

Quarto compito di Meccanica Razionale - con soluzioni

30 Gennaio 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{5}\rho^2 + \frac{3}{4}\rho - \frac{2}{3}$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

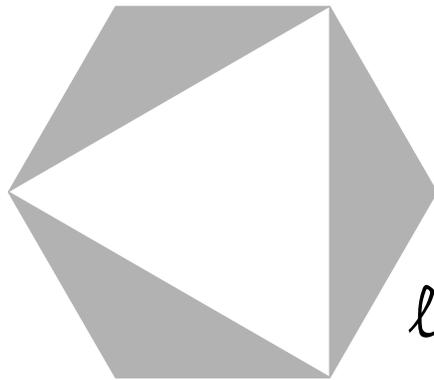
- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c .
- ii) Calcolare il potenziale efficace e tracciare qualitativamente il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ nel caso in cui il numero di orbite circolari è minimo.
- iii) Sul piano del moto $O\hat{e}_1\hat{e}_2$ si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (3, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (0, a), \quad a \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. Si consideri una lamina \mathcal{H} di massa m e densità omogenea, a forma di esagono regolare di lato ℓ . A \mathcal{H} viene applicato un foro uguale ad un triangolo con vertici coincidenti a tre vertici non adiacenti dell'esagono (vedi figura), ottenendo così una lamina forata \mathcal{H}_0 .

- i) Dimostrare che qualsiasi retta passante per il baricentro e giacente nel piano della figura è un asse principale di inerzia per \mathcal{H}_0 .
- ii) Determinare i momenti principali di inerzia di \mathcal{H}_0 rispetto al suo baricentro.



Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = x^2 - 1$, mentre un punto materiale Q , anch'esso di massa m , è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = 1 - x^2$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P e l'ascissa t del punto Q .

- i) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- ii) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- iii) Calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad uno degli equilibri stabili.

Esercizio 1.

- i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$-\frac{1}{5}\rho^2 + \frac{3}{4}\rho - \frac{2}{3} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{5}\rho^5 - \frac{3}{4}\rho^4 + \frac{2}{3}\rho^3 - c^2 = 0$$

Sebbene non possiamo trovare esplicitamente le radici del polinomio $P(\rho)$, studiando il polinomio possiamo calcolare quante radici reali positive possiede. Poichè $P(\rho)$ presenta tre cambi di segno, dalla regola di Cartesio sappiamo che ha al massimo tre radici positive. In più:

$$P(0) = -c^2 < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} P(\rho) = +\infty$$

perciò deve attraversare almeno una volta il semiasse positivo delle ascisse, quindi ha sempre almeno una radice positiva. Studiando i massimi e i minimi di $P(\rho)$, possiamo vedere se lo attraversa più di una volta. I punti stazionari sono:

$$P'(\rho) = \rho^4 - 3\rho^3 + 2\rho^2 = 0 \implies \rho = 0 \vee \rho = 1 \vee \rho = 2$$

La prima soluzione non è accettabile, mentre dal valore del limite ricaviamo che $\rho = 1$ è punto di massimo, mentre $\rho = 2$ di minimo. Valutando $P(\rho)$ nei suoi punti stazionari otteniamo

$$P(1) = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - c^2 = \frac{7}{60} - c^2$$
$$P(2) = \frac{32}{5} - 12 + \frac{16}{3} - c^2 < 0$$

Se $P(1) > 0$, cioè $|c| < \sqrt{7/60}$, allora $P(\rho)$ ha tre radici positive, quindi esistono tre orbite circolari distinte.

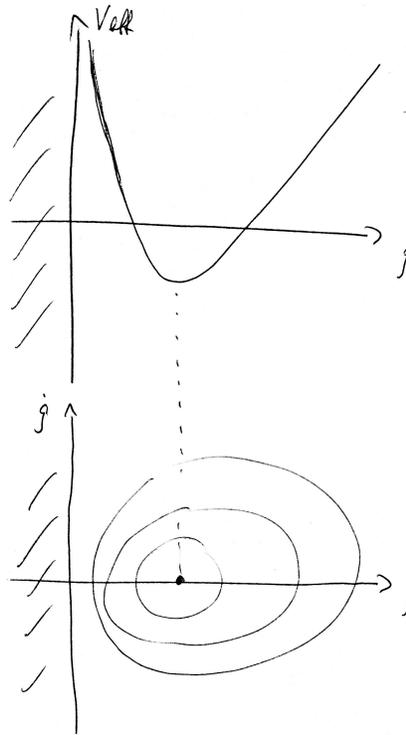
Se $P(1) = 0$, cioè $|c| = \sqrt{7/60}$, allora esistono due orbite circolari distinte.

Se $P(1) < 0$, cioè $|c| > \sqrt{7/60}$, allora esiste un'unica orbita circolare.

- ii) Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \frac{1}{15}\rho^3 - \frac{3}{8}\rho^2 + \frac{2}{3}\rho + \frac{c^2}{2\rho^2}$$

Come richiesto dall'esercizio, tracciamo il ritratto di fase solo nel caso $|c| > \sqrt{7/60}$



iii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

valutando queste espressioni all'istante iniziale otteniamo

$$\rho(0) = 3, \quad \dot{\rho}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = a.$$

La condizione $\dot{\rho} = 0$ è necessaria per avere un'orbita circolare. Inoltre, possiamo calcolare il valore di c dalle condizioni iniziali:

$$c = \rho^2 \dot{\theta} = \rho^2(0) \dot{\theta}(0) = 3a$$

Vogliamo trovare a affinché con $\rho = 3$ e $c = 3a$ abbiamo $\ddot{\rho} = 0$

$$f(3) + \frac{9a^2}{27} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{9}{5} + \frac{9}{4} - \frac{2}{3} + \frac{a^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm \sqrt{\frac{13}{20}}$$

Esercizio 2.

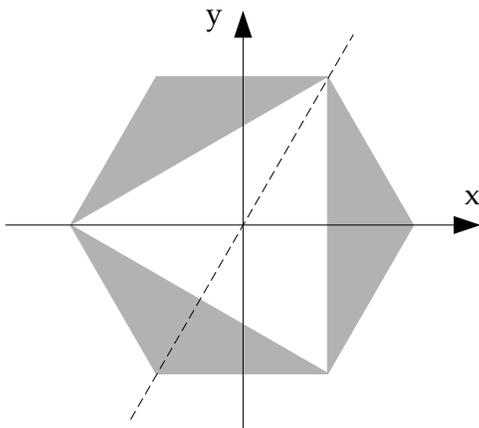
i) Il triangolo all'interno dell'esagono è chiaramente equilatero e i baricentri dell'esagono e del triangolo coincidono. Siccome ℓ è il lato dell'esagono, possiamo calcolare il lato del triangolo, il quale vale $(3/2)\ell$. Perciò abbiamo che le aree

$$A_{\mathcal{H}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ell^2, \quad A_{\mathcal{T}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell^2 \implies A_{\mathcal{H}_0} = A_{\mathcal{H}} - A_{\mathcal{T}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell^2$$

e indicando con σ la densità della lamina, la relazione con la massa m di \mathcal{H} è

$$m = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sigma\ell^2 = 2m_{\mathcal{T}} = 2m_{\mathcal{H}_0}$$

Dimostriamo ora che qualsiasi retta passante per il baricentro e giacente nel piano della figura è un asse principale di inerzia per \mathcal{H}_0 . Fisso un sistema di riferimento con origine nel baricentro come in figura, con l'asse z uscente dal piano della figura.

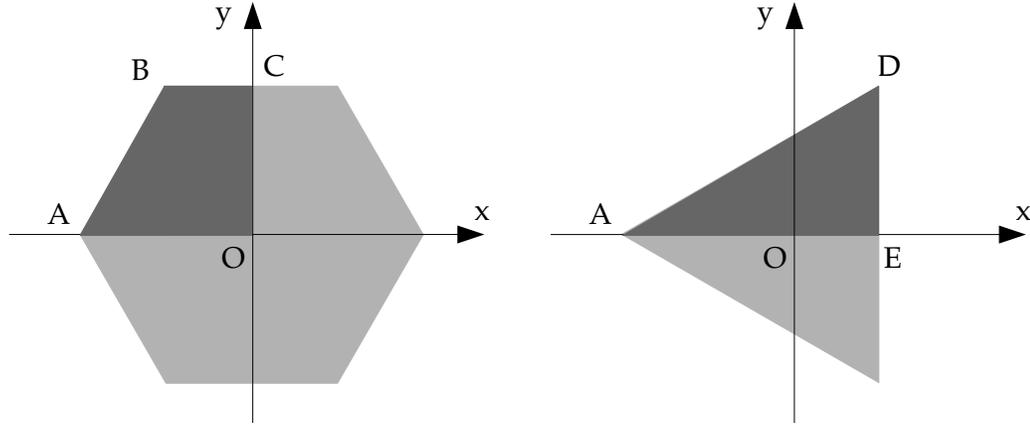


L'asse y definisce una direzione principale di inerzia, in quanto è una direzione ortogonale al piano xz , che è un piano di simmetria per riflessione per \mathcal{H}_0 . Essendo \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 (perchè figura piana) direzioni principali di inerzia, allora anche l'ultimo vettore della terna \mathbf{e}_1 la deve essere. Inoltre posso identificare un ulteriore piano di riflessione per la figura, indicata con la linea tratteggiata nella figura. Ho trovato così un'ulteriore direzione principale di inerzia nel piano. Allora, per una proposizione dimostrata a lezione, vale che tutte le direzioni del tipo $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ sono principali di inerzia. Inoltre, per la stessa proposizione, tali direzioni hanno tutte lo stesso momento di inerzia, quindi in particolare $I_1 = I_2$ e la matrice di inerzia per \mathcal{H}_0 rispetto al baricentro è della forma

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

Notiamo che lo stesso risultato vale per l'esagono completo e il triangolo equilatero con massa.

- ii) Per calcolare i momenti di inerzia di \mathcal{H}_0 rispetto al baricentro, faccio la differenza tra i momenti di inerzia dell'esagono pieno e del triangolo pieno.



Iniziamo con l'esagono. Prendo un sistema di riferimento come mostrato in figura. L'esagono può essere visto come l'unione di quattro trapezi uguali posizionati ognuno in uno dei quattro quadranti. Siccome partendo da uno dei trapezi, posso ottenere gli altri tramite trasformazioni del tipo

$$(x, y) \rightarrow (\pm x, \pm y)$$

che lasciano invariati i momenti di inerzia I_{11} e I_{22} , posso calcolare questi momenti per un solo trapezio (facciamo quello evidenziato in grigio scuro) e il momento di inerzia dell'esagono sarà quattro volte quello del trapezio.

I punti del trapezio sono identificati dall'insieme

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) | (\sqrt{3}/3)y - \ell \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq (\sqrt{3}/2)\ell, z = 0\}$$

$$I_{11}^{\mathcal{H}} = 4I_{11}^{\text{trap}} = 4 \int_0^{(\sqrt{3}/2)\ell} \int_{(\sqrt{3}/3)y-\ell}^0 \sigma y^2 dx dy = \dots = \frac{5}{24} m \ell^2$$

Dalle proprietà trovate nel punto i), che come detto valgono anche per \mathcal{H} , ottengo

$$I_1^{\mathcal{H}} = I_2^{\mathcal{H}} = \frac{5}{24} m \ell^2, \quad I_3^{\mathcal{H}} = \frac{5}{12} m \ell^2$$

Passiamo ora al triangolo. Prendo lo stesso sistema di riferimento usato per l'esagono (si veda la figura). Il triangolo può essere visto come l'unione di due triangoli rettangoli uguali posizionati sopra e sotto l'asse x . Siccome partendo da uno dei triangoli, posso ottenere l'altro tramite la trasformazione $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ che lascia invariati i momenti di inerzia I_{11} e I_{22} , posso calcolare questi momenti per un solo triangolo rettangolo (facciamo quello evidenziato in grigio scuro) e il momento di inerzia del triangolo equilatero sarà due volte quello del triangolo rettangolo.

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \mid -\ell \leq x \leq \ell/2, 0 \leq y \leq (\sqrt{3}/3)x + (\sqrt{3}/3)\ell, z = 0\}$$

$$I_{22}^{\mathcal{T}} = 2I_{22}^{\text{tr.r.}} = 2 \int_{-\ell}^{\ell/2} \int_0^{(\sqrt{3}/3)x + (\sqrt{3}/3)\ell} \sigma x^2 dy dx = \dots = \frac{1}{16} m \ell^2$$

Dalle proprietà trovate nel punto i), che come detto valgono anche per \mathcal{T} , ottengo

$$I_1^{\mathcal{T}} = I_2^{\mathcal{T}} = \frac{1}{16} m \ell^2, \quad I_3^{\mathcal{T}} = \frac{1}{8} m \ell^2$$

Infine

$$I_1^{\mathcal{H}0} = I_1^{\mathcal{H}} - I_1^{\mathcal{T}} = \frac{7}{48} m \ell^2 = I_2^{\mathcal{H}0}, \quad I_3^{\mathcal{H}0} = I_3^{\mathcal{H}} - I_3^{\mathcal{T}} = \frac{7}{24} m \ell^2$$

Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni e le velocità dei punti materiali:

$$\begin{aligned} (P - O) &= s \mathbf{e}_1 + (s^2 - 1) \mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_P &= \dot{s} (\mathbf{e}_1 + 2s \mathbf{e}_2) \\ (Q - O) &= t \mathbf{e}_1 + (1 - t^2) \mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_Q &= \dot{t} (\mathbf{e}_1 - 2t \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Calcolo l'energia cinetica

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} |\mathbf{v}_P|^2 + \frac{m}{2} |\mathbf{v}_Q|^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 (1 + 4s^2) + \frac{1}{2} m \dot{t}^2 (1 + 4t^2)$$

da cui ricavo la matrice cinetica

$$A(\dot{s}, \dot{t}) = \begin{bmatrix} m(1 + 4s^2) & 0 \\ 0 & m(1 + 4t^2) \end{bmatrix}$$

Calcolo l'energia potenziale

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{elas}} = \frac{1}{2} k |P - Q|^2 = \frac{1}{2} k ((s - t)^2 + (s^2 + t^2 - 2)^2)$$

La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

ii) Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di \mathcal{V} rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s} = k ((s - t) + 2s(s^2 + t^2 - 2)) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = k (-(s - t) + 2t(s^2 + t^2 - 2)) = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni ottengo

$$2s(s^2 + t^2 - 2) = -2t(s^2 + t^2 - 2)$$

da cui ho che o vale che $s^2 + t^2 - 2 = 0$ oppure $s = -t$. Nel primo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} s^2 + t^2 - 2 = 0 \\ s = t \end{cases} \rightarrow (s, t) = (1, 1) \text{ o } (-1, -1)$$

Nel secondo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} s = -t \\ 2s(2s^2 - 1) = 0 \end{cases} \rightarrow (s, t) = (0, 0) \text{ o } (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \text{ o } (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$$

Quindi in tutto ci sono cinque configurazioni di equilibrio. Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di \mathcal{V} valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial (s, t)^2} = k \begin{bmatrix} 1 + 2(s^2 + t^2 - 2) + 4s^2 & -1 + 4st \\ -1 + 4st & 1 + 2(s^2 + t^2 - 2) + 4t^2 \end{bmatrix}$$

Valuto \mathcal{V}'' nelle cinque configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{V}''(0, 0) = \begin{bmatrix} -3k & -k \\ -k & -3k \end{bmatrix}$$

$$\det = 8k^2 > 0 \text{ e } \text{tr} = -6k < 0$$

Entrambi gli autovalori sono negativi, quindi il punto è instabile perchè esiste almeno un esponente di Lyapunov positivo.

$$\mathcal{V}''(1, 1) = \mathcal{V}''(-1, -1) = \begin{bmatrix} 5k & 3k \\ 3k & 5k \end{bmatrix}$$

$$\det = 16k^2 > 0 \text{ e } \text{tr} = 10k > 0$$

Entrambi gli autovalori sono positivi, quindi i due punti sono minimi di \mathcal{V} e sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

$$\mathcal{V}''(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \mathcal{V}''(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \begin{bmatrix} k & -3k \\ -3k & k \end{bmatrix}$$

$$\det = -8k^2 < 0 \text{ e } \text{tr} = 2k > 0$$

Un autovalore è negativo, quindi i punti sono instabili perchè esiste almeno un esponente di Lyapunov positivo.

iii) Calcolo le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile $(1, 1)$

$$A(1, 1) = \begin{bmatrix} 5m & 0 \\ 0 & 5m \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad A^{-1}\mathcal{V}''(1, 1) = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 3/5 \\ 3/5 & 1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\frac{2}{5}\frac{k}{m}$ e $\frac{8}{5}\frac{k}{m}$.
Le frequenze proprie sono quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{5}\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{k}{m}}$$