

Compito di Meccanica Razionale 24 Giugno 2024

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = 2\alpha\rho - \frac{1}{\rho^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

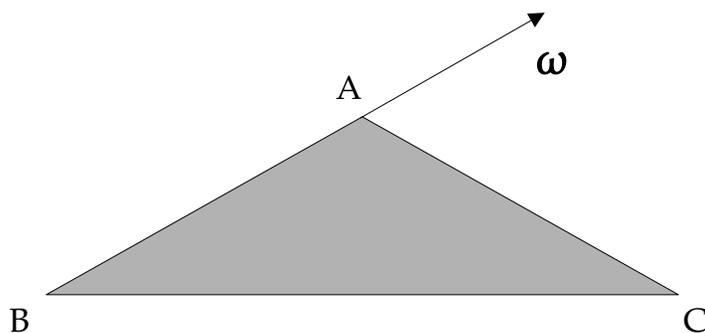
Si supponga che il momento angolare sia diverso da zero e si indichi con c la sua componente ortogonale al piano del moto.

- i) Trovare tutte le orbite circolari al variare di α e c .
- ii) Posto $\alpha > 0$, calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c .
- iii) Fissato $\alpha = \frac{1}{2}$, sul piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si consideri

$$\mathbf{x}(0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

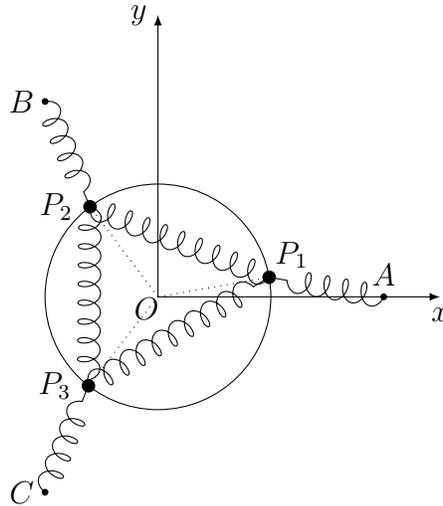
Trovare l'estremo inferiore e superiore della distanza dell'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ dall'origine O .

Esercizio 2. Si consideri una lamina \mathcal{T} triangolare omogenea di massa m e lati $AB = AC = \ell > 0$ e $BC = b > 0$. Il vertice A della lamina è fisso e la lamina è libera di ruotarci attorno. La velocità angolare della lamina è un vettore costante nel tempo di modulo $\omega > 0$, con direzione parallela e verso opposto al vettore AB (si veda la figura).



- i) Trovare le direzioni principali di inerzia e calcolare i momenti principali di inerzia di \mathcal{T} rispetto al polo A .
- ii) Calcolare il momento rispetto al punto A delle forze attive esterne che causano il moto. Trovare in quali casi tale momento è nullo.

Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si considerino in tale piano tre punti materiali P_1, P_2, P_3 vincolati a scorrere sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, con $r > 0$. I punti P_i sono collegati tra loro da molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre, delle molle uguali alle precedenti collegano P_1, P_2, P_3 rispettivamente ai punti $A \equiv (2r, 0)$, $B \equiv (-r, r\sqrt{3})$, $C \equiv (-r, -r\sqrt{3})$, vedi figura.



Si usino come coordinate gli angoli $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ che i segmenti OP_1, OP_2, OP_3 formano con l'asse Ox . Ammettendo che i punti P_i siano liberi di muoversi sulla circonferenza senza il vincolo dato dalle possibili collisioni (questo si può realizzare considerando tre diverse circonferenze molto vicine a quella data), trovare le configurazioni di equilibrio in cui i punti P_1, P_2, P_3 si trovano ai vertici di un triangolo equilatero e studiarne la stabilità.

Esercizio 1.

- i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicitiamo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow 2\alpha\rho + \frac{c^2 - 1}{\rho^3} = 0 \rightarrow \rho^4 = \frac{1 - c^2}{2\alpha}$$

Perciò se $\alpha > 0 \wedge |c| < 1$ oppure $\alpha < 0 \wedge |c| > 1$ esiste un'unica orbita circolare con raggio:

$$\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1 - c^2}{2\alpha}}$$

In tutti gli altri casi non esistono orbite circolari.

- ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\alpha\rho^2 + \frac{c^2 - 1}{2\rho^2}$$

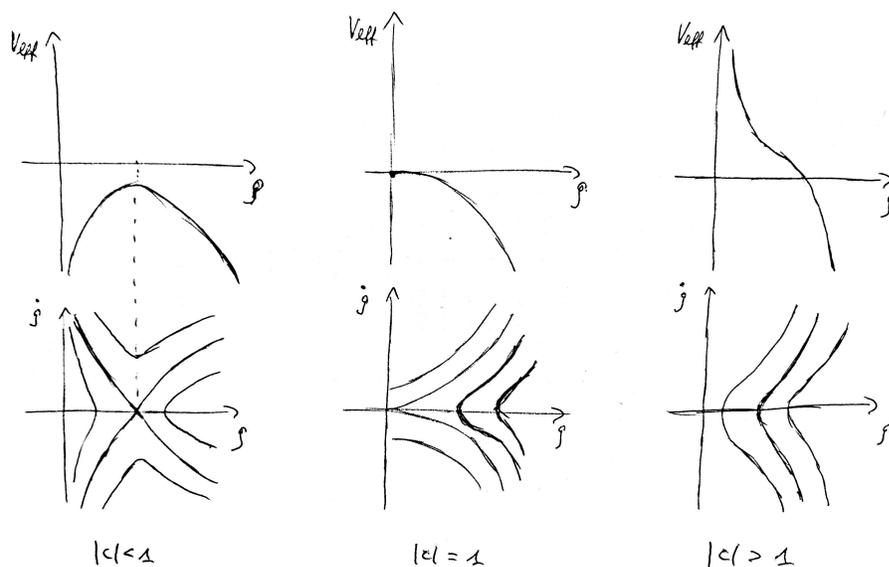
Per $\rho \rightarrow +\infty$ il termine dominante è il primo, perciò

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

mentre per $\rho \rightarrow 0^+$ il termine dominante è il secondo (se $|c| \neq 1$), perciò

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} +\infty & \text{se } |c| > 1 \\ 0^- & \text{se } |c| = 1 \\ -\infty & \text{se } |c| < 1 \end{cases}$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), abbiamo i seguenti casi:



iii) Per $\alpha = 1/2$ sappiamo che esiste un unico punto stazionario di V_{eff} , dato dalla formula riportata nel punto i), il quale è un massimo. Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

e che in questo caso all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_2$, dai dati iniziali si ricava facilmente che:

$$\rho(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{\rho}(0) = \frac{1}{2}, \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = 1$$

da cui possiamo calcolare il valore degli integrali primi del moto:

$$c = \rho^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2}, \quad \bar{E} = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{3}{2}$$

L'orbita circolare corrisponde al punto $(\rho, \dot{\rho}) = (\sqrt[4]{3/4}, 0)$, e per tale orbita l'energia efficace totale vale $-\sqrt{3}/2$.

Poiché il livello dell'energia su cui si trova la condizione iniziale è minore di quella relativa al punto di massimo, e poiché $1/2 = \rho(0) < \rho_1 = \sqrt[4]{3/4}$, l'orbita è limitata. Dal grafico ottenuto nel punto ii), sappiamo che il limite inferiore di ρ è 0 e che esiste un valore massimo, che corrisponde al punto di inversione ρ_{max} :

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \bar{E} \rightarrow -\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{3}{8\rho^2} = -\frac{3}{2} \rightarrow \rho^4 - 3\rho^2 + \frac{3}{4} = 0$$

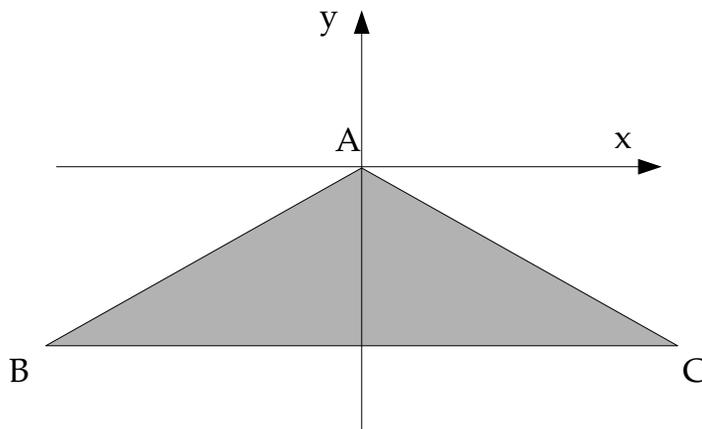
da cui otteniamo le soluzioni $\rho = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}}$. La soluzione col + corrisponde al punto di inversione dell'orbita illimitata a destra del punto di massimo, mentre il punto di inversione che stiamo cercando è dato dalla soluzione con il -:

$$\rho_{\text{max}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{2}},$$

che verifichiamo facilmente essere $< \rho_1$.

Esercizio 2.

- i) Determiniamo una base principale per la lamina \mathcal{T} rispetto al polo A . Consideriamo il riferimento riportato nella figura, centrato in A , l'asse Ax parallelo al lato BC e l'asse Ay sempre nel piano della figura e perpendicolare ad Ax . Tale sistema di riferimento è principale di inerzia in quanto: il versore $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$ è una direzione principale, perché il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$; \mathbf{e}_1 è una direzione principale, perché ortogonale al piano yz che è di simmetria per riflessione per il corpo; \mathbf{e}_2 è una direzione principale, perché l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali. Perciò la matrice di inerzia I in questo sistema di riferimento è diagonale e i valori I_{ii} calcolati in questo riferimento corrispondono ai momenti principali rispetto al polo scelto.



Posso dividere il triangolo \mathcal{T} in due triangoli rettangoli congruenti, entrambi di cateti $b/2$ e h , dove h è l'altezza rispetto alla base BC , che possiamo esprimere come $h = \sqrt{\ell^2 - b^2/4}$. Sia \mathcal{T}_1 il triangolo a sinistra dell'asse Ay e \mathcal{T}_2 il triangolo a destra dell'asse Ay . Poiché i momenti di inerzia I_{11} e I_{22} sono invarianti rispetto alle trasformazioni

$$(x, y) \rightarrow (-x, y) \quad \text{e} \quad (x, y) \rightarrow (x, -y)$$

posso calcolare questi momenti per un solo triangolo rettangolo (per esempio \mathcal{T}_1). I momenti di inerzia per la lamina \mathcal{T} saranno due volte quelli di \mathcal{T}_1 , il cui supporto è descritto da:

$$\mathcal{T}_1 = \{(x, y, z) \mid -b/2 \leq x \leq 0, -h \leq y \leq (2h/b)x, z = 0\}$$

I momenti di inerzia di \mathcal{T} rispetto agli assi coordinati sono quindi:

$$I_{11}^{\mathcal{T}} = 2I_{11}^{\mathcal{T}_1} = 2 \int_{-b/2}^0 \int_{-h}^{(2h/b)x} \sigma y^2 dy dx = \dots = 2 \frac{1}{8} \sigma h^3 b = \frac{1}{4} \sigma h^3 b$$

$$I_{22}^{\mathcal{T}} = 2I_{22}^{\mathcal{T}_1} = 2 \int_{-b/2}^0 \int_{-h}^{(2h/b)x} \sigma x^2 dy dx = \dots = 2 \frac{1}{96} \sigma h b^3 = \frac{1}{48} \sigma h b^3$$

Perciò rispetto al polo A abbiamo i seguenti momenti principali di inerzia:

$$I_1 = \frac{1}{2}mh^2 = \frac{1}{2}m\left(\ell^2 - \frac{b^2}{4}\right), \quad I_2 = \frac{1}{24}mb^2, \quad I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}m\ell^2 - \frac{1}{12}mb^2$$

dove abbiamo usato che $m = \sigma bh/2$.

- ii) Usiamo le equazioni di Eulero per un corpo rigido con punto fisso. Nel sistema di riferimento solidale alla lamina definito nel punto precedente, l'equazione differenziale per la velocità angolare espressa in componenti

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 + N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + N_3 \end{cases}$$

dove $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ è il momento delle forze cercato. La velocità angolare è:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{b}{2\ell}\omega\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{h}{\ell}\omega\hat{\mathbf{e}}_2$$

e $\omega_3 = 0$. Poiché $\boldsymbol{\omega}$ è costante, vale che $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$. Dalle prime due equazioni otteniamo $N_1 = N_2 = 0$. La terza equazione del sistema invece diventa:

$$0 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + N_3 \rightarrow N_3 = \left(\frac{1}{6}mb^2 - \frac{1}{2}m\ell^2\right) \frac{bh}{2\ell^2}\omega^2$$

Perciò $\mathbf{N} = N_3\hat{\mathbf{e}}_3$ con N_3 dato dall'espressione sopra.

Perché questo momento sia nullo l'unica possibilità è che $I_1 = I_2$ (e perciò la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ è una direzione principale di inerzia). Per avere questa condizione deve valere che:

$$b^2 = 3\ell^2 \rightarrow b = \sqrt{3}\ell$$

cioè \mathcal{T} ha la forma di un triangolo isoscele con angoli alla base di 30° .

Esercizio 3. Scriviamo le posizioni dei punti P_i in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{aligned}(P_1 - O) &= r \cos \vartheta_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + r \sin \vartheta_1 \hat{\mathbf{e}}_2, & (P_2 - O) &= r \cos \vartheta_2 \hat{\mathbf{e}}_1 + r \sin \vartheta_2 \hat{\mathbf{e}}_2, \\ (P_3 - O) &= r \cos \vartheta_3 \hat{\mathbf{e}}_1 + r \sin \vartheta_3 \hat{\mathbf{e}}_2\end{aligned}$$

L'energia potenziale è data dalla somma dei contributi delle varie molle presenti nel sistema. Poiché l'energia potenziale elastica dipende dalla distanza tra i vari punti, possiamo usare il teorema del coseno per ricavare tali distanze:

$$\begin{aligned}|P_1 - P_2|^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 2r^2 - 2r^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ |P_1 - P_3|^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) = 2r^2 - 2r^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) \\ |P_2 - P_3|^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) = 2r^2 - 2r^2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) \\ |P_1 - A|^2 &= r^2 + 4r^2 - 4r^2 \cos(\vartheta_1) = 5r^2 - 4r^2 \cos(\vartheta_1) \\ |P_2 - B|^2 &= r^2 + 4r^2 - 4r^2 \cos(\vartheta_2 - 2\pi/3) = 5r^2 - 4r^2 \cos(\vartheta_2 - 2\pi/3) \\ |P_3 - C|^2 &= r^2 + 4r^2 - 4r^2 \cos(\vartheta_3 - 4\pi/3) = 5r^2 - 4r^2 \cos(\vartheta_3 - 4\pi/3)\end{aligned}$$

Perciò, a meno di costanti additive, l'espressione completa dell'energia potenziale è

$$\mathcal{V} = -kr^2 (\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) + \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + 2 \cos(\vartheta_1) + 2 \cos(\vartheta_2 - 2\pi/3) + 2 \cos(\vartheta_3 - 4\pi/3))$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema annullano il gradiente di \mathcal{V} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta_1} = kr^2 (\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin(\vartheta_1 - \vartheta_3) + 2 \sin(\vartheta_1)) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta_2} = kr^2 (-\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) + 2 \sin(\vartheta_2 - 2\pi/3)) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta_3} = kr^2 (-\sin(\vartheta_1 - \vartheta_3) - \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) + 2 \sin(\vartheta_3 - 4\pi/3)) = 0 \end{cases}$$

Sommando le tre equazioni del sistema otteniamo (e dividendo per 2):

$$\sin(\vartheta_1) + \sin(\vartheta_2 - 2\pi/3) + \sin(\vartheta_3 - 4\pi/3) = 0 \quad (1)$$

Utilizziamo il vincolo sulle configurazioni di equilibrio dato dall'esercizio, cioè che i punti si trovino ai vertici di un triangolo equilatero. Per avere tale configurazioni deve valere che

1. $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi/3$ e $\vartheta_3 = \vartheta_1 + 4\pi/3$, oppure
2. $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 4\pi/3$ e $\vartheta_3 = \vartheta_1 + 2\pi/3$.

Nel primo caso [1.], dall'equazione (1), otteniamo:

$$\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 = 0 \rightarrow 3 \sin \vartheta_1 = 0 \rightarrow \vartheta_1 = 0 \vee \vartheta_1 = \pi$$

Perciò abbiamo le possibili configurazioni di equilibrio:

$$(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = (0, 2\pi/3, 4\pi/3) \vee (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = (\pi, 5\pi/3, \pi/3)$$

che in entrambi i casi verifichiamo essere effettivamente delle configurazioni di equilibrio in quanto risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta_1} = kr^2 (\sin(4\pi/3) + \sin(2\pi/3) + 0) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta_2} = kr^2 (-\sin(4\pi/3) + \sin(4\pi/3) + 0) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta_3} = kr^2 (-\sin(2\pi/3) - \sin(4\pi/3) + 0) = 0 \end{cases}$$

Nel secondo caso [2.], l'equazione (1) è sempre verificata:

$$\sin \vartheta_1 + \sin(\vartheta_1 + 2\pi/3) + \sin(\vartheta_1 + 4\pi/3) = 0 \rightarrow 0 = 0$$

però non esiste ϑ_1 che risolve l'intero sistema (dalla prima equazione otteniamo $\sin \vartheta_1 = 0$ e dalla seconda $\sin(\vartheta_1 + 2\pi/3) = 0$, quindi impossibile). Perciò le uniche configurazioni di equilibrio che rispettano il vincolo dato sono quelle trovate nel caso precedente.

Per quanto riguarda la stabilità, calcoliamo l'hessiana di \mathcal{V} :

$$\mathcal{V}'' =: kr^2 \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) + 2\cos(\vartheta_1) & -\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) & -\cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) \\ -\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + 2\cos(\vartheta_2 - 2\pi/3) & -\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) \\ -\cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) & -\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) & \cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) + \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + 2\cos(\vartheta_3 - 4\pi/3) \end{bmatrix}$$

Valutiamo nelle configurazioni di equilibrio:

$$\mathcal{V}''(0, 2\pi/3, 4\pi/3)/kr^2 = \begin{bmatrix} -1/2 - 1/2 + 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 - 1/2 + 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 - 1/2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha autovalori $1/2$, $1/2$, 2 . Essendo tutti positivi, la configurazione di equilibrio $(0, 2\pi/3, 4\pi/3)$ è un minimo stretto di \mathcal{V} , quindi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

$$\mathcal{V}''(\pi, 5\pi/3, \pi/3)/kr^2 = \begin{bmatrix} -1/2 - 1/2 - 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 - 1/2 - 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 - 1/2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -3 \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha autovalori -2 , $-7/2$, $-7/2$. Poiché esiste almeno un autovalore negativo, sappiamo che esiste almeno un esponente di Lyapunov positivo associato alla configurazione di equilibrio $(\pi, 5\pi/3, \pi/3)$, che perciò è instabile.