

Compito di Meccanica Razionale

22 Luglio 2026

Esercizio 1. Si consideri il moto unidimensionale di un punto di massa unitaria definito dall'equazione differenziale

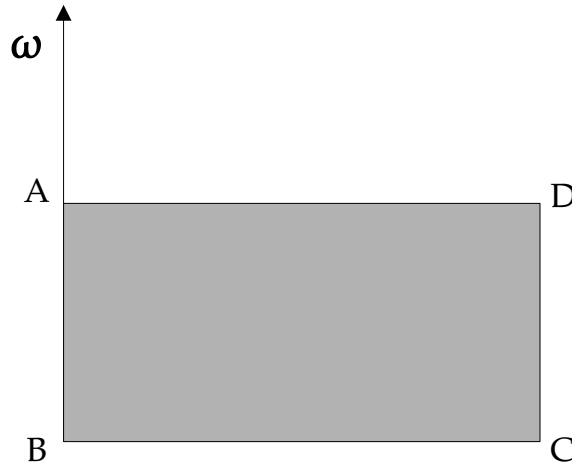
$$\ddot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

dove

$$f(x) = x^3 + ax, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Calcolare l'energia potenziale e tracciare il ritratto di fase al variare di a
2. Sia $a = -4$ e si consideri l'orbita con condizioni iniziali $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, -\sqrt{10}/2)$. Trovare i punti di inversione di tale orbita.
3. Sempre per $a = -4$, trovare l'insieme di tutte le condizioni iniziali per cui le orbite sono illimitate.

Esercizio 2. Si consideri una lamina $\mathcal{R}$ rettangolare omogenea di massa m e lati $AB = a > 0$ e $BC = 2a$. Il vertice A della lamina è fisso e la velocità angolare della lamina è un vettore costante nel tempo di modulo $\omega > 0$, con direzione parallela e verso opposto al vettore AB (si veda la figura).

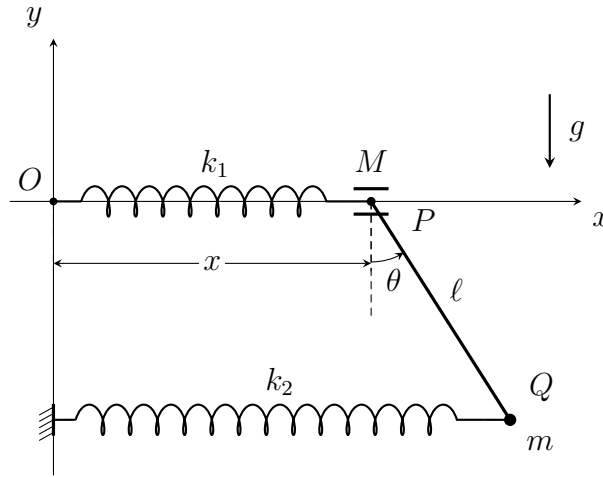


1. Calcolare le direzioni principali di inerzia e i momenti principali di inerzia di $\mathcal{R}$ rispetto al polo A .
2. Calcolare il momento rispetto al punto A delle forze attive esterne che causano il moto.

Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Un punto materiale P , di massa M , può scorrere senza attrito lungo l'asse Ox . Al punto P è incernierato un'estremità di un'asta di massa trascurabile e lunghezza ℓ , al cui estremo libero è fissato un punto materiale Q di massa m .

Il punto P è collegato all'origine O mediante una molla di costante elastica $k_1 > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il punto Q è inoltre collegato all'asse Oy mediante una seconda molla, di costante elastica $k_2 > 0$ e lunghezza a riposo nulla, che si mantiene sempre orizzontale. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g .

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa x del carrello e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale.



1. Scrivere la lagrangiana del sistema e mostrare che l'energia cinetica definisce una forma quadratica definita positiva per ogni configurazione.
2. Determinare tutte le configurazioni di equilibrio al variare del parametro adimensionale

$$\lambda = \frac{k_1 k_2 \ell}{mg(k_1 + k_2)}.$$

3. Studiare la stabilità degli equilibri trovati.
4. Si assuma

$$M = m, \quad k_1 = k_2 = \frac{4mg}{\ell},$$

cosicché $\lambda = 2$. Calcolare le frequenze proprie e i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a ciascun equilibrio stabile.

Esercizio 1.

1. L'energia potenziale è

$$V(x) = - \int f(x) dx = -\frac{x^4}{4} - a\frac{x^2}{2}$$

la quale è una funzione pari. I punti stazionari di $V(x)$ sono i punti che annullano $f(x)$

$$f(x) = 0 \implies x(x^2 + a) = 0$$

Abbiamo quindi due casi

- Se $a > 0$, esiste una sola soluzione $x = 0$.
- Se $a < 0$, esistono tre soluzioni $x = 0, \pm\sqrt{-a}$.

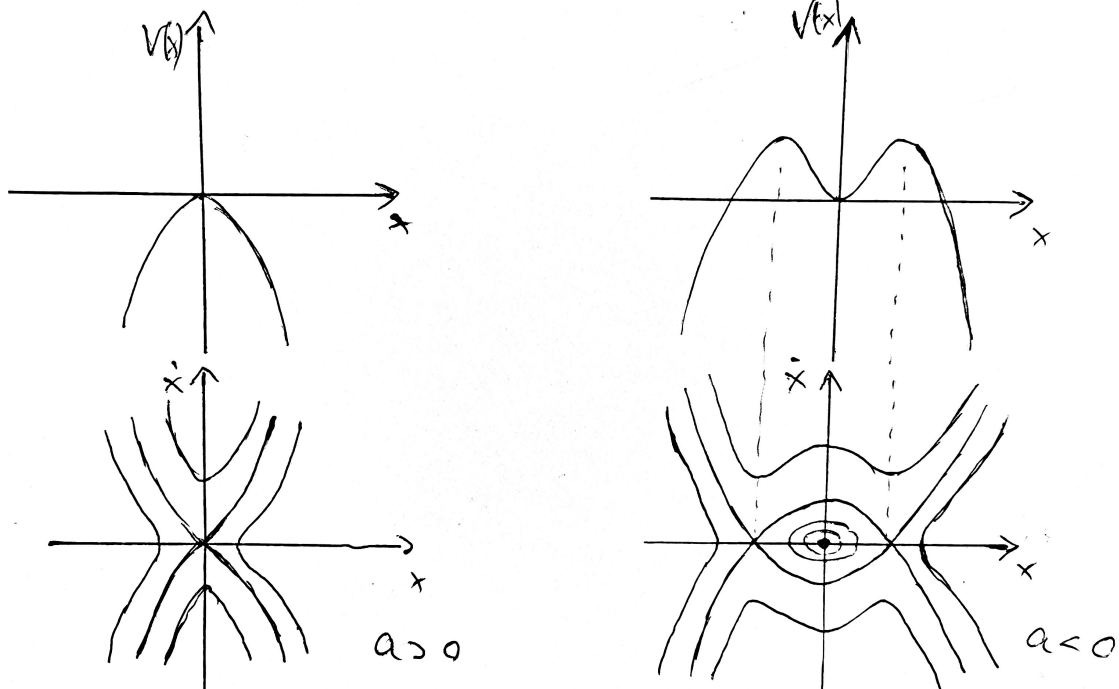
Qualsiasi sia il valore di a , i limiti di $V(x)$ agli estremi del suo dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = -\infty$$

In più vale che $V(0) = 0$ e che se $a < 0$

$$V(\pm\sqrt{-a}) = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Perciò il ritratto di fase al variare di a è il seguente



Nel caso $a > 0$ abbiamo solo il punto di equilibrio $(0,0)$ (instabile), mentre per $a < 0$ abbiamo i tre punti di equilibrio $(0,0)$ (stabile) e $(\pm\sqrt{-a}, 0)$ (instabili).

2. Nel caso $a = -4$, i punti di massimo di V sono -2 e 2 . Il livello di energia associata ai punti di equilibrio $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ è

$$\overline{E} = E(2, 0) = V(2) = 4$$

L'energia totale dell'orbita con condizioni iniziali $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, -\sqrt{10}/2)$ è

$$E_0 = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 + V(x_0) = 3$$

Siccome x_0 si trova tra -2 e 2 , e la sua energia è minore del livello critico $\overline{E}$, l'orbita nello spazio delle fasi è chiusa e limitata.

L'orbita ha quindi due punti di inversione. Possiamo calcolarli imponendo che la componente cinetica sia nulla

$$E_0 = V(x) \implies \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2} \vee x = \pm\sqrt{6}.$$

Le soluzioni sono 4, perchè sono le 4 le intersezioni di $V(x)$ con il livello di energia E_0 . Non potendo l'orbita sorpassare $x = 2$ a destra e $x = -2$ a sinistra, i suoi punti di inversione sono

$$x_{\min} = -\sqrt{2}, \quad x_{\max} = \sqrt{2}$$

3. Per trovare tutte le condizioni iniziali che danno luogo a orbite illimitate possiamo analizzare il ritratto di fase raffigurato nel punto precedente.

Notiamo che se $x_0 < -2 \vee x_0 > 2$, le orbite sono necessariamente illimitate, qualsiasi sia il valore di $\dot{x}_0$.

Nel caso $-2 \leq x_0 \leq 2$, per avere un'orbita illimitata deve valere che $E(x_0, \dot{x}_0) > \overline{E}$, in modo da rimanere fuori dall'area attorno al punto di equilibrio $(0, 0)$ racchiusa dalle separatrici. Quindi

$$\frac{1}{2}\dot{x}_0^2 + V(x_0) > \overline{E} \implies \dot{x}_0^2 > 8 + \frac{x_0^4}{2} - 4x_0^2$$

Perciò l'insieme cercato è l'unione dei due insiemi descritti sopra, cioè

$$\mathcal{I} = \left\{ (x_0, \dot{x}_0) \mid |x_0| > 2 \right\} \cup \left\{ (x_0, \dot{x}_0) \mid |x_0| \leq 2, |\dot{x}_0| > \sqrt{8 + x_0^4/2 - 4x_0^2} \right\}$$

Esercizio 2.

1. In questo caso, non ci sono simmetrie evidenti per poter identificare subito tutti gli assi principali di inerzia. Scegliamo quindi un sistema di riferimento conveniente per calcolare la matrice di inerzia rispetto ad A . Fissiamo un sistema di riferimento $Axyz$ centrato nel vertice A e con assi Ax e Ay paralleli ai lati AD e AB , rispettivamente (si veda la figura). Siano $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ i versori ortonormali associati al sistema. Il versore $\hat{e}_3$ definisce una direzione principale di inerzia, perchè la lamina è piana ed è contenuta interamente nel piano Axy . Sia ora $\sigma = m/(2a^2)$ la densità di $\mathcal{R}$, gli elementi della matrice di inerzia diversi da 0 sono:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{-a}^0 \int_0^{2a} \sigma y^2 dx dy = \frac{1}{3} ma^2 \\ I_{22} &= \int_{-a}^0 \int_0^{2a} \sigma x^2 dx dy = \frac{4}{3} ma^2 \\ I_{12} &= - \int_{-a}^0 \int_0^{2a} \sigma xy dx dy = \frac{1}{2} ma^2 = I_{21} \\ I_{33} &= I_{11} + I_{22} = \frac{5}{3} ma^2 \end{aligned}$$

Siccome $\hat{e}_3$ è una direzione principale, un momento principale è $I_3 = I_{33}$. Per trovare gli altri due, calcoliamo gli autovalori del minore 2x2 della matrice I (per fare i calcoli omettiamo il fattore ma^2 comune a tutti gli elementi della matrice).

$$\det \begin{bmatrix} 1/3 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 4/3 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + \frac{7}{36} = 0$$

le cui soluzioni (moltiplicate per ma^2) sono i momenti principali mancanti

$$I_1 = \left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) ma^2 \quad I_2 = \left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) ma^2$$

Per trovare le direzioni principali di inerzia, possiamo calcolare gli autovettori relativi ai due autovalori. In realtà basta calcolarne uno e ruotarlo di 90° per ottenere l'altro, essendo perpendicolari (formano una base ortonormale). Cerchiamo quello relativo a I_1 :

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies y = (1 + \sqrt{2})x$$

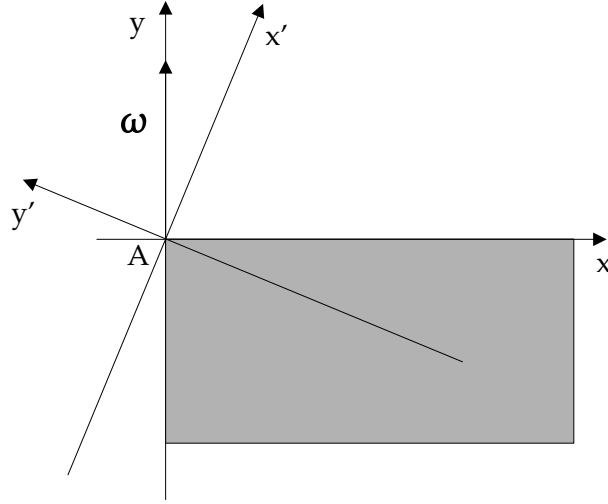
Quindi il versore relativo all'asse principale di inerzia è

$$\hat{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \hat{e}_1 + \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \hat{e}_2$$

e ruotando di 90° otteniamo

$$\hat{\mathbf{e}}'_2 = -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \hat{\mathbf{e}}_2$$

Il sistema di riferimento principale è $Ax'y'z'$ con Az' coincidente con Az e gli assi Ax' e Ay' definiti dai versori calcolati sopra. Da tali valori si può evincere che il sistema di riferimento principale è ruotato di un angolo di $67.5^\circ (= 3\pi/8)$ rispetto a $Axyz$ (in particolare, Ay' non è lungo la diagonale del rettangolo).



2. Usiamo le equazioni di Eulero per un corpo rigido con punto fisso. Nel sistema di riferimento solidale e principale $Ax'y'z'$ definito nel punto precedente vale che

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + N_3 \end{cases}$$

dove $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ è il momento delle forze cercato. La velocità angolare è:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_2 = \omega (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1) \hat{\mathbf{e}}'_1 + \omega (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2) \hat{\mathbf{e}}'_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \omega \hat{\mathbf{e}}'_1 + \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \omega \hat{\mathbf{e}}'_2$$

e $\omega_3 = 0$. Poiché $\boldsymbol{\omega}$ è costante, vale che $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$. Dalle prime due equazioni otteniamo $N_1 = N_2 = 0$. La terza equazione del sistema invece diventa:

$$0 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + N_3 \rightarrow N_3 = -\frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

Perciò $\mathbf{N} = N_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ con N_3 dato dall'espressione sopra.

Esercizio 3.

1. Le posizioni e velocità dei due punti materiali sono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_P &= x\mathbf{e}_1, & \mathbf{x}_Q &= (x + \ell \sin \theta)\mathbf{e}_1 - \ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}_P &= \dot{x}\mathbf{e}_1, & \mathbf{v}_Q &= (\dot{x} + \ell \dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{e}_1 + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

L'energia cinetica è la somma delle energie cinetiche dei due punti

$$T = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_P|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_Q|^2 = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta.$$

L'energia potenziale, invece, è data dalla somma del contributo elastico e gravitazionale

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(x + \ell \sin \theta)^2 - mg\ell \cos \theta$$

Perciò la lagrangiana del sistema è ottenuta come $L = T - V$.

L'energia cinetica è una forma quadratica in $(\dot{x}, \dot{\theta})$ con matrice cinetica

$$A = \begin{bmatrix} M + m & m\ell \cos \theta \\ m\ell \cos \theta & m\ell^2 \end{bmatrix}$$

Per qualsiasi valore di (x, θ) tale matrice è definita positiva, infatti la sua traccia è positiva e il $\det = (M + m)m\ell^2 - m^2\ell^2 \cos^2 \theta = Mm\ell^2 + m^2\ell^2(1 - \cos^2 \theta) > 0$, quindi entrambi i suoi autovalori sono positivi.

2. Per trovare i punti di equilibrio, calcoliamo i punti stazionari della funzione V :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = k_1x + k_2(x + \ell \sin \theta) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = k_2(x + \ell \sin \theta)\ell \cos \theta + mg\ell \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo $x = -k_2\ell \sin \theta / (k_1 + k_2)$ che sostituita alla seconda dà

$$\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}\ell^2 \sin \theta \cos \theta + mg\ell \sin \theta = 0 \implies mg\ell \sin \theta (\lambda \cos \theta + 1) = 0.$$

Abbiamo quindi o $\sin \theta = 0$, oppure $\lambda \cos \theta + 1 = 0$ (per come è definito, $\lambda > 0$). Nel primo caso, otteniamo le due configurazioni di equilibrio

$$(x, \theta) = (0, 0), (0, \pi),$$

nel secondo caso, solo se $\lambda > 1$, otteniamo le due configurazioni di equilibrio aggiuntive

$$(x, \theta) = \left(-\frac{k_2\ell}{k_1 + k_2} \sin \theta^*, \theta^* \right), \left(\frac{k_2\ell}{k_1 + k_2} \sin \theta^*, -\theta^* \right), \quad \text{con } \theta^* = \arccos \left(-\frac{1}{\lambda} \right).$$

3. Studiamo la stabilità delle configurazioni di equilibrio. Calcoliamo la matrice hessiana di V :

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(x, \theta)} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \ell \cos \theta \\ k_2 \ell \cos \theta & k_2 \ell^2 \cos^2 \theta - k_2 \ell (x + \ell \sin \theta) \sin \theta + m g \ell \cos \theta \end{bmatrix}$$

Valutiamo V'' nelle quattro configurazioni di equilibrio.

$$V''(0, 0) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \ell \\ k_2 \ell & k_2 \ell^2 + m g \ell \end{bmatrix}$$

$\text{tr} > 0$ e $\det = (k_1 + k_2)m g \ell + k_1 k_2 \ell^2 > 0$,

entrambi gli autovalori sono positivi $\implies (0, 0)$ è punto di minimo per V ed è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

$$V''(0, \pi) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \ell \\ k_2 \ell & k_2 \ell^2 - m g \ell \end{bmatrix}$$

minore principale > 0 e $\det = -(k_1 + k_2)m g \ell + k_1 k_2 \ell^2 = (k_1 + k_2)m g \ell(-1 + \lambda)$,
- se $\lambda > 1$, entrambi gli autovalori sono positivi $\implies (0, \pi)$ è punto di minimo per V ed è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.
- se $\lambda < 1$, un autovalore è negativo $\implies$ il sistema ha un esponente di Lyapunov positivo e quindi $(0, \pi)$ è instabile.

$$V''\left(-\frac{k_2 \ell}{k_1 + k_2} \sin \theta^*, \theta^*\right) = V''\left(\frac{k_2 \ell}{k_1 + k_2} \sin \theta^*, -\theta^*\right) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \ell / \lambda \\ -k_2 \ell / \lambda & k_2 \ell^2 / \lambda^2 - m g \ell \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det = k_1 k_2 \ell^2 / \lambda^2 - m g \ell (k_1 + k_2) \lambda = k_1 k_2 \ell^2 (1 / \lambda^2 - 1)$$

Quando queste configurazioni di equilibrio esistono ($\lambda > 1$), $\det < 0$ quindi un autovalore è sempre negativo $\implies$ il sistema ha un esponente di Lyapunov positivo e quindi le configurazioni sono instabili.

4. Consideriamo la configurazione di equilibrio $(0, 0)$ e chiamiamo $k = k_1 = k_2$. Calcoliamo gli autovalori η_i di $A^{-1}V''$ tramite l'equazione secolare

$$\det(V''(0, 0) - \eta A(0, 0)) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} 2(k - \eta m) & (k - \eta m)\ell \\ (k - \eta m)\ell & ((5/4)k - \eta m)\ell^2 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui

$$m^2 \ell^2 \eta^2 - \frac{5}{2} m k \ell^2 \eta + \frac{3}{2} k^2 \ell^2 \implies \eta_1 = \frac{k}{m}, \eta_2 = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$$

Le frequenze proprie cercate sono $\omega_h = \sqrt{\eta_h}$ ($h = 1, 2$) e i modi normali sono le famiglie di soluzioni ($h = 1, 2$):

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h) \mathbf{u}_h$$

dove c_h e φ_h dipendono dalle condizioni iniziali e $\mathbf{u}_h$ sono gli autovettori associati a η_1 e η_2 :

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{u}_2 = (1, -2)^T.$$