

Primo compito di Meccanica Razionale

28 Aprile 2026

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|,$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{3k}{\rho^4}, \quad k > 0.$$

Si supponga che il momento angolare rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c e k .
- ii) Si consideri il caso $c^2 = 4\sqrt{k}$. Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$.
- iii) Sia $k = 4$ e si consideri l'orbita con condizioni iniziali

$$\mathbf{x}(0) = (0, 4, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, a, 0 \right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Verificare che per queste condizioni iniziali vale $c^2 = 4\sqrt{k}$ e trovare tutti i valori di a per cui l'orbita è limitata.

- iv) Si consideri ora il caso $c^2 = k > 12$ e si denoti con ρ_1 il raggio dell'orbita circolare con raggio minore. Si trovi il limite di ρ_1 per k che tende a $+\infty$.

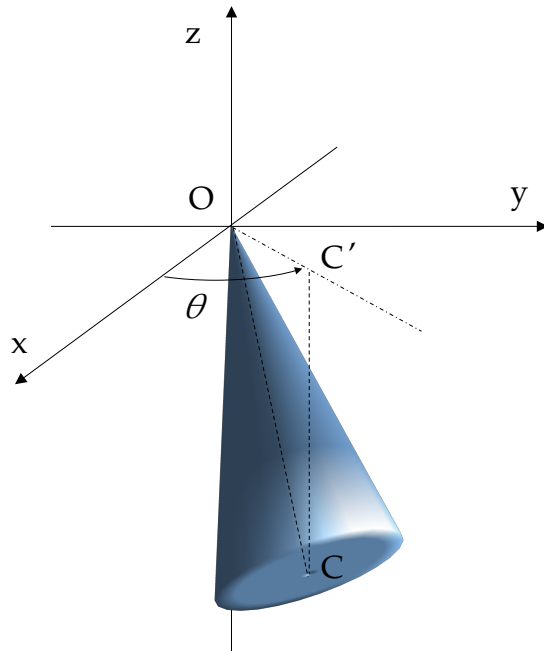
Esercizio 2. Si consideri un cono finito, omogeneo, di massa m , altezza h e raggio alla base R .

i) Calcolare i momenti principali di inerzia del cono rispetto al suo vertice.

Sia ora $\Sigma = Oxyz$ un sistema di riferimento con Oz asse verticale ascendente. Il vertice del cono è incernierato in O e il cono ruota mantenendo una delle sue generatrici fissa sull'asse Oz (si veda la figura). Sia C' la proiezione ortogonale del centro C della base del cono sul piano Oxy e si indichi con θ l'angolo che OC' forma con l'asse Ox .

ii) Calcolare la velocità angolare del cono.

iii) Calcolare l'energia cinetica del cono.



Esercizio 1.

- i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicitiamo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow -\frac{1}{\rho^2} - \frac{3k}{\rho^4} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow \rho^2 - c^2\rho + 3k = 0$$

Quando esistono, le soluzioni di questa equazione possono essere espresse come

$$\rho_{1,2} = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 - 12k}}{2}$$

dove denotiamo ρ_1 la soluzione con il $-$ e ρ_2 quella con il $+$.

Abbiamo i seguenti casi al variare di c e k :

- se $|c| > \sqrt[4]{12k}$, allora esistono due soluzioni positive dell'equazione (in quanto $\sqrt{c^4 - 12k} < c^2$) e quindi due orbite circolari con raggi ρ_1 e ρ_2 .
- se $|c| = \sqrt[4]{12k}$, allora esiste un'unica orbita circolare con $\rho_1 = c^2/2$.
- se $|c| < \sqrt[4]{12k}$, allora non esistono soluzioni reali dell'equazione e quindi non ci sono orbite circolari.

- ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\frac{1}{\rho} + \frac{c^2}{2\rho^2} - \frac{k}{\rho^3}$$

Per $\rho \rightarrow 0^+$ il termine dominante è il terzo, mentre per $\rho \rightarrow +\infty$ il termine dominante è il primo, perciò

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^-.$$

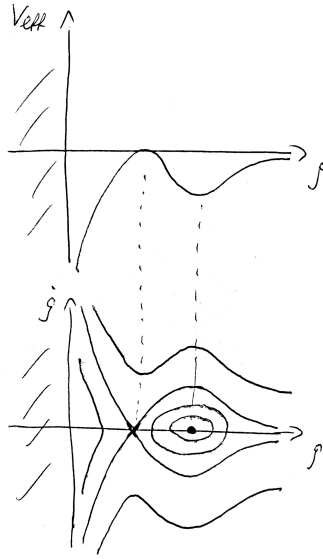
Per $c^2 = 4\sqrt{k}$, siamo nel caso $|c| > \sqrt[4]{12k}$, perciò esistono due punti stazionari di V_{eff} : ρ_1 punto di massimo relativo e ρ_2 punto di minimo relativo. Per poter tracciare il ritratto di fase in maniera corretta, dobbiamo calcolare il valore di V_{eff} in ρ_1 .

$$\rho_1 = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 - 12k}}{2} = \frac{4\sqrt{k} - 2\sqrt{k}}{2} = \sqrt{k},$$

quindi

$$V_{\text{eff}}(\rho_1) = -\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{4\sqrt{k}}{2k} - \frac{k}{k\sqrt{k}} = 0.$$

Il ritratto di fase è



iii) Dai dati iniziali abbiamo che $\mathbf{e}_\rho(0) = \hat{\mathbf{e}}_2$ e $\mathbf{e}_\theta(0) = -\hat{\mathbf{e}}_1$, perciò:

$$\rho(0) = 4, \quad \dot{\rho}(0) = a, \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = -\sqrt{2}/2$$

da cui possiamo calcolare il valore degli integrali primi (ricordiamo che $m = 1$):

$$c = \rho^2\dot{\theta} = -2\sqrt{2}, \quad \bar{E} = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4} + \frac{c^2}{32} - \frac{k}{64} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16}$$

Siamo nel caso $c^2 = 4\sqrt{k} = 8$, per cui possiamo sfruttare il ritratto di fase tracciato nel punto precedente.

Per $\rho(0) = 4$ siamo a destra del punto di massimo ($\rho_1 = 2$) e per avere un'orbita limitata è sufficiente che $\bar{E} < 0$:

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16} < 0 \implies |a| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

iv) Nel caso $c^2 = k > 12$, il raggio ρ_1 dell'orbita circolare con raggio minore è

$$\rho_1 = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 - 12k}}{2} = \frac{k - \sqrt{k^2 - 12k}}{2} = \frac{k}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12}{k}} \right)$$

Facendo tendere $k \rightarrow \infty$ otteniamo una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$. Possiamo quindi espandere con Taylor la quantità sotto radice e otteniamo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_1 = \frac{k}{2} \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{6}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) = 3$$

Esercizio 2.

i) La densità del cono è

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 h}$$

Per trovare i momenti principali di inerzia, determiniamo una base principale. Consideriamo un sistema di riferimento $Ox'y'z'$ centrato nel vertice, l'asse Oz' passante per C (quindi lungo l'altezza relativa alla base circolare) e in modo che il cono sia contenuto nel semispazio $z' \leq 0$. Siano \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 e \hat{e}'_3 i versori associati a Ox' , Oy' e Oz' . Tale sistema di riferimento è principale di inerzia in quanto: \hat{e}'_3 è una direzione principale, perchè Oz' è asse di simmetria per rotazione per il cono; \hat{e}'_2 è una direzione principale, perchè ortogonale al piano $Ox'z'$ che è di simmetria per riflessione per il corpo; \hat{e}'_1 è una direzione principale, perchè l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali. Inoltre, qualsiasi piano passante per O e C è un piano di simmetria per riflessione per il cono, quindi qualsiasi direzione nel piano $Ox'y'$ è principale di inerzia. Quindi per una proposizione vista a lezione vale che $I_1 = I_2$. Basta quindi calcolare $I_{11} = I_1 = I_2$ e $I_{33} = I_3$ in questo (o uno di questi) riferimento.

Usiamo le coordinate (r, φ, z) per descrivere i punti del cono:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Il cono è descritto dall'insieme

$$\mathcal{C} = \{(r, \varphi, z) | 0 \leq r \leq -z \frac{R}{h}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -h \leq z \leq 0\}$$

dove $R/h = \tan \alpha$, con α l'angolo di semi-apertura del cono.

Calcoliamo prima I_{11}

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{\mathcal{C}} \rho(y^2 + z^2) dx dy dz = \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \int_0^{-zR/h} \rho(r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r dr d\varphi dz \\ &= \int_{-h}^0 \rho \pi z^4 \frac{R^4}{4h^4} dz + \int_{-h}^0 \rho 2\pi z^4 \frac{R^2}{2h^2} dz = \frac{1}{20} \rho \pi h R^4 + \frac{1}{5} \rho \pi h^3 R^2 = \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora I_{33}

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_{\mathcal{C}} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \int_0^{-zR/h} \rho r^3 dr d\varphi dz \\ &= \int_{-h}^0 \rho 2\pi z^4 \frac{R^4}{4h^4} dz = \frac{1}{10} \rho \pi h R^4 = \frac{3}{10} m R^2 \end{aligned}$$

- ii) Per calcolare la velocità angolare del cono, usiamo la formula fondamentale della cinematica rigida con punti O e C . Intanto osserviamo che i punti della generatrice del cono che stanno sull'asse Oz sono punti fissi, quindi hanno velocità nulla. Essi appartengono quindi all'asse istantaneo di rotazione, da cui ricaviamo la direzione della velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$.

Nel sistema di riferimento Σ , le coordinate del punto C sono

$$C - O = R \cos \alpha \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + R \cos \alpha \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + h \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_3$$

e la sua velocità

$$\mathbf{v}_C = -R\dot{\theta} \cos \alpha \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + R\dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2$$

Dalla formula fondamentale della cinematica rigida

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{y}_O + \boldsymbol{\omega} \times (C - O) \\ -R\dot{\theta} \cos \alpha \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + R\dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\omega R \cos \alpha \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega R \cos \alpha \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \implies \boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

- iii) Per calcolare l'energia cinetica del cono, sfruttiamo i risultati ottenuti nel punto precedente e usiamo la formula

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{I}_O \boldsymbol{\omega}$$

in quanto O è un punto fisso. Per calcolare tale quantità, considero una base associata ad un sistema di riferimento solidale al cono. Considero un sistema come descritto nel punto i) e tale che la generatrice del cono che sta su Oz sia contenuta nel piano definito da $O\hat{\mathbf{e}}_2'\hat{\mathbf{e}}_3'$ (vedi figura). In tale sistema di riferimento, la velocità angolare è descritta dalle seguenti coordinate

$$\boldsymbol{\varpi} = (0, \dot{\theta} \sin \alpha, \dot{\theta} \cos \alpha)$$

poichè ha la stessa direzione della generatrice del cono che giace su Oz .

Perciò l'energia cinetica è data da

$$T = \boldsymbol{\varpi} \cdot I_O \boldsymbol{\varpi} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 \right) \sin^2 \alpha + \frac{3}{10} m R^2 \cos^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2$$

