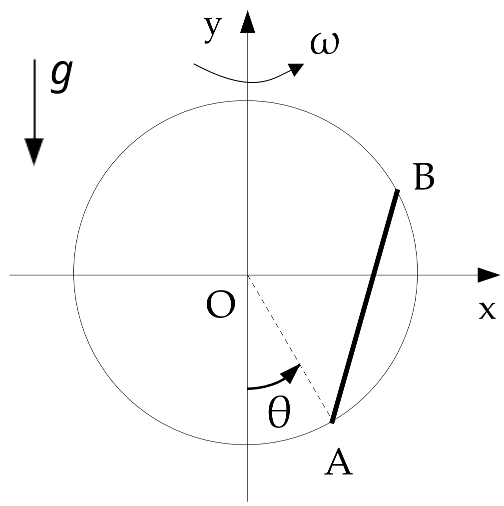
Secondo compitino di Meccanica Razionale
27 Maggio 2026

Esercizio 1. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri un'asta omogenea di massa m e lunghezza $\sqrt{2}R$, i cui estremi A e B sono vincolati a muoversi su una guida circolare di centro O e raggio R. Si assuma che i vincoli in A e B siano lisci. Il piano viene fatto ruotare attorno all'asse verticale Oy con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso.

Si denoti con θ l'angolo che OA forma con la direzione verticale (si veda la figura).

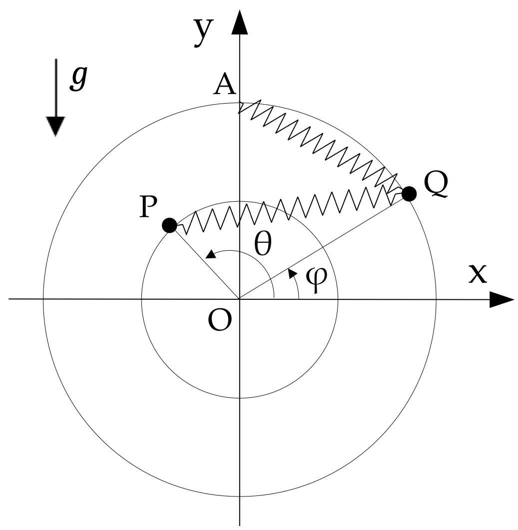


1. Scrivere l'equazione del moto per l'asta tramite le equazioni cardinali.

2. Trovare l'espressione delle reazioni vincolari in A e B.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Consideriamo due punti materiali Q di massa m e P di massa $2m$, collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il punto P è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio r, mentre il punto Q è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio $2r$. Il punto Q è collegato al punto fisso $A = (0, 2r)$ tramite una molla anch'essa di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso.

Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo φ che il segmento OQ forma con l'asse Ox e l'angolo θ che il segmento OP forma con l'asse Ox (si veda la figura).



1. Scrivere la lagrangiana del sistema.

2. Sia $kr = mg$, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.

3. Sempre con $kr = mg$, discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Esercizio 1. Siccome l'asta è lunga $\sqrt{2}R$, il triangolo AOB è rettangolo in O, e quindi il segmento OB forma un angolo θ con l'asse Ox. Vale quindi

$$\begin{aligned} A - O &= R\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 - R\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2 \\ B - O &= R\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + R\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

Possiamo scrivere un qualsiasi punto dell'asta in questo modo

$$(P - O) = (A - O) + r\cos(\theta + \pi/4)\hat{\mathbf{e}}_1 + r\sin(\theta + \pi/4)\hat{\mathbf{e}}_2$$

con $r \in [0, \sqrt{2}R]$, e in particolare il baricentro C dell'asta

$$(C - O) = (R/2)(\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_1 + (R/2)(\sin\theta - \cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_2$$

1. Poichè i vincoli sono lisci, le reazioni vincolari in A e B hanno direzioni ortogonali alla guida

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_A &= \Phi_A(\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2) \\ \mathbf{\Phi}_B &= \Phi_B(\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2) \end{aligned}$$

   Notiamo che se prendiamo la seconda equazione cardinale per l'asta con polo O, entrambe le reazioni vincolari in A e B non appaiono nell'equazione, infatti

$$(A - O) \times \mathbf{\Phi}_A = 0, \qquad (B - O) \times \mathbf{\Phi}_B = 0.$$

   Inoltre, il punto O ha velocità nulla sia come origine del sistema, sia come punto solidale all'asta, infatti è sempre nella solita posizione rispetto ad essa.

   L'equazione cardinale è

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \cancel{-\mathbf{v}_O \times m\mathbf{v}_C} + \mathbf{N}_O$$

   dove

$$\mathbf{M}_O = \cancel{m(O - C) \times \mathbf{v}_O} + I_O\boldsymbol{\varpi} = \left(\frac{1}{12}m(\sqrt{2}R)^2 + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2\right)\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{2}{3}mR^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3$$

   in cui abbiamo usato Huygens-Steiner per calcolare $I_{O,33}$ e che la velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\varpi} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3$.

   Infine dobbiamo calcolare il momento delle forze dovuto alla gravità

$$\mathbf{N}_{O,\text{grav}} = (C - O) \times (-mg\hat{\mathbf{e}}_2) = -mg(R/2)(\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_3$$

e alla forza centrifuga

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{O,\mathrm{centr}} = & \int_0^{\sqrt{2}R} (P-O) \times (-\lambda\omega\hat{\mathbf{e}}_2 \times (\omega\hat{\mathbf{e}}_2 \times (P-O)))\, dr = \\
= & \int_0^{\sqrt{2}R} (P-O) \times \big(\lambda\omega^2 (R\sin\theta + r\cos(\theta+\pi/4))\big)\, \hat{\mathbf{e}}_1 dr = \\
= & -\lambda\omega^2 \int_0^{\sqrt{2}R} (-R\cos\theta + r\sin(\theta+\pi/4))(R\sin\theta + r\cos(\theta+\pi/4)) dr \hat{\mathbf{e}}_3 = \\
= & \frac{1}{6} m\omega^2 R^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\hat{\mathbf{e}}_3
\end{aligned}$$

Otteniamo l'equazione del moto cercata proiettando lungo $\hat{\mathbf{e}}_3$:

$$\frac{2}{3} mR^2\ddot{\theta} = -mg\frac{R}{2}(\sin\theta + \cos\theta) + \frac{1}{6}m\omega^2 R^2 \cos(2\theta)$$

2. Conosciamo già la direzione delle reazioni vincolari, ci basta quindi calcolare i due scalari Φ_A e Φ_B. Questa volta possiamo utilizzare la prima equazione cardinale.

   Calcoliamo prima la risultante della forza centrifuga:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\mathrm{centr}} = & \int_0^{\sqrt{2}R} -\lambda\omega\hat{\mathbf{e}}_2 \times (\omega\hat{\mathbf{e}}_2 \times (P-O)) dr = \int_0^{\sqrt{2}R} \lambda\omega^2 (R\sin\theta + r\cos(\theta+\pi/4)) dr \hat{\mathbf{e}}_1 = \\
= & \left(m\omega^2 R\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} m\omega^2 R\cos(\theta+\pi/4) \right) \hat{\mathbf{e}}_1 = m\omega^2 \frac{R}{2}(\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_1
\end{aligned}$$

La prima equazione cardinale è

$$\begin{aligned}
m\left(\frac{R}{2}\ddot{\theta}(\cos\theta - \sin\theta) - \frac{R}{2}\dot{\theta}^2(\cos\theta + \sin\theta)\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + m\left(\frac{R}{2}\ddot{\theta}(\cos\theta + \sin\theta) - \frac{R}{2}\dot{\theta}^2(-\cos\theta + \sin\theta)\right)\hat{\mathbf{e}}_2 = \\
= -mg\hat{\mathbf{e}}_2 + m\omega^2 (R/2)(\sin\theta + \cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_1 + \Phi_A(\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2) + \Phi_B(\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2)
\end{aligned}$$

Moltiplicando scalarmente per $(\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2)$ otteniamo

$$\Phi_A = -m\frac{R}{2}\ddot{\theta} - m\frac{R}{2}\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - m\omega^2\frac{R}{2}(\sin\theta + \cos\theta)\sin\theta$$

Moltiplicando scalarmente per $(\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2)$ otteniamo

$$\Phi_B = m\frac{R}{2}\ddot{\theta} + m\frac{R}{2}\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - m\omega^2\frac{R}{2}(\sin\theta + \cos\theta)\cos\theta$$

Esercizio 2.

1. Scriviamo le coordinate dei due punti materiali:

$$\mathbf{x}_Q = 2r(\cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \mathbf{e}_2)$$
$$\mathbf{x}_P = r(\cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2)\,.$$

   L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_Q|^2 + \frac{1}{2}2m|\boldsymbol{v}_P|^2 = 2mr^2\dot\varphi^2 + mr^2\dot\theta^2$$

   L'energia potenziale è la somma dei contributi gravitazionali ed elastici

$$\begin{aligned} V(\varphi,\theta) &= V_{\text{elas}} + V_{\text{grav}} = mgy_Q + 2mgy_P + \frac{1}{2}k|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A|^2 + \frac{1}{2}k|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P|^2 \\ &= mg2r\sin\varphi + 2mgr\sin\theta + \frac{1}{2}k((2r\cos\varphi)^2 + (2r\sin\varphi - 2r)^2) + \frac{1}{2}k((2r\cos\varphi - r\cos\theta)^2 + (2r\sin\varphi - r\sin\theta)^2) \\ &= 2mgr\sin\varphi + 2mgr\sin\theta - 4kr^2\sin\varphi - 2kr^2(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) + \text{costanti additive}\,. \end{aligned}$$

   Quindi la lagrangiana è

$$L = T - V = 2mr^2\dot\varphi^2 + mr^2\dot\theta^2 - 2mgr\sin\varphi - 2mgr\sin\theta + 4kr^2\sin\varphi + 2kr^2(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta)$$

2. Ponendo ora, come da testo,

$$kr = mg$$

   otteniamo

$$V(\varphi,\theta) = 2kr^2\left(\sin\theta - \sin\varphi - (\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta)\right)\,.$$

   Per trovare le configurazioni di equilibrio calcoliamo i punti stazionari di V

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2kr^2(-\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2kr^2(\cos\theta - \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

   Sommando la prima con la seconda equazione otteniamo l'equazione più semplice $\cos\varphi = \cos\theta$. Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\varphi \\ \cos\theta(1 - \sin\theta + \sin\varphi) = 0 \end{cases}$$

   La prima equazione implica $\theta = \varphi$ oppure $\theta = 2\pi - \varphi$.

Nel caso $\theta = \varphi$, la seconda equazione diventa $\cos\theta = 0$ da cui otteniamo due configurazioni di equilibrio

$$(\varphi, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Nel caso $\theta = 2\pi - \varphi$, la seconda equazione diventa $\cos\theta(1 + 2\sin\theta) = 0$, da cui otteniamo altre quattro configurazioni di equilibrio

$$(\varphi, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$$

3. Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio basta determinare il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di V valutata nei punti corrispondenti:

$$\frac{V''}{2kr^2} = \frac{1}{2kr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial(\varphi,\theta)^2} = \begin{bmatrix} \sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta + \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Valutiamo $V''/(2kr^2)$ nelle sei configurazioni di equilibrio. Iniziamo da $(\pi/2, \pi/2)$ e $(3\pi/2, 3\pi/2)$:

$$\frac{1}{2kr^2}V''\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2kr^2}V''\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

entrambe le matrici hanno $\det = -1 < 0$, dunque esiste un $\lambda_i < 0$, quindi entrambe le configurazioni sono instabili perchè il sistema ha almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

Vediamo ora $(\pi/2, 3\pi/2)$ e $(3\pi/2, \pi/2)$:

$$\frac{1}{2kr^2}V''\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che implica $\det = -1 < 0$, dunque esiste un $\lambda_i < 0$, quindi la configurazione è instabile perchè il sistema ha almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\frac{1}{2kr^2}V''\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

che implica $\det = 3 > 0$ e $tr = -4$, dunque entrambi gli autovalori sono < 0, quindi la configurazione è instabile perchè il sistema ha almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

Infine, prendiamo $(\pi/6, 11\pi/6)$ e $(5\pi/6, 7\pi/6)$

$$\frac{1}{2kr^2}V''\left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2kr^2}V''\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

che implica $\det = 3/4 > 0$ e $tr = 2 > 0$, dunque entrambi gli autovalori sono > 0, quindi le due configurazioni sono punti di minimo della funzione V e per il teorema di Lagrange-Dirichilet sono stabili.