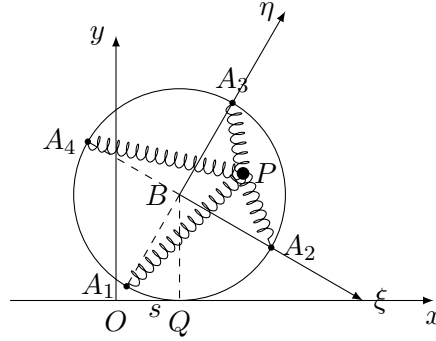


Secondo compitino di Meccanica Razionale 30 Maggio 2025

Esercizio 1. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un anello omogeneo di massa M e raggio $r = 1$ che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox . Del sistema fa parte anche un punto materiale P di massa m collegato da quattro molle uguali di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla a quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 dell'anello che corrispondono ai vertici di un quadrato. Detto B il centro dell'anello considero il riferimento solidale $B\xi\eta$ con l'asse $B\xi$ che passa da A_2, A_4 e l'asse $B\eta$ che passa da A_1, A_3 (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .

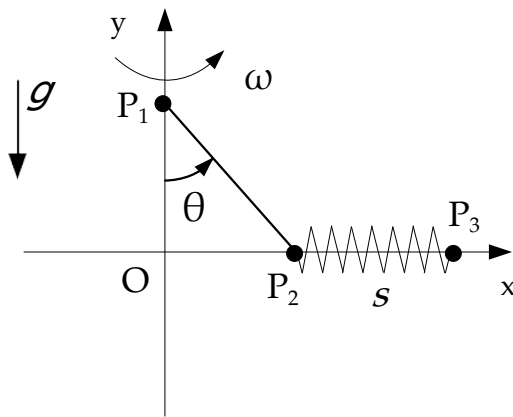


Usiamo come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto Q tra l'anello e l'asse Ox e le coordinate cartesiane ξ, η del punto P nel riferimento solidale $B\xi\eta$. Nel sistema di riferimento Oxy , assumendo per semplicità che per $s = 0$ il punto A_1 coincida con l'origine O ,

1. scrivere la matrice cinetica del sistema;
2. scrivere la lagrangiana L del sistema;
3. trovare un integrale primo delle equazioni di Lagrange relative a L .

Esercizio 2. In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento Oxy . In tale piano consideriamo tre punti materiali P_1 , P_2 e P_3 di ugual massa m . Il punto P_1 è libero di scorrere lungo l'asse Oy , mentre i punti P_2 e P_3 possono scorrere lungo l'asse Ox . Inoltre, P_1 e P_2 sono vincolati agli estremi di un'asta di massa trascurabile di lunghezza ℓ , mentre i punti P_2 e P_3 sono collegati da una molla di costante $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il piano viene fatto ruotare attorno all'asse verticale Oy con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione di modulo $g > 0$ e rivolta verso il basso. Tutti i vincoli sono assunti ideali.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P_3 contata a partire da P_2 e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale (vedi figura).



1. Scrivere la lagrangiana del sistema nel riferimento rotante.
2. Posto $k = 2m\omega^2$, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.
3. Discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di $J = \frac{g}{\omega^2 \ell}$.

Esercizio 1.

1. Noto che poichè il disco rotola senza strisciare, la lunghezza percorsa lungo l'asse Ox corrisponde alla lunghezza dell'arco A_1Q (visto anche in un esercizio a lezione). Quindi l'angolo di rotazione del sistema solidale rispetto al sistema fisso è $-s/r = -s$ (segno meno perchè rotazione in senso orario). Lo stesso si poteva evincere partendo dalla velocità angolare dell'anello, che sappiamo essere $-\dot{s}/r = -\dot{s}$.

Perciò per scrivere le coordinate del vettore $P-O$ nel sistema Oxy , posso ruotare le coordinate di $P-B$ nel sistema solidale tramite la matrice R_3^{-s} :

$$(x_P, y_P) = (x_B, y_B) + R_3^{-s}(\xi, \eta)^T = (s + \xi \cos s + \eta \sin s)\mathbf{e}_1 + (-\xi \sin s + \eta \cos s)\mathbf{e}_2$$

La velocità del punto nel sistema Oxy sarà

$$\mathbf{v}_P = \left(\dot{s}(1 - \xi \sin s + \eta \cos s) + \dot{\xi} \cos s + \dot{\eta} \sin s \right) \mathbf{e}_1 + \left(\dot{s}(-\xi \cos s - \eta \sin s) - \dot{\xi} \sin s + \dot{\eta} \cos s \right) \mathbf{e}_2$$

e la sua energia cinetica

$$T^P = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m \left(\dot{s}^2(1 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi \sin s + 2\eta \cos s) + \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \right) + m\dot{s}\dot{\xi}(\cos s + \eta) + m\dot{s}\dot{\eta}(\sin s - \xi)$$

In più dobbiamo contare l'energia cinetica dell'anello, di cui possiamo calcolare facilmente $I_{B,33} = Mr^2 = M$, perciò:

$$T^A = \frac{1}{2}I_{Q,33}\omega^2 = M\dot{s}^2$$

dove abbiamo usato che la velocità angolare dell'anello è $\omega = -\dot{s}/r = -\dot{s}$ e che $I_{Q,33} = I_{B,33} + Mr^2 = 2M$. L'energia cinetica totale è quindi:

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{s}^2(1 + 2M/m + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi \sin s + 2\eta \cos s) + \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \right) + m\dot{s}\dot{\xi}(\cos s + \eta) + m\dot{s}\dot{\eta}(\sin s - \xi)$$

La matrice cinetica del sistema è:

$$A(s, \xi, \eta) = m \begin{bmatrix} 1 + 2M/m + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi \sin s + 2\eta \cos s & \cos s + \eta & \sin s - \xi \\ \cos s + \eta & 1 & 0 \\ 0 & \sin s - \xi & 1 \end{bmatrix}$$

2. Avendo già calcolato T , per scrivere la lagrangiana basta calcolare l'energia potenziale, che è la somma del contributo gravitazionale ed elastico. Per calcolare

le lunghezze delle molle, conviene prendere le coordinate dei punti nel sistema solidale (la lunghezza di un vettore è indipendente dal sistema scelto). Quindi:

$$\begin{aligned}(P - A_1) &= \xi \hat{\mathbf{e}}'_1 + (\eta + 1) \hat{\mathbf{e}}'_2 \\(P - A_2) &= (\xi - 1) \hat{\mathbf{e}}'_1 + \eta \hat{\mathbf{e}}'_2 \\(P - A_3) &= \xi \hat{\mathbf{e}}'_1 + (\eta - 1) \hat{\mathbf{e}}'_2 \\(P - A_4) &= (\xi + 1) \hat{\mathbf{e}}'_1 + \eta \hat{\mathbf{e}}'_2\end{aligned}$$

Perciò l'energia potenziale totale è

$$\begin{aligned}V &= mgy_P + Mgy_B + \frac{1}{2}k(\xi^2 + (\eta + 1)^2 + (\xi - 1)^2 + \eta^2 + \xi^2 + (\eta - 1)^2 + (\xi + 1)^2 + \eta^2) = \\&= mg(-\xi \sin s + \eta \cos s) + 2k(\xi^2 + \eta^2) + \text{costanti}\end{aligned}$$

La lagrangiana è

$$L = T - V$$

con T e V date dalle formule sopra.

3. Siccome la lagrangiana è indipendente esplicitamente dal tempo, sappiamo che l'integrale di Jacobi è un integrale primo del sistema. In questo caso tale integrale primo può essere espresso come

$$J = T + V$$

con T e V date dalle formule sopra.

Esercizio 2.

1. Nel piano rotante, le coordinate di posizione e velocità dei punti materiali sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{P_1} &= \ell \cos \theta \mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_1 &= -\ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{x}_{P_2} &= \ell \sin \theta \mathbf{e}_1, & \mathbf{v}_2 &= \ell \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{x}_{P_3} &= (s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_1, & \mathbf{v}_3 &= (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

L'energia cinetica del sistema è quindi

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} m (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta)^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta)^2$$

L'energia potenziale è la somma delle energie potenziali gravitazionali, elastiche e centrifughe:

$$\begin{aligned} V &= m g \ell \cos \theta + \frac{1}{2} k s^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} m \omega^2 (s + \ell \sin \theta)^2 = \\ &= m g \ell \cos \theta + \frac{1}{2} (k - m \omega^2) s^2 - m \omega^2 (\ell^2 \sin^2 \theta + \ell s \sin \theta) \end{aligned}$$

La lagrangiana è $L = T - V$.

2. Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di V rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = (k - m \omega^2) s - m \omega^2 \ell \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = -m g \ell \sin \theta - 2 m \omega^2 \ell^2 \sin \theta \cos \theta - m \omega^2 \ell s \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ottengo $s = \ell \sin \theta$ (dove abbiamo usato che $k = 2m\omega^2$), e sostituendola alla seconda:

$$\begin{aligned} m g \ell \sin \theta + 3 m \omega^2 \ell^2 \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ \implies \sin \theta = 0 &\quad \text{oppure} \quad \cos \theta = -\frac{1}{3} \frac{g}{\omega^2 \ell} = -\frac{1}{3} J \end{aligned}$$

Dalla prima ottengo le configurazioni di equilibrio $(0, 0)$ e $(0, \pi)$, dalla seconda $(\ell \sin \theta^*, \theta^*)$ e $(-\ell \sin \theta^*, -\theta^*)$, con $\theta^* = \arccos(-(1/3)J)$ (angolo compreso tra $\pi/2$ e π). Le ultime due configurazioni di equilibrio esistono solo per $0 < J < 3$ (J è infatti sempre > 0).

3. Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di V valutata nei punti corrispondenti:

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial (s, \theta)^2} = m \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & -\ell \cos \theta \\ -\ell \cos \theta & -J \ell^2 \cos \theta - 2 \ell^2 \cos^2 \theta + 2 \ell^2 \sin^2 \theta + \ell s \sin \theta \end{bmatrix}$$

Valuto $V''/(m\omega^2)$ nelle quattro configurazioni di equilibrio.

$$V''(0,0)/(m\omega^2) = \begin{bmatrix} 1 & -\ell \\ -\ell & -(J+2)\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$\det = -(J+3)\ell^2 \text{ e } \text{tr} = -(J+2)\ell^2 + 1$$

per ogni $J > 0$: $\det < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,0)$ è instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$V''(0,\pi)/(m\omega^2) = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ \ell & (J-2)\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$\det = (J-3)\ell^2 \text{ e } \text{tr} = (J-2)\ell^2 + 1$$

se $0 < J < 3$: $\det < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,\pi)$ è instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

se $J > 3$: $\det > 0$ e $\text{tr} > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0,\pi)$ minimo stretto di V e quindi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

$$V''(\ell \sin \theta^*, \theta^*)/(m\omega^2) = V''(-\ell \sin \theta^*, -\theta^*)/(m\omega^2) = \begin{bmatrix} 1 & (J/3)\ell \\ (J/3)\ell & (3 - 2J^2/9)\ell^2 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo usato che $\cos \theta^* = -J/3$ e $\sin^2 \theta^* = 1 - J^2/9$

$$\det = (3 - J^2/3)\ell^2 \text{ e } \text{tr} = 1 + (3 - 2J^2/9)\ell^2$$

se $0 < J < 3$ (cioè quando queste configurazioni di equilibrio esistono): $\det > 0$ e $\text{tr} > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (\ell \sin \theta^*, \theta^*)$ e $(-\ell \sin \theta^*, -\theta^*)$ minimi stretti di V e quindi sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet.