Compito di Meccanica Razionale
22 Giugno 2026

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\boldsymbol{x}|,$$

dove

$$f(\rho) = \frac{k}{\sqrt{\rho+1}}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Si supponga che il momento angolare rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c e k.

ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c e k.

iii) Sia $k = 1/2$ e si consideri l'orbita con condizioni iniziali

$$\boldsymbol{x}(0) = (3, 0, 0), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = (-2, a, 0)\,, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Trovare l'insieme dei valori di a per cui la distanza minima $\rho_{\min}$ dell'orbita da O sia maggiore di 1.

Esercizio 2. In un piano si introduca il sistema di riferimento Oxy e si consideri una lamina rigida omogenea $\mathcal{L}$ di densità $\sigma > 0$, rappresentata in figura, definita così:

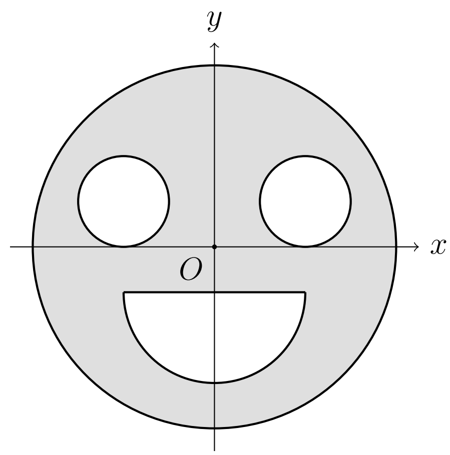
$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_0 \setminus \{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{S}\},$$

dove

$$\mathcal{D}_0 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 16r^2\}, \qquad \mathcal{D}_1 = \{(x,y) : (x-2r)^2 + (y-r)^2 \le r^2\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x,y) : (x+2r)^2 + (y-r)^2 \le r^2\}, \qquad \mathcal{S} = \{(x,y) : x^2 + (y+r)^2 \le 4r^2, y \le -r\},$$

con $r > 0$.



Determinare i momenti principali di inerzia rispetto all'origine O.

Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una parabola con equazione $x = y^2 - 3$ ad altezza $z = \frac{1}{2}$, mentre un punto materiale Q, anch'esso di massa m, è vincolato a muoversi su una curva di equazione $z = \frac{2}{x}$ con $x > 0$ ed $y = 0$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso la direzione negativa dell'asse Oz. Si usino come coordinate lagrangiane y per P e x per Q.

i) Scrivere la lagrangiana del sistema.

ii) Supponendo che $mg = \frac{k}{2}$, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.

iii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Esercizio 1.

1. Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$\frac{k}{\sqrt{\rho+1}} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad c^2\sqrt{\rho+1} = -k\rho^3$$

   Chiamiamo $g(\rho)$ la funzione a sinistra e $h(\rho)$ la funzione a destra.

   Siccome $g(\rho) > 0$ per ogni $\rho > 0$, se $k \geq 0$ allora non ci sono soluzioni positive per l'equazione, e quindi non esistono orbite circolari.

   Nel caso $k < 0$, entrambe le funzioni sono positive e possiamo elevare al quadrato il membro a destra e a sinistra dell'equazione. Otteniamo quindi

$$P(\rho) = k^2\rho^6 - c^4\rho - c^4 = 0$$

   Il polinomio presenta un solo cambio di segno tra i suoi monomi, perciò per la regola di Cartesio esiste al massimo una radice positiva. Poiché

$$P(0) = -c^2 < 0, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} P(\rho) = +\infty,$$

   per continuità deve passare da 0 e quindi l'equazione ha esattamente una soluzione positiva. Quindi per $k < 0$ esiste sempre una sola orbita circolare.

2. L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -2k\sqrt{\rho+1} + \frac{c^2}{2\rho^2}$$

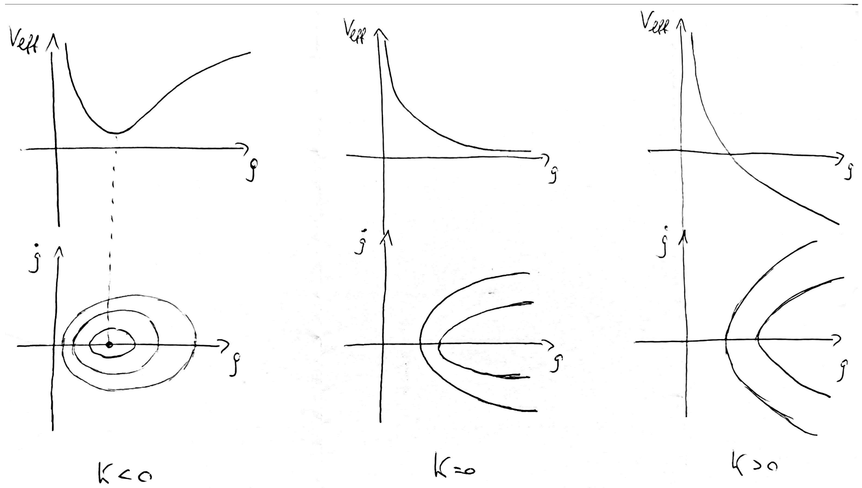
   Per $\rho \to +\infty$ il termine dominante è il primo (se $k \neq 0$), perciò

$$\lim_{\rho\to+\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\text{sgn}(k)\infty$$

   mentre per $\rho \to 0^+$ il termine dominante è il secondo, perciò

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

   Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), abbiamo i seguenti casi:



3. Poiché le condizioni iniziali sono contenute nel piano $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$, esso è il piano del moto. In tale piano ad ogni tempo vale che

$$\boldsymbol{x} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \dot\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Inoltre è facile verificare che all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho(0) = \mathbf{e}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta(0) = \mathbf{e}_2$. Valutando le espressioni sopra all'istante iniziale, otteniamo

$$\rho(0) = 3, \quad \dot\rho(0) = -2 \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot\theta(0) = a,$$

da cui ricavo che $c = \rho^2\dot\theta = 3a$. Dal ritratto di fase corrispondente segue che tutte le orbite sono illimitate e che per avere $\rho_{\min} > 1$ il valore dell'energia $E(\rho, \dot\rho)$ dell'orbita deve essere inferiore a $\overline{E} = E(1,0) = V_{\rm eff}(1) = -\sqrt{2} + 9a^2/2$.

$$E = \frac{1}{2}\dot\rho(0)^2 + V_{\rm eff}(\rho(0)) = 2 - 2 + \frac{9a^2}{18} = \frac{a^2}{2}$$
$$\implies |a| > \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$$

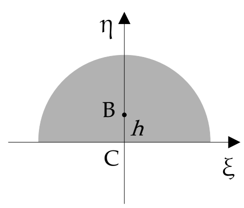
Esercizio 2.

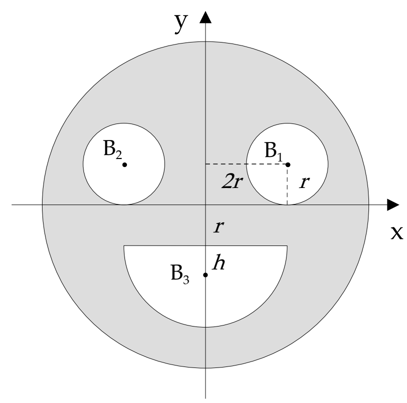
Il sistema di riferimento $Oxyz$ con Oz perpendicolare al piano della figura è principale di inerzia. Siano infatti $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ i versori ortonormali associati al sistema. Il versore $\hat{\mathbf{e}}_3$ definisce una direzione principale, perché il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$; $\hat{\mathbf{e}}_1$ è una direzione principale, perché ortogonale al piano Oyz che è di simmetria per riflessione per il corpo; $\hat{\mathbf{e}}_2$ è una direzione principale, perché l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali. I momenti principali di inerzia rispetto a O sono quindi le componenti I_{11}, I_{22} e I_{33} della matrice di inerzia, dove $I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

Per un disco di raggio R, densità σ e baricentro B, vale che $I_{B,11} = I_{B,22} = (1/4)\pi\sigma R^4$. Per un semidisco di raggio R e densità σ, chiamato C il centro del disco intero da cui è ottenuto, e considerato un sistema di riferimento $C\xi\eta$ come in figura, vale che $I_{C,11} = I_{C,22} = (1/8)\pi\sigma R^4$. Inoltre, possiamo calcolare la posizione del suo baricentro B rispetto a C in questo modo (per simmetria $\xi_B = 0$):

$$h = \eta_B = \frac{1}{m_{\mathcal{S}}}\int_{\mathcal{S}} \sigma y dx dy = \frac{1}{m_{\mathcal{S}}}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \sigma\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta = \frac{4R}{3\pi}\,,$$

dove $m_{\mathcal{S}} = (1/2)\sigma\pi R^2$.





Sfruttiamo questi risultati per calcolare i momenti di inerzia rispetto ad O di $\mathcal{L}$ per differenza:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= I_{11}^{\mathcal{D}_0} - I_{11}^{\mathcal{D}_1} - I_{11}^{\mathcal{D}_2} - I_{11}^{\mathcal{S}} \\
&= I_{11}^{\mathcal{D}_0} - \left(I_{B_1,11}^{\mathcal{D}_1} + m_{\mathcal{D}_1} r^2\right) - \left(I_{B_2,11}^{\mathcal{D}_2} + m_{\mathcal{D}_2} r^2\right) - \left(I_{C,11}^{\mathcal{S}} - m_{\mathcal{S}} h^2 + m_{\mathcal{S}}(r+h)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\pi\sigma(4r)^4 - 2\left(\frac{1}{4}\pi\sigma r^4 + \sigma\pi r^4\right) - \left(\frac{1}{8}\pi\sigma(2r)^4 - \frac{1}{2}\sigma\pi(2r)^2(r^2+2rh)\right) \\
&= \frac{115}{2}\pi\sigma r^4 - \frac{16}{3}\sigma r^4 = \left(\frac{115}{2}\pi - \frac{16}{3}\right)\sigma r^4\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema di Huygens-Steiner e sfruttato il fatto che i contributi di $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono uguali.

In maniera analoga

$$I_{22} = I_{22}^{\mathcal{D}_0} - I_{22}^{\mathcal{D}_1} - I_{22}^{\mathcal{D}_2} - I_{22}^{\mathcal{S}} = \frac{1}{4}\pi\sigma(4r)^4 - 2\left(\frac{1}{4}\pi\sigma r^4 + \sigma\pi r^2(2r)^2\right) - \frac{1}{8}\pi\sigma(2r)^4 = \frac{107}{2}\sigma\pi r^4$$

e infine

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \left(111\pi - \frac{16}{3}\right)\sigma r^4 \,.$$

Esercizio 3.

1. Le coordinate dei due punti materiali sono

$$\boldsymbol{x}_P = (y^2-3)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3\,, \qquad \boldsymbol{x}_Q = x\mathbf{e}_1 + \frac{2}{x}\mathbf{e}_3\,,$$

   mentre le loro velocità sono

$$\boldsymbol{v}_P = 2y\dot{y}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2\,, \qquad \boldsymbol{v}_Q = \dot{x}\mathbf{e}_1 - \frac{2}{x^2}\dot{x}\mathbf{e}_3\,.$$

   L'energia cinetica è la somma delle energie cinetiche dei due punti

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_P|^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_Q|^2 = \frac{1}{2}m(4y^2+1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(1+\frac{4}{x^4}\right)\dot{x}^2\,.$$

   L'energia potenziale, invece, è data dalla somma del contributo elastico e gravitazionale

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k|\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q|^2 + mg\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{x}_Q + mg\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{x}_P \\ &= \frac{1}{2}k\left[(y^2-3-x)^2 + y^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x}\right)^2\right] + \frac{2}{x}mg + \frac{1}{2}mg \\ &= \frac{1}{2}k\left[(y^2-3-x)^2 + y^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x}\right)^2\right] + \frac{2}{x}mg + \frac{1}{2}mg\,. \end{aligned}$$

   Perciò la lagrangiana del sistema è ottenuta come $L = T - V$.

2. Rimuovendo il termini costante $mg/2$ da V e imponendo $mg = \frac{k}{2}$, otteniamo

$$V = \frac{1}{2}k\left[(y^2-3-x)^2 + y^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x}\right)^2\right] + \frac{2}{x}mg = \frac{1}{2}k\left[(y^2-3-x)^2 + y^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x}\right)^2 + \frac{2}{x}\right]\,.$$

   Per trovare i punti di equilibrio, calcoliamo i punti stazionari della funzione V:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial y} = k\left[2y(y^2-3-x) + y\right] = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = k\left[-(y^2-3-x) - \dfrac{4}{x^3}\right] = 0 \end{cases}$$

   Dalla prima otteniamo

$$y(2y^2-5-2x) = 0$$

   e dunque $y = 0$ oppure $2y^2 - 5 - 2x = 0$.
   Nel caso $y = 0$, la seconda equazione diventa

$$-3 - x + \frac{4}{x^3} = 0 \iff x^4 + 3x^3 - 4 = 0$$

che ha una sola soluzione positiva $x = 1$. Il primo punto di equilibrio è dunque

$$(x, y) = (1, 0)\,.$$

Nel caso $2y^2 - 5 - 2x = 0$, la seconda equazione diventa

$$1 - \frac{8}{x^3} = 0$$

che ha una sola soluzione positiva $x = 2$. Esistono dunque altri due punti di equilibrio

$$(x, y) = \left(2, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(2, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

3. Studiamo la stabilità delle tre configurazioni di equilibrio. Calcoliamo la matrice hessiana di V:

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(x, y)} = k \begin{bmatrix} 1 + 12/x^4 & -2y \\ -2y & 6y^2 - 5 - 2x \end{bmatrix}$$

Valutiamo V''/k nelle tre configurazioni di equilibrio.

$$V''(1, 0)/k = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Siccome l'autovalore $\lambda_2 < 0$, $(1, 0)$ è instabile perché almeno un esponente di Lyapunov del sistema è positivo.

$$V''(2, \pm 3/\sqrt{2})/k = \begin{bmatrix} 7/4 & \mp 3\sqrt{2} \\ \mp 3\sqrt{2} & 18 \end{bmatrix}$$

Siccome $\det = 27/2 > 0$ e $\mathrm{tr} = 79/4 > 0$, entrambi gli autovalori sono positivi e quindi $(2, \pm 3/\sqrt{2})$ sono punti di minimo per V e sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichilet.