

Terzo compito di Meccanica Razionale 20 Settembre 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$
$$f(\rho) = -\frac{2}{\rho^4} + \frac{\alpha}{\rho^5}, \quad \text{con } \alpha \neq 0$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

- i) Calcolare i valori di ρ per cui esistono orbite circolari al variare di α e c .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α e c .
- iii) Sia $\alpha = -3$, sul piano del moto si prendano

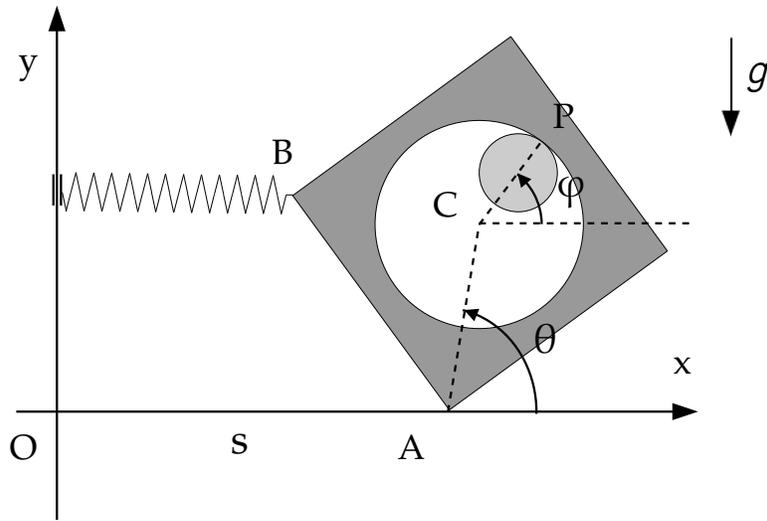
$$\mathbf{x}(0) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = a \hat{\mathbf{e}}_1 + b \hat{\mathbf{e}}_2, \quad a, b \in \mathbb{R};$$

Trovare tutti i valori di a e b affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo \mathcal{D} di massa m e raggio r , e una lamina omogenea \mathcal{Q}_0 di massa M . \mathcal{Q}_0 è un quadrato forato di lato 2ℓ , con un foro circolare di raggio R centrato nel baricentro C del quadrato (per cui $r < R < \ell$). Il disco \mathcal{D} rotola senza strisciare sul bordo interno di \mathcal{Q}_0 , mentre \mathcal{Q}_0 ha un vertice A vincolato a scorrere sull'asse Ox . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso, e il vertice B di \mathcal{Q}_0 a sinistra di A è collegato all'asse Oy da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, vincolata a rimanere orizzontale (si veda la figura).

Si usino come coordinate l'ascissa s del punto A , l'angolo θ formato da AC con la direzione orizzontale e l'angolo φ che la direzione PC forma con la direzione orizzontale, dove P è il punto di contatto tra \mathcal{D} e \mathcal{Q}_0 (si veda la figura).

- i) Calcolare, in funzione della massa M , i momenti principali di inerzia di \mathcal{Q}_0 rispetto al suo baricentro.
- ii) Calcolare la velocità angolare di \mathcal{D} .
- iii) Calcolare la seconda equazione cardinale con polo A per l'intero sistema.



Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di uguale massa m . Il punto P_1 è vincolato a scorrere sulla parabola di equazione

$$x = 1 + y^2$$

mentre il punto P_2 è vincolato a scorrere sulla retta di equazione

$$x = -1.$$

Entrambi i vincoli sono lisci. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso. Usando come coordinate lagrangiane le ordinate y_1, y_2 dei due punti,

- i) mostrare che il sistema ammette un'unica configurazione di equilibrio stabile, per ogni scelta dei parametri positivi m, g, k ;
- ii) assumendo che $\frac{mg}{k} = 3$ si calcolino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio del punto precedente.

Esercizio 1.

- i) Dalle ipotesi abbiamo che $\alpha \neq 0$, $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$-\frac{2}{\rho^4} + \frac{\alpha}{\rho^5} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow c^2 \rho^2 - 2\rho + \alpha = 0$$

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono

$$\rho = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha c^2}}{c^2},$$

ma possiamo accettare solo soluzioni reali positive.

- se $\alpha < 0$, allora la quantità sotto radice è sempre $\Delta = 1 - \alpha c^2 > 1$, quindi esiste un'unica orbita circolare con $\rho_1 = (1 + \sqrt{1 - \alpha c^2})/c^2$

- se $\alpha > 0$, allora la quantità sotto radice $\Delta = 1 - \alpha c^2$ può essere positiva o negativa.

Se $|c| > 1/\sqrt{\alpha}$, allora $\Delta < 0$ e non esistono orbite circolari.

Se $|c| = 1/\sqrt{\alpha}$, allora $\Delta = 0$ ed esiste un'unica orbita circolare $\rho_1 = 1/c^2$.

Se $|c| < 1/\sqrt{\alpha}$, allora $\Delta > 0$ ed esistono due orbite circolari distinte $\rho_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - \alpha c^2})/c^2$.

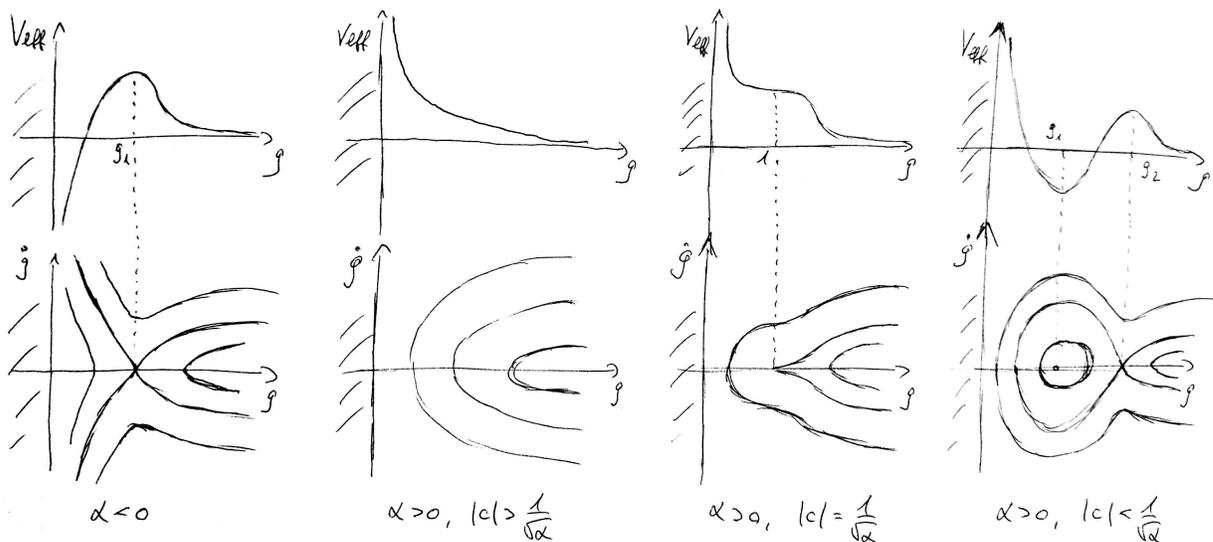
- ii) Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \frac{\alpha}{4\rho^4} - \frac{2}{3\rho^3} + \frac{c^2}{2\rho^2}$$

Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}} = \text{sgn}(\alpha)\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}} = 0^+$$

Tracciamo i quattro casi qualitativamente diversi:



iii) Dalle condizioni iniziali date posso calcolare $\rho(0)$, e i versori polari $\hat{e}_\rho(0)$ e $\hat{e}_\theta(0)$:

$$\rho(0) = |\mathbf{x}(0)| = 3, \quad \hat{e}_\rho(0) = \frac{\mathbf{x}(0)}{\rho(0)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_2, \quad \hat{e}_\theta(0) = \mathbf{e}_3 \times \hat{e}_\rho(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_2$$

Per avere un'orbita circolare, è necessario che $\dot{\rho}(0) = 0$, perciò $\dot{\mathbf{x}}(0)$ deve essere diretto lungo $\hat{e}_\theta(0)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = k\hat{e}_\theta(0) = -k\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_1 - k\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_2$$

Poichè $k = \rho(0)\dot{\theta}(0)$ (componente lungo \mathbf{e}_θ di $\dot{\mathbf{x}}(0)$), la costante del moto c vale $c = m\rho^2\dot{\theta} = 3k$.

Poichè $\alpha < 0$, dal punto i) sappiamo che esiste un'unica orbita circolare, che imponiamo avere $\rho = 3$. Sostituisco $\alpha = -3$ e $\rho = 3$ nell'equazione di secondo grado e ottengo:

$$9c^2 - 6 - 3 = 0 \rightarrow c^2 = 1 \rightarrow k = \pm\frac{1}{3}$$

Quindi i valori di a e b per avere un'orbita circolare sono:

$$(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \quad \text{oppure} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

Esercizio 2.

- i) Siccome il quadrato non forato e il foro circolare sono entrambi centrati in C , tale punto è anche il baricentro di \mathcal{Q}_0 . Sia per il quadrato e il cerchio tutte le direzioni del piano passanti per C sono principali di inerzia e quindi con lo stesso valore del momento assiale (risultato ottenuto da proposizione studiata a lezione). Lo stesso vale per la lamina \mathcal{Q}_0 , essendo $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q} - \text{foro}$. Perciò preso un qualsiasi sistema di riferimento nel piano della figura centrato in C , ed \mathbf{e}_3 perpendicolare al piano, ho che per i momenti principali di inerzia vale $I_1^{\mathcal{Q}_0} = I_2^{\mathcal{Q}_0} = I_3^{\mathcal{Q}_0}/2$. Posso calcolare tali quantità facendo la differenza dei momenti di inerzia del quadrato e del disco.

L'area di \mathcal{Q}_0 è uguale a $4\ell^2 - \pi R^2$, perciò la sua densità è $\sigma = M/(4\ell^2 - \pi R^2)$. Calcolo i momenti principali di inerzia (usando i risultati noti sui momenti di inerzia per il quadrato e il disco)

$$I_1^{\mathcal{Q}_0} = I_1^{\mathcal{Q}} - I_1^{\text{foro}} = \frac{1}{12}\sigma(2\ell)^4 - \frac{1}{4}\sigma\pi R^4 = \frac{16\ell^4 - 3\pi R^4}{12(4\ell^2 - \pi R^2)}M$$

$$I_3^{\mathcal{Q}_0} = 2I_1^{\mathcal{Q}_0} = \frac{16\ell^4 - 3\pi R^4}{6(4\ell^2 - \pi R^2)}M := \alpha M$$

- ii) Chiamiamo G il baricentro del disco \mathcal{D} . Calcolo le posizioni e velocità dei punti (scrivo anche quelle che serviranno dopo):

$$(A - O) = s\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_A = \dot{s}\mathbf{e}_1$$

$$(C - O) = (A - O) + \sqrt{2}\ell \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\ell \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A - \sqrt{2}\ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\ell \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_2,$$

$$(G - O) = (C - O) + (R - r) \cos \varphi \mathbf{e}_1 + (R - r) \sin \varphi \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_C - (R - r)\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + (R - r)\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_2,$$

$$(P - O) = (C - O) + R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2,$$

$$(B - O) = (A - O) + \sqrt{2}\ell(\cos \theta - \sin \theta)\mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\ell(\cos \theta + \sin \theta)\mathbf{e}_2$$

La velocità angolare di \mathcal{Q}_0 è semplicemente $\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{Q}_0} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$, in quanto un riferimento solidale alla lamina è ruotato di un angolo θ rispetto ad Oxy . Per il disco basta applicare due volte la formula fondamentale della cinematica rigida. La prima volta per trovare $\mathbf{v}_P^{(\mathcal{Q}_0)}$:

$$\mathbf{v}_P^{(\mathcal{Q}_0)} = \mathbf{v}_C + \dot{\theta}\mathbf{e}_3 \times (P - C) = \mathbf{v}_C - R\dot{\theta} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R\dot{\theta} \cos \varphi \mathbf{e}_2$$

La seconda per trovare $\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}}$, imponendo che $\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})} = \mathbf{v}_P^{(\mathcal{Q}_0)}$:

$$\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} \mathbf{e}_3 \times (P - G)$$

$$\mathbf{v}_C - R\dot{\theta} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R\dot{\theta} \cos \varphi \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_C - (R - r)\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + (R - r)\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} r \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} r \cos \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = \left(\frac{R}{r}\dot{\theta} - \frac{R-r}{r}\dot{\varphi} \right) \mathbf{e}_3$$

iii) Come richiesto, calcolo la seconda equazione cardinale con polo A per l'intero sistema (lamina più disco):

$$\dot{\mathbf{M}}_A^{\mathcal{Q}_0} + \dot{\mathbf{M}}_A^{\mathcal{D}} = -\mathbf{v}_A \times (M\mathbf{v}_C + m\mathbf{v}_G) + \mathbf{N}_A^{\mathcal{Q}_0} + \mathbf{N}_A^{\mathcal{D}}$$

Prima di iniziare i calcoli, noto che diversi vettori hanno un'unica componente (per esempio tutte le forze e anche \mathbf{v}_A); questo permette di velocizzare molto i calcoli dei prodotti vettoriali. Inoltre, considerando tutto il sistema, le reazioni vincolari in P non danno contributo, in quanto forze interne.

Calcolo il momento angolare e il momento delle forze relativi alla lamina:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A^{\mathcal{Q}_0} &= M(C - A) \times \mathbf{v}_A + I_A^{\mathcal{Q}_0} \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{Q}_0} = M(\ell \mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\ell \sin \theta \mathbf{e}_2) \times \dot{s} \mathbf{e}_1 + (\alpha M + 2M\ell^2) \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = \\ &= \left((\alpha M + 2M\ell^2) \dot{\theta} - \sqrt{2}M\ell \dot{s} \sin \theta \right) \mathbf{e}_3 \\ \dot{\mathbf{M}}_A^{\mathcal{Q}_0} &= \left((\alpha M + 2M\ell^2) \ddot{\theta} - \sqrt{2}M\ell \ddot{s} \sin \theta - \sqrt{2}M\ell \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta \right) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{N}_A^{\mathcal{Q}_0} &= (B - A) \times (-kx_B \mathbf{e}_1) + (C - A) \times (-Mg \mathbf{e}_2) = \\ &= \left(2k\ell^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \sqrt{2}k\ell s (\cos \theta + \sin \theta) - \sqrt{2}Mg\ell \cos \theta \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Calcolo il momento angolare e il momento delle forze relativi al disco:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A^{\mathcal{D}} &= m(G - A) \times \mathbf{v}_G + I_G^{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = \left((2m\ell^2 + (m/2)Rr) \dot{\theta} + m(R - r)(R - 3r/2) \dot{\varphi} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}m\ell(R - r)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cos(\theta - \varphi) - m\dot{s} \left(\sqrt{2}\ell \sin \theta + (R - r) \sin \varphi \right) \right) \mathbf{e}_3 \\ \dot{\mathbf{M}}_A^{\mathcal{D}} &= \left((2m\ell^2 + (m/2)Rr) \ddot{\theta} + m(R - r)(R - 3r/2) \ddot{\varphi} + \sqrt{2}m\ell(R - r)(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \cos(\theta - \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}m\ell(R - r)(\dot{\varphi}^2 - \dot{\theta}^2) \sin(\theta - \varphi) - m\ddot{s} \left(\sqrt{2}\ell \sin \theta + (R - r) \sin \varphi \right) - \sqrt{2}m\ell \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta - m(R - r) \dot{s} \dot{\varphi} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{N}_A^{\mathcal{D}} &= (G - A) \times (-mg \mathbf{e}_2) = -mg \left(\sqrt{2}\ell \cos \theta + (R - r) \cos \varphi \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Infine calcolo il primo termine del membro destro dell'equazione cardinale:

$$-\mathbf{v}_A \times (M\mathbf{v}_C + m\mathbf{v}_G) = \left(-\sqrt{2}(M + m)\ell \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta - m(R - r) \dot{s} \dot{\varphi} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_3$$

il quale si elimina con altri termini già calcolati dell'equazione. Una volta proiettato lungo \mathbf{e}_3 , ottengo quindi un'equazione del moto pura:

$$\begin{aligned} &(\alpha M + 2(M + m)\ell^2 + (m/2)Rr) \ddot{\theta} + m(R - r)(R - 3r/2) \ddot{\varphi} + \sqrt{2}m\ell(R - r)(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \cos(\theta - \varphi) + \\ &\quad \sqrt{2}m\ell(R - r)(\dot{\varphi}^2 - \dot{\theta}^2) \sin(\theta - \varphi) - \sqrt{2}(M + m)\ell \ddot{s} \sin \theta - m(R - r) \ddot{s} \sin \varphi = \\ &= 2k\ell^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \sqrt{2}k\ell s (\cos \theta + \sin \theta) - \sqrt{2}(M + m)g\ell \cos \theta - mg(R - r) \cos \varphi \end{aligned}$$

Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni e le velocità dei due punti materiali:

$$\begin{aligned}(P_1 - O) &= (1 + y_1^2)\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_1 &= 2y_1\dot{y}_1\mathbf{e}_1 + \dot{y}_1\mathbf{e}_2 \\(P_2 - O) &= -\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_2 &= \dot{y}_2\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Calcolo l'energia potenziale

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(y_1, y_2) &= \mathcal{V}_{\text{grav}} + \mathcal{V}_{\text{elas}} = mg(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}k|P_1 - P_2|^2 = \\ &= mg(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}k((y_1^2 + 2)^2 + (y_1 - y_2)^2) + \text{costanti additive}\end{aligned}$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di \mathcal{V} rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_1} = mg + 2ky_1(y_1^2 + 2) + k(y_1 - y_2) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2} = mg - k(y_1 - y_2) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo che $mg = k(y_1 - y_2)$, che sostituita alla prima dà un polinomio di terzo grado nella variabile y_1 :

$$P(y_1) = y_1^3 + 2y_1 + \frac{mg}{k} = 0$$

Non risolviamo esplicitamente questa equazione, ma come richiesto mostriamo che esiste un'unica soluzione.

Il polinomio $P(y_1)$ ha le seguenti proprietà

$$\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} P(y_1) = +\infty, \quad \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} P(y_1) = -\infty, \quad P'(y_1) = 3y_1^2 + 2 > 0 \quad \forall y_1$$

Per continuità, $P(y_1)$ attraversa l'asse delle ascisse una sola volta, perciò esiste sempre un'unica soluzione \bar{y}_1 . Dalla seconda equazione otteniamo inoltre che $\bar{y}_2 = \bar{y}_1 - mg/k$.

Per dimostrare che è stabile calcolo il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di \mathcal{V} valutata nel punto:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial (y_1, y_2)^2} = k \begin{bmatrix} 6y_1^2 + 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Anche se $y_1 = \bar{y}_1$ è un valore non esplicito, riusciamo a capire il segno degli autovalori. Infatti:

$\det = 6k^2\bar{y}_1^2 + 4k^2 > 0$ e $\text{tr} = 6k(\bar{y}_1^2 + 1) > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ è stabile per teorema di Lagrange-Dirichlet (minimo di \mathcal{V}).

ii) Nel caso $mg/k = 3$, possiamo calcolare esplicitamente la soluzione \bar{y}_1 del punto precedente:

$$P(y_1) = y_1^3 + 2y_1 + 3 = 0$$

Dall'espressione del polinomio, è evidente che $\bar{y}_1 = -1$ è soluzione. Potendo essercene solo una, è anche l'unica soluzione. La configurazione di equilibrio è quindi $(y_1, y_2) = (-1, -4)$

L'energia cinetica del sistema è

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m((4y_1^2 + 1)\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)$$

La matrice cinetica è quindi

$$A(y_1, y_2) = m \begin{bmatrix} 4y_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A(-1, -4) = m \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni calcolo gli autovalori della matrice $A^{-1}\mathcal{V}''$ valutata nella configurazione di equilibrio stabile $(-1, -4)$

$$A^{-1}\mathcal{V}''(-1, -4) = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 11/5 & -1/5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

I suoi autovalori sono dati dall'equazione

$$\lambda^2 - \frac{16}{5} \frac{k}{m} \lambda + 2 \frac{k^2}{m^2} = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{14}}{5} \frac{k}{m}$$

E le frequenze proprie cercate sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$