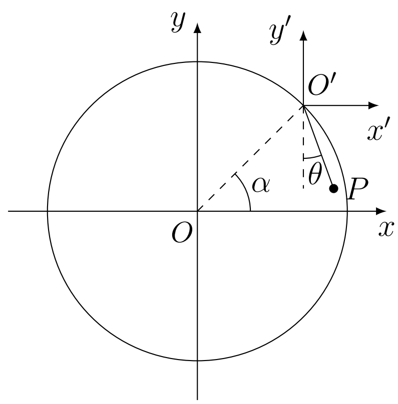
Secondo compitino di Meccanica Razionale
31 Maggio 2022

Esercizio 1. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$ e si consideri un pendolo formato da un punto materiale P di massa m saldato ad un estremo di un asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. L'altro estremo O' dell'asta è vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio R centrata nell'origine, con legge oraria data da $t \mapsto \alpha(t)$, dove α è l'angolo tra OO' e l'asse Ox. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



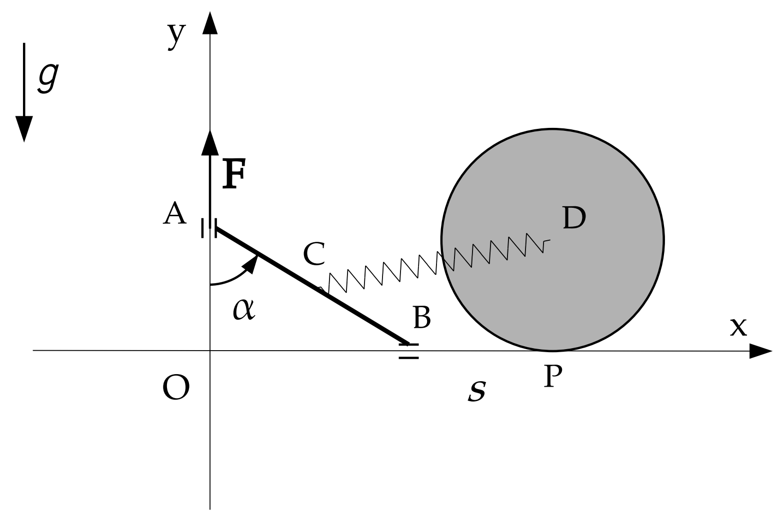
Si consideri inoltre il riferimento Σ' con origine in O' e orientato come Σ. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il pendolo forma con la direzione verticale,

i) Scrivere le lagrangiane L e L' del sistema meccanico nei due riferimenti Σ e Σ';

ii) trovare una funzione $F(\theta, t)$ tale che

$$L' = L + \frac{dF}{dt}.$$

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da un'asta di lunghezza $2r$ e massa m, e da un disco di raggio r e massa M. L'estremo A dell'asta è vincolato a scorrere lungo l'asse Oy, mentre l'estremo B è vincolato a scorrere lungo l'asse x. Il disco rotola senza strisciare sull'asse Ox. Il sistema è soggetto alla forza di gravità di accelerazione g, diretta verso il basso, e i baricentri dei due corpi sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Inoltre, sull'estremo A dell'asta agisce una forza costante $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{e}}_2$, con $F > 0$ e $\mathbf{e}_2$ è il versore dell'asse Oy.



Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto P del disco con l'asse Ox e l'angolo α che l'asta forma con la direzione verticale,

a) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema

b) studiare la stabilità delle configurazioni trovate al variare del parametro

$$J = \frac{mg - 2F}{kr}$$

c) nel caso $J = 3$, calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno agli equilibri stabili del sistema

Esercizio 1.

i) Siccome $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1'$ e $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'$, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del sistema Σ' rispetto a Σ è nulla.
Calcolo prima la lagrangiana nel sistema di riferimento Σ. L'unica coordinata lagrangiana è θ, mentre α è una funzione esplicita del tempo. La posizione e la velocità del punto P in Σ sono:

$$(P - O) = (R\cos\alpha + \ell\sin\theta)\mathbf{e}_1 + (R\sin\alpha - \ell\cos\theta)\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{v}_P = (-R\dot\alpha\sin\alpha + \ell\dot\theta\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (R\dot\alpha\cos\alpha + \ell\dot\theta\sin\theta)\mathbf{e}_2$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot\alpha^2 + \ell^2\dot\theta^2 - 2R\ell\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\cos\theta + 2R\ell\dot\alpha\dot\theta\cos\alpha\sin\theta\right)$$

L'energia potenziale è data dalla sola gravità

$$V = mg(R\sin\alpha - \ell\cos\theta)$$

Siccome i termini costanti e i termini che sono solo funzioni esplicite del tempo non danno contributo nelle equazioni di Lagrange, posso definire la funzione lagrangiana L omettendo questi termini, ottenendo:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot\theta^2 - 2R\ell\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\cos\theta + 2R\ell\dot\alpha\dot\theta\cos\alpha\sin\theta\right) + mg\ell\cos\theta$$

Calcolo ora la lagrangiana nel sistema di riferimento Σ'. La posizione e la velocità del punto P in Σ' sono:

$$(P - O') = \ell\sin\theta\mathbf{e}_1' - \ell\cos\theta\mathbf{e}_2'$$
$$\mathbf{v}_P' = \ell\dot\theta\cos\theta\mathbf{e}_1' + \ell\dot\theta\sin\theta\mathbf{e}_2'$$

L'energia cinetica è

$$T' = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P'|^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2$$

Questa volta, l'energia potenziale è data dalla gravità e dalle forze apparenti. In questo caso, siccome $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, l'unico contributo delle forze apparenti è dovuta alla forza di trascinamento di O', la cui energia potenziale è $V^T = m\mathbf{a}_{O'} \cdot (P - O')$, dove $\mathbf{a}_{O'}$ è l'accelerazione di O' nel riferimento Σ:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{O'} &= (-R\ddot\alpha\sin\alpha - R\dot\alpha^2\cos\alpha)\mathbf{e}_1 + (R\ddot\alpha\cos\alpha - R\dot\alpha^2\sin\alpha)\mathbf{e}_2\\ &= (-R\ddot\alpha\sin\alpha - R\dot\alpha^2\cos\alpha)\mathbf{e}_1' + (R\ddot\alpha\cos\alpha - R\dot\alpha^2\sin\alpha)\mathbf{e}_2'\end{aligned}$$

Perciò l'energia potenziale in Σ' è

$$V' = -mg\ell\cos\theta + m(-R\ddot\alpha\sin\alpha - R\dot\alpha^2\cos\alpha)\ell\sin\theta - m(R\ddot\alpha\cos\alpha - R\dot\alpha^2\sin\alpha)\ell\cos\theta$$

La funzione lagrangiana L' è:

$$L' = T' - V' = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2 + mg\ell\cos\theta + m(R\ddot\alpha\sin\alpha + R\dot\alpha^2\cos\alpha)\ell\sin\theta + m(R\ddot\alpha\cos\alpha - R\dot\alpha^2\sin\alpha)\ell\cos\theta$$

ii) Per trovare la funzione F faccio la differenza tra L' e L:

$$\begin{aligned}
L' - L &= m(R\ddot{\alpha}\sin\alpha + R\dot{\alpha}^2\cos\alpha)\ell\sin\theta + m(R\ddot{\alpha}\cos\alpha - R\dot{\alpha}^2\sin\alpha)\ell\cos\theta \\
&\quad + mR\ell\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta - mR\ell\dot{\alpha}\dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta \\
&= mR\ell\Big((\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha)\sin\theta + \dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta\Big) \\
&\quad + mR\ell\Big((\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha)\cos\theta - \dot{\alpha}\dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta\Big)
\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che questa differenza è la derivata totale nel tempo della funzione

$$F(\theta, t) = mR\ell\dot{\alpha}(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta) = mR\ell\dot{\alpha}\cos(\alpha - \theta)$$

Esercizio 2.

i) Inizio calcolando l'energia potenziale del sistema. Le coordinate dei punti in cui sono applicate le forze sono:

$$\begin{gathered}
(A - O) = 2r\cos\alpha\mathbf{e}_2 \\
(C - O) = r\sin\alpha\mathbf{e}_1 + r\cos\alpha\mathbf{e}_2 \\
(D - O) = s\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_2
\end{gathered}$$

L'energia potenziale del sistema è quindi

$$V = mgr\cos\alpha + Mgr - 2Fr\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left((s - r\sin\alpha)^2 + (r - r\cos\alpha)^2\right)$$

che a meno di costanti diventa

$$V = (mg - 2F - kr)r\cos\alpha + \frac{1}{2}ks^2 - krs\sin\alpha$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di V rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial s} = ks - kr\sin\alpha = 0 \\
\dfrac{\partial V}{\partial \alpha} = -(mg - 2F - kr)r\sin\alpha - krs\cos\alpha = 0
\end{cases}$$

Dalla prima equazione ottengo $s = r\sin\alpha$, e sostituendola alla seconda:

$$\begin{gathered}
-(mg - 2F - kr)r\sin\alpha - kr^2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\
\cos\alpha\sin\alpha + (J - 1)\sin\alpha = 0 \\
\sin\alpha = 0 \quad \text{oppure} \quad \cos\alpha = 1 - J
\end{gathered}$$

Dalla prima ottengo le configurazioni di equilibrio $(0, 0)$ e $(0, \pi)$, dalla seconda $(r\sin\alpha^*, \alpha^*)$ e $(-r\sin\alpha^*, -\alpha^*)$, con $\alpha^* = \arccos(1 - J)$. Le ultime due configurazioni di equilibrio esistono solo per $0 < J < 2$.

ii) Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di V valutata nei punti corrispondenti:

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(s,\alpha)^2} = \begin{bmatrix} k & -kr\cos\alpha \\ -kr\cos\alpha & kr^2((1-J)\cos\alpha + (s/r)\sin\alpha) \end{bmatrix}$$

Valuto V'' nelle quattro configurazioni di equilibrio

$$V''(0,0) = \begin{bmatrix} k & -kr \\ -kr & kr^2(1-J) \end{bmatrix}$$

$\det = -Jk^2r^2$ e $\mathrm{tr} = k + kr^2(1-J)$
se $J < 0$: $\det > 0$ e $\mathrm{tr} > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0,0)$ stabile per teorema di Lagrange-Dirichilet
per $J > 0$: $\det < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,0)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$V''(0,\pi) = \begin{bmatrix} k & kr \\ kr & kr^2(J-1) \end{bmatrix}$$

$\det = k^2r^2(J-2)$ e $\mathrm{tr} = k + kr^2(J-1)$
se $J > 2$: $\det > 0$ e $\mathrm{tr} > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0,\pi)$ stabile per teorema di Lagrange-Dirichilet
se $J < 2$: $\det < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,\pi)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$V''(r\sin\alpha^*, \alpha^*) = V''(-r\sin\alpha^*, -\alpha^*) = \begin{bmatrix} k & -kr(1-J) \\ -kr(1-J) & kr^2 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo usato che $\cos\alpha^* = 1-J$ e $\sin^2\alpha^* = 2J - J^2$
$\det = k^2r^2(2J-J^2)$ e $\mathrm{tr} = k + kr^2$
se $0 < J < 2$ (cioè quando queste configurazioni di equilibrio esistono): $\det > 0$ e $\mathrm{tr} > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (r\sin\alpha^*, \alpha^*)$ e $(-r\sin\alpha^*, -\alpha^*)$ sono stabili per teorema di Lagrange-Dirichilet

iii) Per $J = 3$ esiste un unico punto di equilibrio stabile ed è $(0,\pi)$. Per prima cosa, calcolo l'energia cinetica del sistema usando il teorema di Konig per l'asta e il disco. Da risultati noti ho che $\boldsymbol{\omega}^a = \dot\alpha\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\omega}^d = -(\dot s/r)\mathbf{e}_3$, $I^a_{33,C} = (1/3)mr^2$ e $I^d_{33,D} = (1/2)Mr^2$. Le velocità dei baricentri sono:

$$\mathbf{v}_C = r\dot\alpha\cos\alpha\mathbf{e}_1 - r\dot\alpha\sin\alpha\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{v}_C = \dot s\mathbf{e}_1$$

Perciò l'energia cinetica è:

$$T = T^a + T^d = \frac{1}{2}mr^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{6}mr^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}M\dot s^2 + \frac{1}{4}Mr^2\left(\frac{\dot s}{r}\right)^2 = \frac{2}{3}mr^2\dot\alpha^2 + \frac{3}{4}M\dot s^2$$

La matrice cinetica è quindi

$$A(\dot{s},\dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} (3/2)M & 0 \\ 0 & (4/3)mr^2 \end{bmatrix}$$

Per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni calcolo gli autovalori della matrice $A^{-1}V''$ valutata nel punto di equilibrio stabile

$$A^{-1}V''(0,\pi) = k \begin{bmatrix} 2/(3M) & 2r/(3M) \\ 3/(4mr) & 3/(2m) \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{k}{2}\left(\frac{2}{3M}+\frac{3}{2m}\right) \pm \frac{k}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3M}+\frac{3}{2m}\right)^2 - \frac{2}{Mm}} = \left(\frac{k}{3M}+\frac{3k}{4m}\right) \pm \sqrt{\frac{k^2}{9M^2}+\frac{9k^2}{16m^2}}$$

E le frequenze proprie cercate sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$