un piano parallelo a $Oy''z''$, con il lato più lungo parallelo a Oz''. Perciò la matrice di inerzia in questo sistema è

$$I_G^{\mathcal{C}_0} = \frac{5}{48} m \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Posso ottenere la velocità angolare in questo sistema di riferimento (indicata con il vettore $\boldsymbol{\varpi}$) tramite il cambio di base dato dalla matrice di rotazione invertita

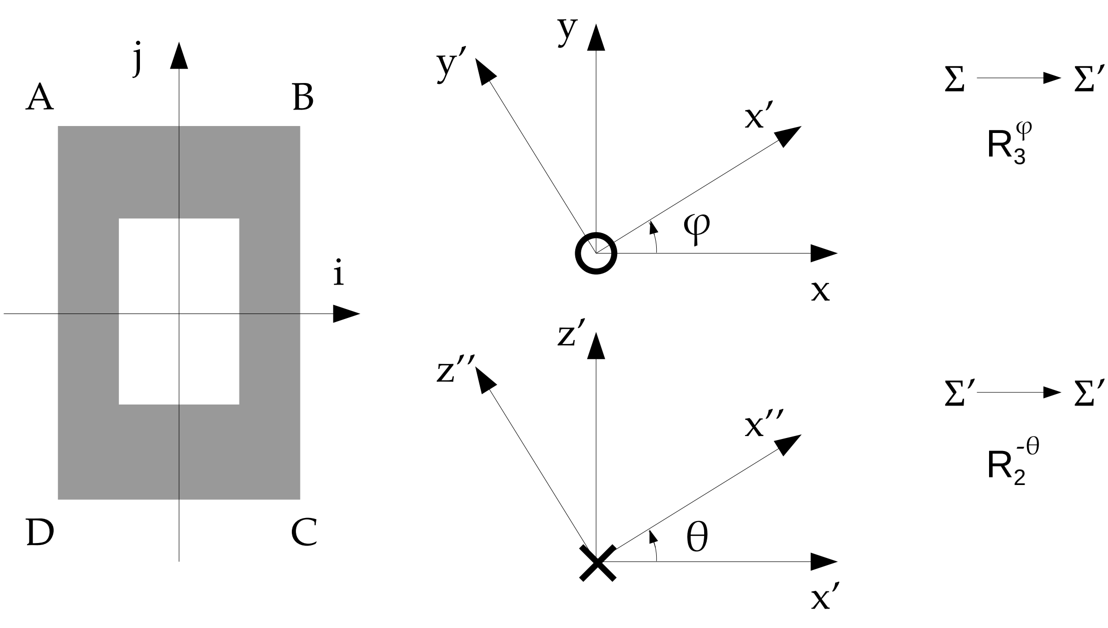
$$\boldsymbol{\varpi} = \left(\mathrm{R}_3^{\varphi} \mathrm{R}_2^{-\theta}\right)^{-1} \boldsymbol{\omega} = \mathrm{R}_2^{\theta} \mathrm{R}_3^{-\varphi} \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \sin\theta \mathbf{e}''_1 - \dot{\theta} \mathbf{e}''_2 + \dot{\varphi} \cos\theta \mathbf{e}''_3$$

Percio il contributo rotazionale all'energia cinetica è

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varpi} \cdot I_G^{\mathcal{C}_0} \boldsymbol{\varpi} = \frac{5}{96} m \left(a^2 \dot{\varphi}^2 + b^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) \right)$$

Infine l'energia cinetica totale è la somma dei due contributi

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{5}{96} m \left(a^2 \dot{\varphi}^2 + b^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) \right)$$



Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni dei due punti materiali:

$$(P-O) = r(\cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2),$$
$$(Q-O) = r((1+\cos\beta)\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2).$$

Calcolo l'energia potenziale

$$\mathcal{V}(\alpha,\beta) = \mathcal{V}_{\text{elas}} = \frac{1}{2}kr^2\left((\cos\alpha - \cos\beta - 1)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2\right) =$$
$$kr^2(-\cos\alpha + \cos\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \text{costanti additive}$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di $\mathcal{V}$ rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\alpha} = kr^2(\sin\alpha + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\beta} = kr^2(-\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) = 0 \end{cases}$$

Sommando la prima con la seconda equazione ottengo l'equazione più semplice $\sin\alpha = \sin\beta$. Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin\beta \\ \sin\alpha(1+\cos\beta - \cos\alpha) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione implica che $\beta = \alpha$ oppure $\beta = \pi - \alpha$.
- Nel caso $\beta = \alpha$, la seconda equazione diventa $\sin\alpha = 0$, da cui ottengo due configurazioni di equilibrio

$$(\alpha,\beta) = (0,0),\ (\pi,\pi)$$

- Nel caso $\beta = \pi - \alpha$, la seconda equazione diventa $\sin\alpha(1 - 2\cos\alpha) = 0$, da cui ottengo quattro configurazioni di equilibrio

$$(\alpha,\beta) = (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi/3, 2\pi/3),\ (-\pi/3, 4\pi/3)$$

ii) Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di $\mathcal{V}$ valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial(\alpha,\beta)^2} = kr^2 \begin{bmatrix} \cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta & -\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

Valuto $\mathcal{V}''$ nelle sei configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{V}''(0,0) = kr^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}''(\pi,\pi) = kr^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det = -k^2r^4 < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,0)$ e (π,π) instabili perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(0,\pi) = kr^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det = -k^2r^4 < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,\pi)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(\pi,0) = kr^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det = 3k^2r^4 > 0$ e $\mathrm{tr} = -4kr^2 < 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (\pi,0)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(\pi/3, 2\pi/3) = \mathcal{V}''(-\pi/3, 4\pi/3) = kr^2 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det = (3/4)k^2r^4 > 0$ e $\mathrm{tr} = 2kr^2 > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (\pi/3, 2\pi/3)$ e $(-\pi/3, 4\pi/3)$ stabili per teorema di Lagrange-Dirichilet (minimi di $\mathcal{V}$).

iii) L'energia cinetica del sistema è

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_Q|^2 = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$$

La matrice cinetica è quindi

$$A(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2 \end{bmatrix}$$

Per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni calcolo gli autovalori della matrice $A^{-1}\mathcal{V}''$ valutata nel punto di equilibrio stabile $(\pi/3, 2\pi/3)$

$$A^{-1}\mathcal{V}''(\pi/3, 2\pi/3) = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

I suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}\frac{k}{m}$$

E le frequenze proprie cercate sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$